Tema 7:

Superficies regladas desarrollables. Pirámide-cono, prisma-cilindro.

Definición y representación diédrica.

Las superficies regladas están generadas por el movimiento de una recta. En las superficies no desarrollables las generatrices se cruzan, no se cortan.

Las superficies regladas desarrollables se caracterizan porque las generatrices pasan por un punto llamado vértice y se apoyan sobre una línea denominada directriz. Si la directriz es poligonal es pirámide o prisma y si es curva, cono o cilindro. Si el vértice es propio, es cono o pirámide y si es impropio, es decir, está en el infinito, es cilindro o prisma (figura 1).

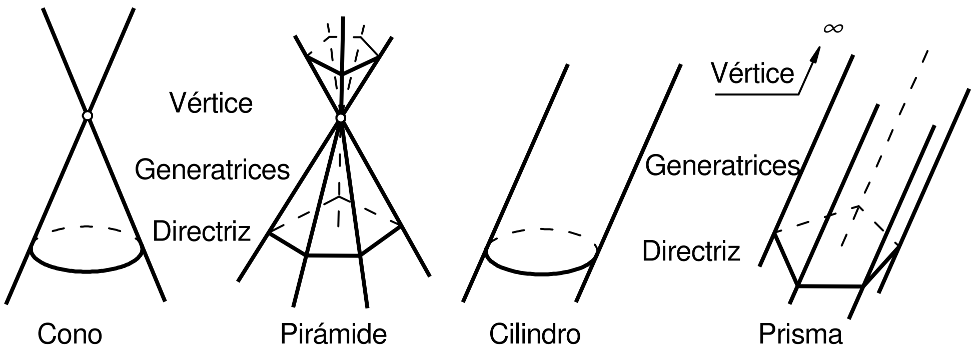


Figura 1: Superficies regladas desarrollables.

La representación diédrica de superficies regladas, se muestra en la figura 2, apoyadas en el horizontal. Las superficies están limitadas por su vértice propio y una base o por dos bases.

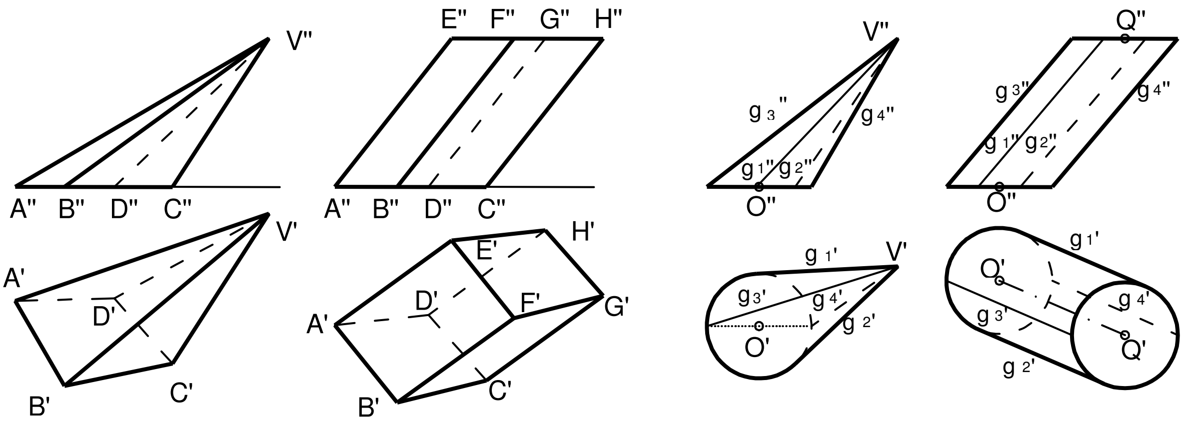


Figura 2: Representación diédrica de superficies regladas.

Para la visualización de las figuras se tienen en cuenta los siguientes detalles:

- Todo contorno es visto.
- Todas las aristas que van a un vértice interior, como el D’ o F’, son del mismo tipo, vistas u ocultas.
- Para determinar la visualización de una arista o vértice, se observa la figura en la otra vista desde donde se “ve” la que se está analizando y si queda próxima al observador es vista y si está tras otros elementos es oculta.
- En el cono o cilindro, las generatrices que parten de la parte oculta de una base, son ocultas. Obsérvese que en este caso, las generatrices **g1 y g2** que definen la superficie en una vista, son las del **contorno aparente en el horizontal** y las **g3, g4** son las del **contorno aparente en el vertical**.

Situación de un punto sobre la superficie reglada.

Un punto está sobre la superficie reglada cuando se encuentra sobre una generatriz o en la base correspondiente. En los ejemplos de la figura 3, se plantea obtener los puntos de la superficie que corresponden a la proyección P’ o P’’ respectivamente, los cuales dan lugar a dos soluciones posibles.

Planteamiento Resolución

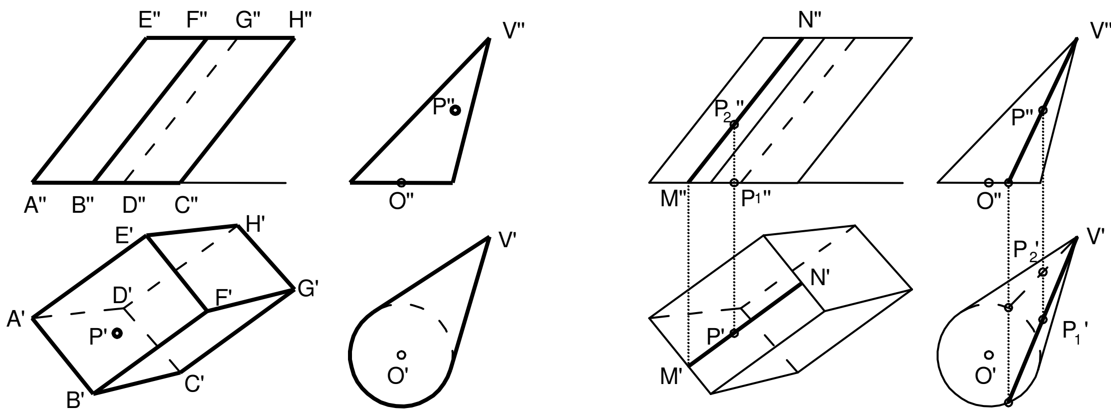


Figura 3: Situar un punto sobre una superficie reglada.

Secciones planas: proyección y verdadera magnitud de la sección. Desarrollo de la superficie y de su transformada.

Las secciones planas se pueden obtener siguiendo diversos procedimientos como: la intersección de cada generatriz con el plano sección, por medio de cambios de plano y por homología.

- Sección por <u>plano proyectante</u> en pirámide y cono. Desarrollo.

La sección se obtiene por intersección de las aristas o generatrices con el plano y la V M por abatimiento (figura 4). El desarrollo de la pirámide se realiza por triangulación de las aristas contiguas en VM y del lado de la base correspondiente que está en VM en el horizontal. La transformada de la sección se traza llevando los puntos de la sección sobre las aristas en VM y de ahí al desarrollo. En el cono (figura 5) se procede de forma similar sustituyendo la base por una poligonal (hexágono por ejemplo) y llevando el arco rectificado al desarrollo se minimiza el error. El desarrollo sale simétrico si se abre por la generatriz más corta o más larga en las que las tangentes son perpendiculares a éstas. Las generatrices del contorno aparente en el horizontal (I, J) dan lugar a puntos de inflexión en el desarrollo. Esto es así porque el ángulo de la generatriz con la tangente a la directriz se conserva en el desarrollo.

- Sección por plano cualquiera en pirámide y cono.

Se puede resolver mediante intersección de arista con el plano sección o bien mediante cambio de plano (se recomienda el vertical), de modo que el plano π(h,m) queda proyectante como en el caso anterior (figura 5).

Planteamiento: Resolución:

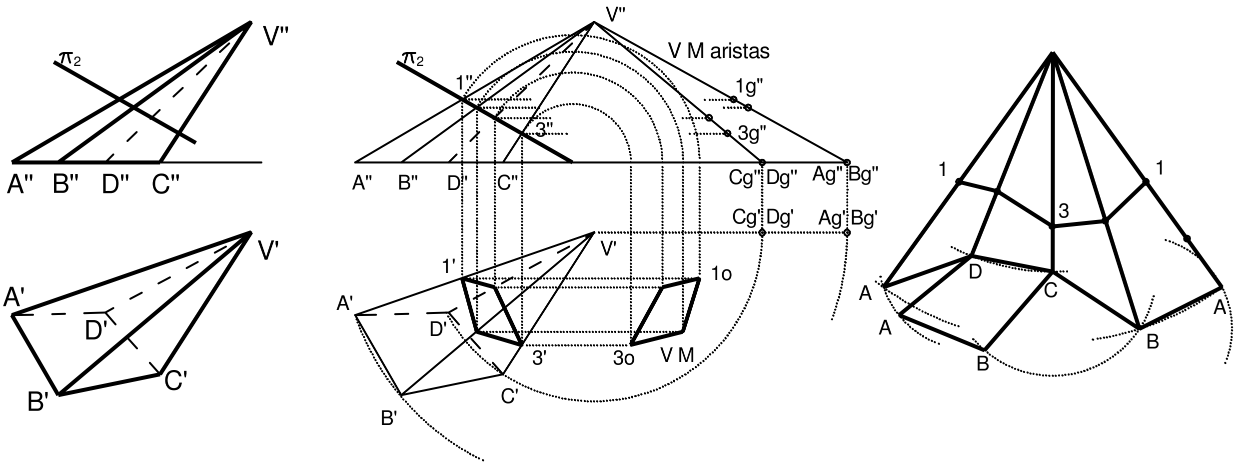


Figura 4: Sección con plano proyectante y desarrollo de una pirámide y transformada de la sección.

Planteamiento: Resolución:

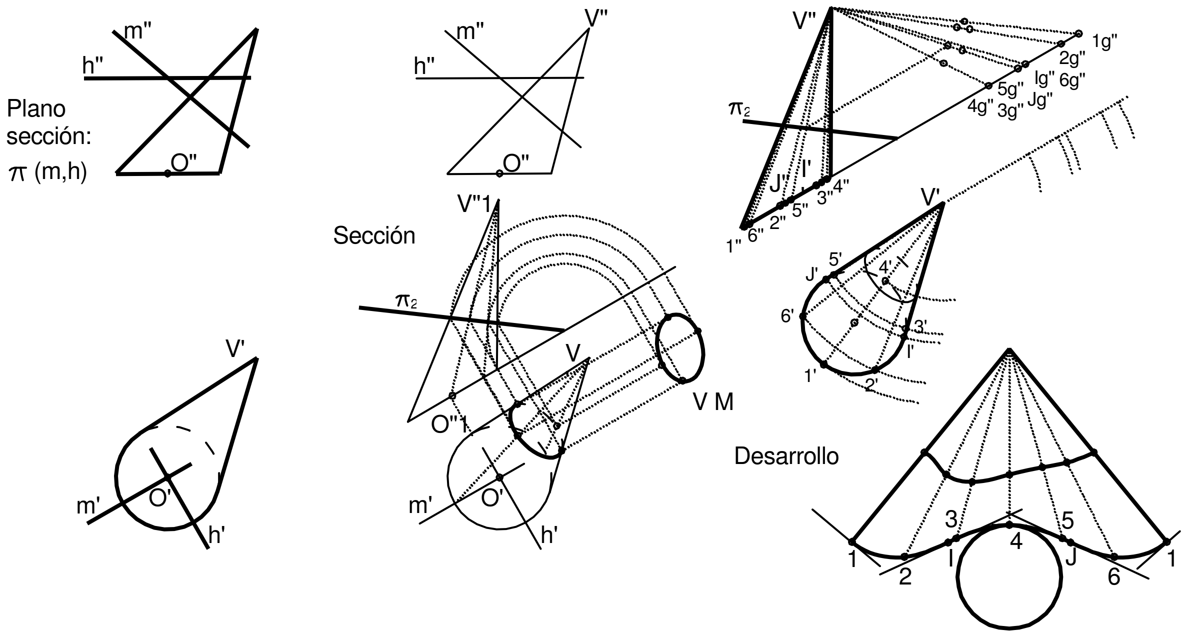


Figura 5: Sección con plano π(m,h) y desarrollo de un cono y transformada de la sección.

Obsérvese que en la figura 4 se ha resuelto todo el ejercicio con las mismas vistas de la pirámide. En la figura 5, para no sobrecargar las vistas del cono, se ha resuelto la sección y la VM en una figura, y el desarrollo en otra repetida.

- Sección por plano en prisma y cilindro. Desarrollo.

La sección con un plano se realiza siguiendo los mismos pasos que en la pirámide o cilindro, tanto si es proyectante como si es oblicuo.

Para obtener el desarrollo, se ha de realizar una **sección recta**, es decir por plano perpendicular a las generatrices, para a partir de ésta llevar las aristas (figura 6). Si el prisma o cilindro no tiene sus aristas paralelas al vertical, se hace un cambio de plano vertical y se traza el plano perpendicular a las aristas, que ya es proyectante.

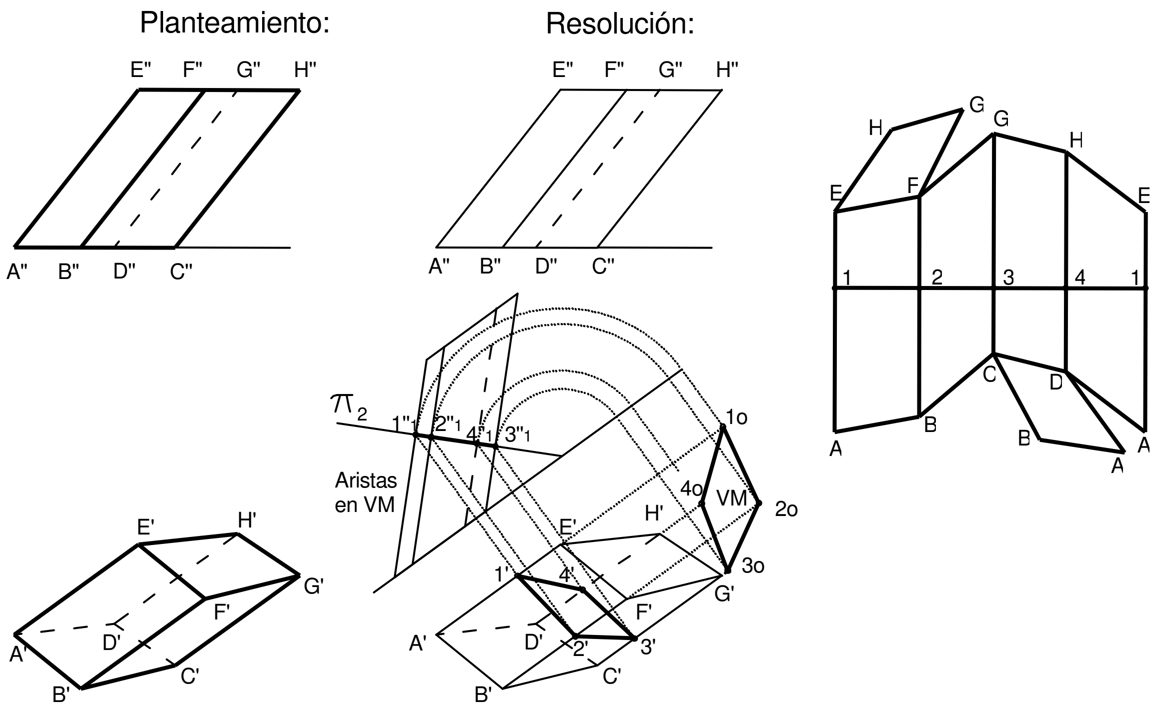


Figura 6: Desarrollo del prisma mediante una sección recta.

Planos tangentes.

Los planos tangentes a un cono o cilindro, lo son a lo largo de una generatriz. Se van a estudiar dos casos: que el plano pase por un punto de la superficie (una solución) y por un punto exterior a ella (dos soluciones).

- Plano tangente por un punto de la superficie (figura 7). Los pasos a seguir son:

1º) Por $P \in$ superficie, se traza generatriz g.
2º) $g \cap$ directriz ($\in \pi$) = 1
3º) Por 1 se traza tangente t a la directriz (que es perpendicular al radio que pasa por 1). El plano tangente α es $\alpha(g,t)$, siendo g la generatriz de tangencia.

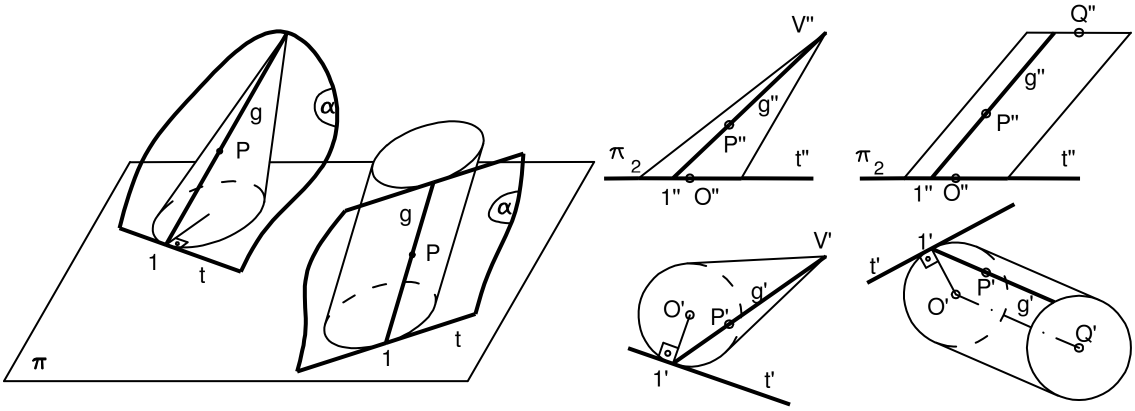
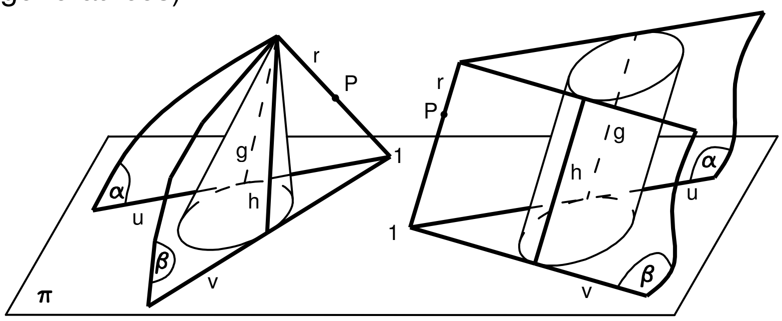


Figura 7: Plano tangente por un punto de la superficie. Visualización perspectiva y resolución diédrica.

- Plano tangente por un punto exterior a la superficie (figura 8). Los pasos a seguir son:

1º) Se traza la recta r que une v con P (en el caso del cilindro, como V está en el infinito, es paralela a las generatrices).
2º) $r \cap \pi = 1$
3º) Desde 1, se trazan tangentes u, v, a la directriz (que está en el plano π).
Los planos solución son dos α(r, u, g) y β(r, v, h). Las generatrices g, h, son las de tangencia del plano con el cilindro.



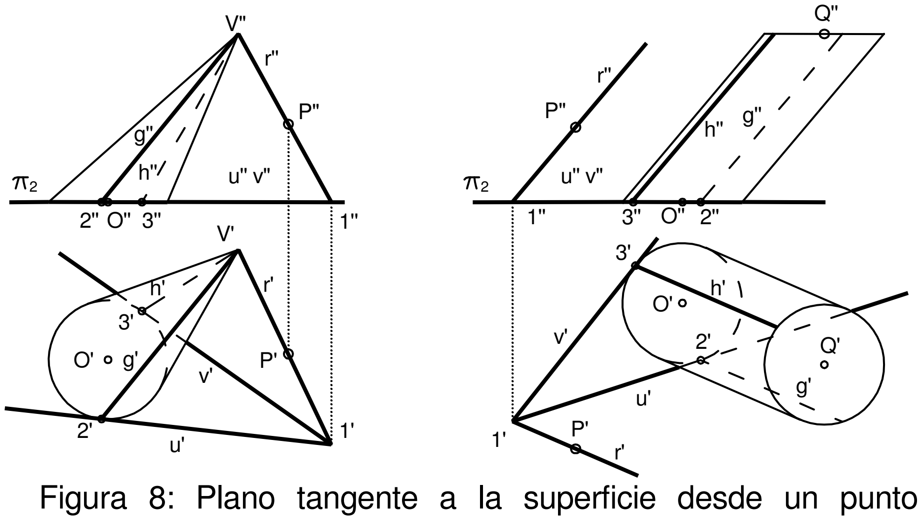


Figura 8: Plano tangente a la superficie desde un punto exterior. Visualización perspectiva y resolución diédrica.

Desarrollo del cono y cilindro de revolución.

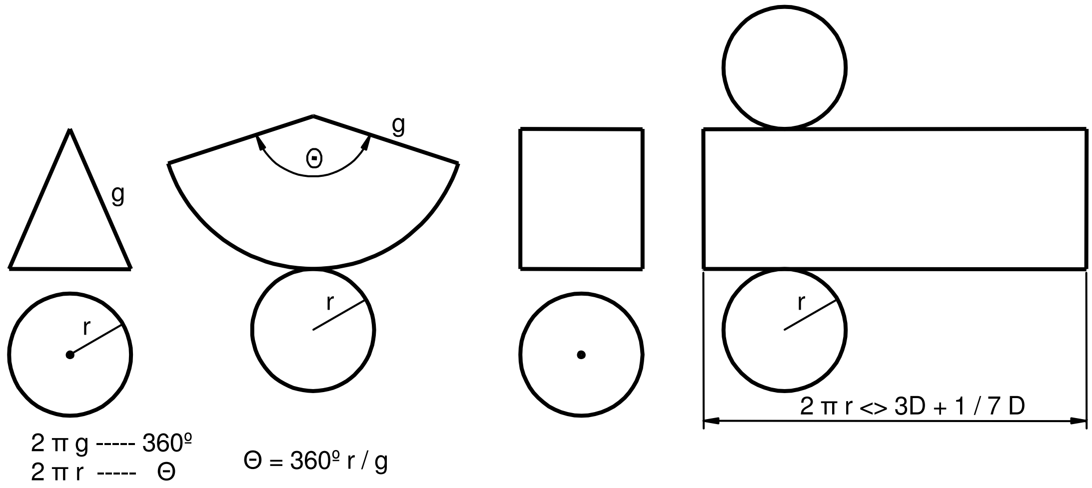


Figura 9: Desarrollo del cono y cilindro de revolución.

Complementos.

Las secciones planas del cono son elipse, hipérbola y parábola (figura 10), según el ángulo que forme el plano con el eje del cono, como se indicó en el tema preliminar. En el cono, las secciones planas son elipse o dos rectas.

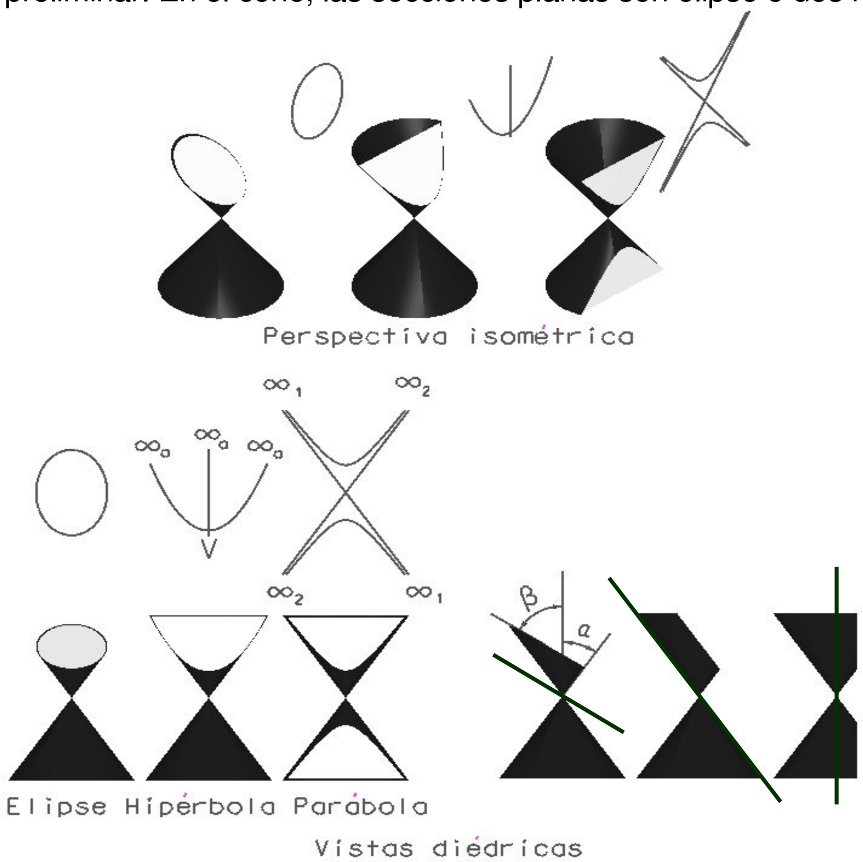


Figura 10: Secciones cónicas: elipse, hipérbola y parábola.

Estas secciones y su verdadera magnitud se pueden obtener por homología (en el cilindro y prisma por afinidad).

Homología.

“Dícese que entre dos figuras espaciales existe una homografía, cuando se corresponden punto a punto, recta a recta y plano a plano, de tal modo que a dos elementos incidentes de una figura correspondan elementos incidentes en la otra” (Puig Adam p.172).

La homología en el espacio es un caso particular de la homografía, en la que se verifica para secciones de una misma radiación (figura 11):
1º. Los puntos homólogos A-(A), B-(B), C-(C) están alineados con un punto fijo (Ch), centro de la homología (Vértice de la radiación que se corta).
2º Las rectas homólogas, se cortan en puntos 3 y 4 de una recta Eh, eje de la homología (intersección de los planos en que están contenidas ambas formas).

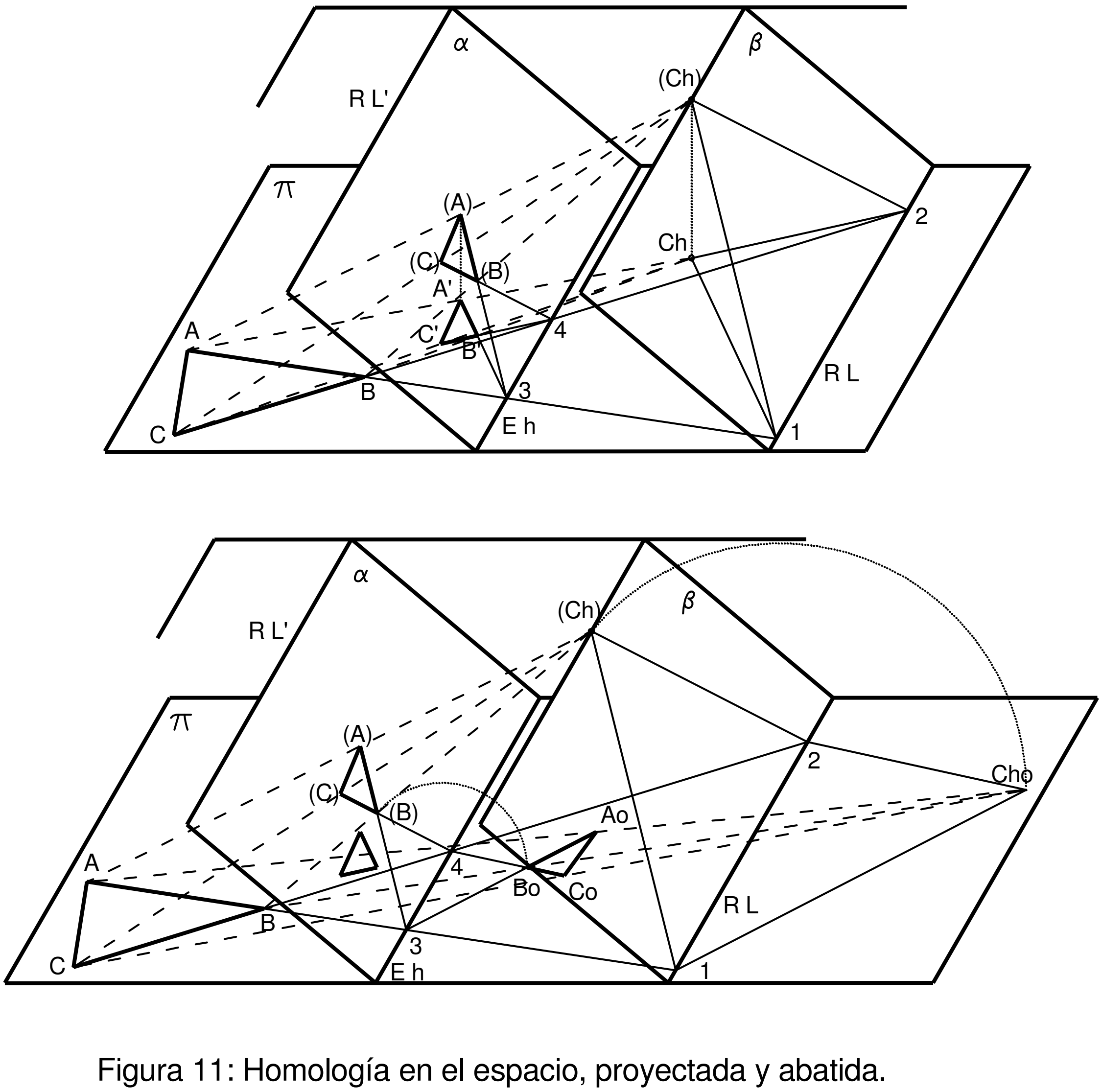
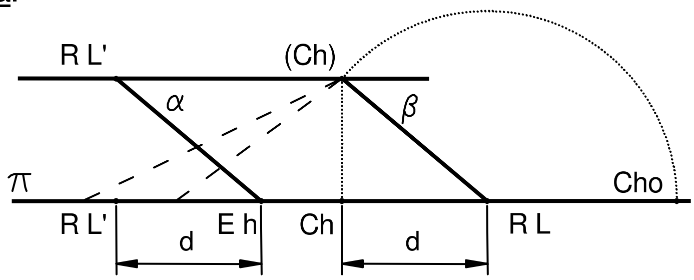


Figura 11: Homología en el espacio, proyectada y abatida.

La proyección paralela (ortogonal u oblicua) sobre π del conjunto del espacio representado en la figura 11, sitúa (Ch) en Ch y (A), (B), (C) en A’, B’, C’, que siguen siendo homólogos con A, B, C, con el mismo eje Eh y centro de homología Ch, es decir, según Poncelet, se ha pasado de la homología en el espacio a la homología plana.

Análogamente, <u>el abatimiento sobre π</u> de los planos α y β, sitúa (Ch) en Cho y (A), (B), (C) en Ao, Bo, Co, que siguen siendo homólogos con A, B, C, con el mismo eje Eh y centro de homología Cho, que es también una <u>homología plana</u>.



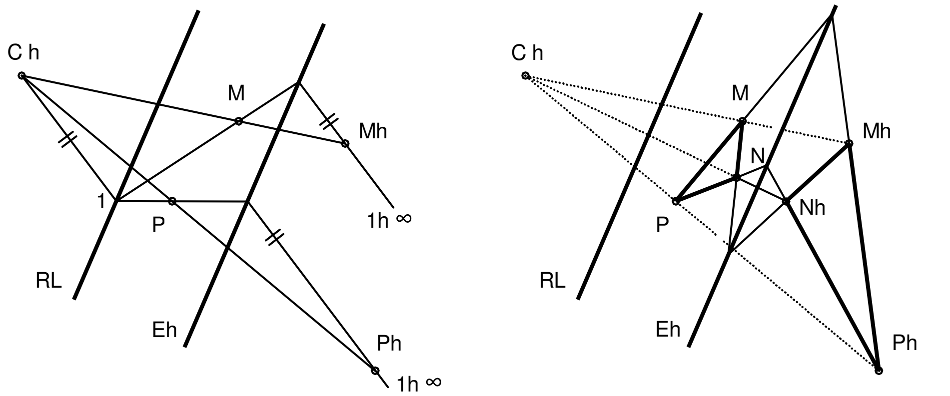


Figura 12: Homología plana.

Rectas límite RL y RL': es el Lugar Geométrico de los puntos homólogos de los del infinito. Son // al eje Eh y la distancia Ch-RL = Eh-RL'.

Formas de definir una homología: Es necesario conocer tres elementos
a) Eh, Ch y dos puntos homólogos P-Ph.
b) Eh, Ch y RL.
c) La dirección de Eh, y dos pares de puntos homólogos.

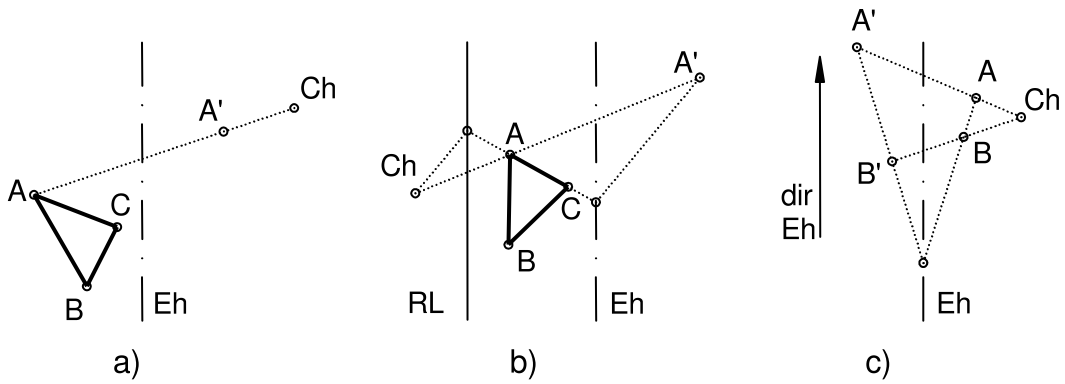


Figura 13: Formas de definir una homología.

Homologías particulares: Afinidad, homotecia, simetría, …

Afinidad: La homología de centro impropio (en el infinito) es una afinidad y la dirección d=Ch∞ es la dirección de afinidad. Las rectas límite se encuentran en el infinito. Y cumple que Ao-A/Ao-A'= Bo-B/Bo-B' = ... =K. Si K = -1, entonces Ao-A=Ao-A' y es una simetría oblicua u ortogonal según sea la dirección de afinidad. (Véase al final del tema 3) (Figura 14).

Homotecia: Si el eje es impropio es una homotecia de centro Ch, de relación Ch-A/Ch-A'= Ch-B/Ch-B'= … = K. Si K=-1, es una simetría respecto a Ch.

Traslación: Si el centro y el eje son impropios es una traslación de dirección la de afinidad.

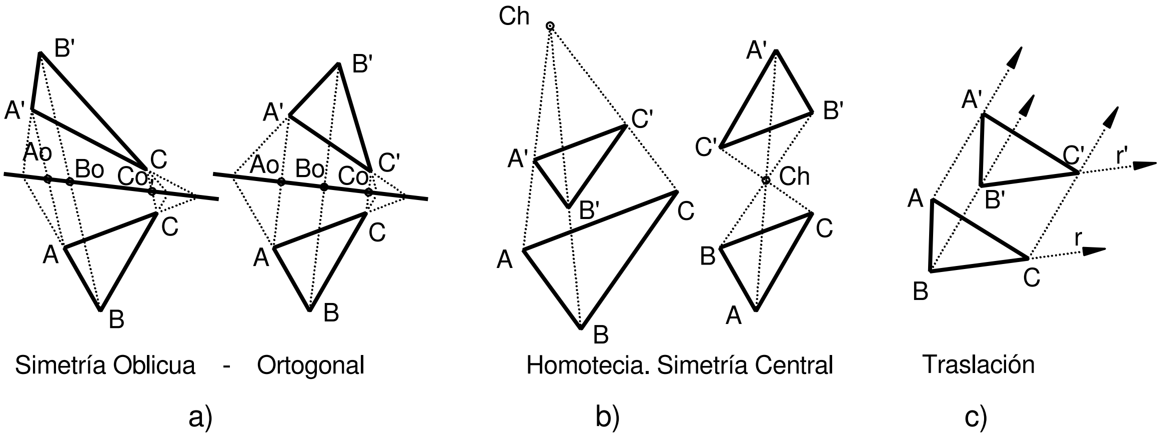


Figura 14: Homologías particulares.

Transformaciones homólogas. Aplicación en la sección plana de la pirámide.

Los elementos de la homología con los que la **directriz y la sección** son homólogas, son:
Eje = traza con π_2 del plano α sección, es una horizontal.
RL = traza con π_2 del plano β//α que pasa por el vértice V del cono o pirámide.
Ch (Centro homología)= proyección horizontal V'del vértice del cono o pirámide.

Los elementos de la homología con los que la **directriz y la V M de la sección** son homólogos, tienen el Eje y la R L coincidentes, y son:
Eje = traza con π_2 del plano α sección, es una horizontal.
RL = traza con π_2 del plano β//α que pasa por el vértice V del cono o pirámide.
Cho = es el abatido Vo del plano β.

Los datos de partida para la sección de la pirámide son: la pirámide y el plano α(r,s) (figura 15).

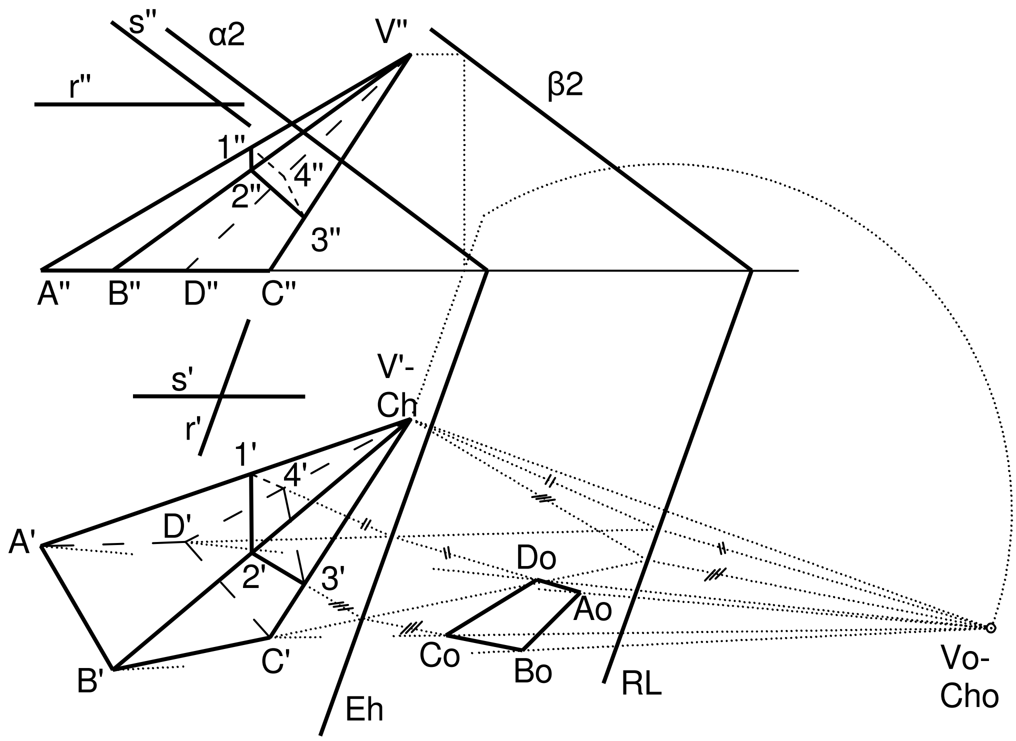


Figura 15: Sección plana de la pirámide y VM de la sección.

Transformación homóloga de la circunferencia. Aplicación a las secciones planas de cónicas.

Se analizan los tres casos por separado,
1º. La sección elíptica, en la que la RL no corta a la base o directriz.
2º. La sección parabólica, en que la RL es tangente a la base.
3º. La sección hiperbólica, en que la RL corta a la base.

Caso 1º: Elipse.

Los diámetros conjugados de la elipse sección se obtienen (figura 16):
1. Desde un punto 2 de la RL se trazan tangentes a la base por T1 y T2.
2. Se unen T1 y T2 y se obtiene el punto 1 en la RL desde el que se trazan tangentes por T3 y T4 a la base. La recta T3-T4 pasa por 2. Los homólogos de T1, T2, T3 y T4 son los diámetros conjugados de la sección.
3. Dado que los puntos 1 y 2 están en la RL, sus homólogos 1h y 2h están en el infinito. Es decir, las rectas que parten de un punto de la RL, tienen sus homólogas paralelas respectivamente a las rectas Ch-1 y Ch-2 por la intersección con el Eh (figuras 12 y 16).
4. La obtención de la VM se obtiene de forma análoga, siendo Cho el vértice de la homología y las rectas homólogas son // a 1-Cho y 2-Cho respectivamente.

Caso 2º: Parábola.

1. En este caso, al ser tangente la recta límite RL a la circunferencia de la base o directriz, dicho punto 1 tiene su homólogo en el infinito, por lo que Ch-1 es paralelo al eje de la parábola (figura 16).
2. Se traza perpendicular a Ch-1 y se obtiene el punto 2 en la RL, desde el que se traza la otra tangente a la directriz por T.

El homólogo de T es el vértice de la parábola Th, por la que se traza la // a Ch-1, que es eje de la misma.

Puntos de la parábola son los de corte del eje Eh con la directriz. Se pueden obtener otros puntos de la parábola como el Ph.
3. La VM de la sección por homología se obtiene siguiendo los pasos antes indicados siendo los puntos de la RL el 1 y 3, el punto de tangencia es T3 y el vértice de la parábola abatida es T3h.

Es <u>importante</u> tener en cuenta que la parábola en VM no tiene los mismos elementos que la de la sección, es decir, el eje y el vértice de la parábola al abatirlos no se corresponden con el de la abatida.

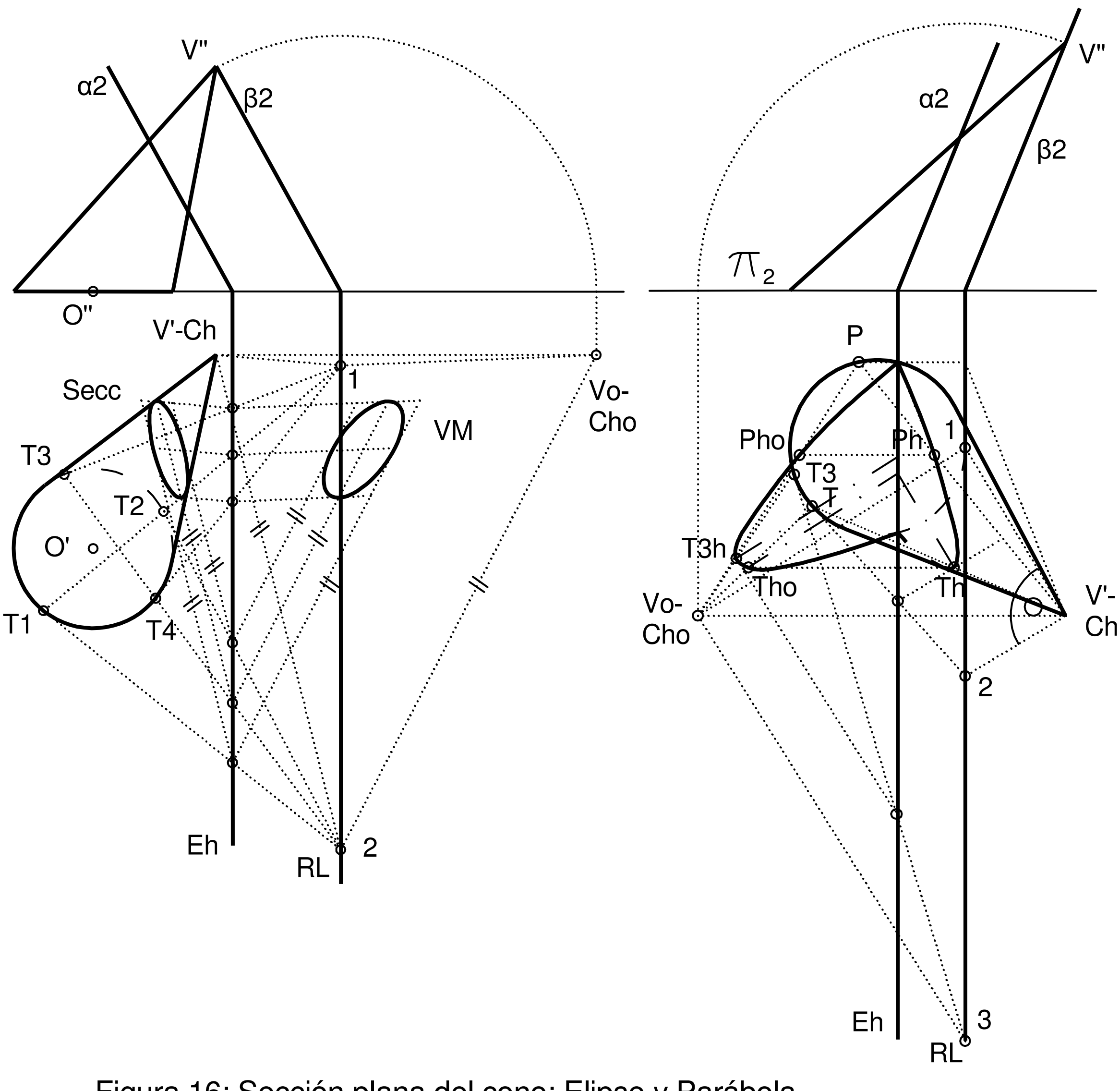


Figura 16: Sección plana del cono: Elipse y Parábola.

Caso 3º: Hipérbola.

1. Para que la sección resulte una hipérbola (figura 17), la recta límite RL corta en 1-2 a la directriz. Se trazan tangentes a la directriz por los puntos de corte 1-2, que se cortan en Q. Las rectas homólogas a Q-1 y Q-2 son las asíntotas de la hipérbola sección.
2. Se traza la bisectriz de las asíntotas, que es el eje de la hipérbola, su recta origen es la recta Q-3, la cual corta a la directriz en los puntos 4 y 5. Los puntos homólogos de 4-5 son los vértices de la hipérbola 4h-5h.

Q-Qh-Ch y Q-Qho-Cho están alineados.

Se puede obtener otro punto homólogo P-Ph, para facilitar la construcción de la hipérbola.
3. La sección en VM es otra hipérbola, que en el abatimiento conserva las asíntotas, pero no el eje y sus vértices 6ho y 7ho, que se obtienen como en la sección.

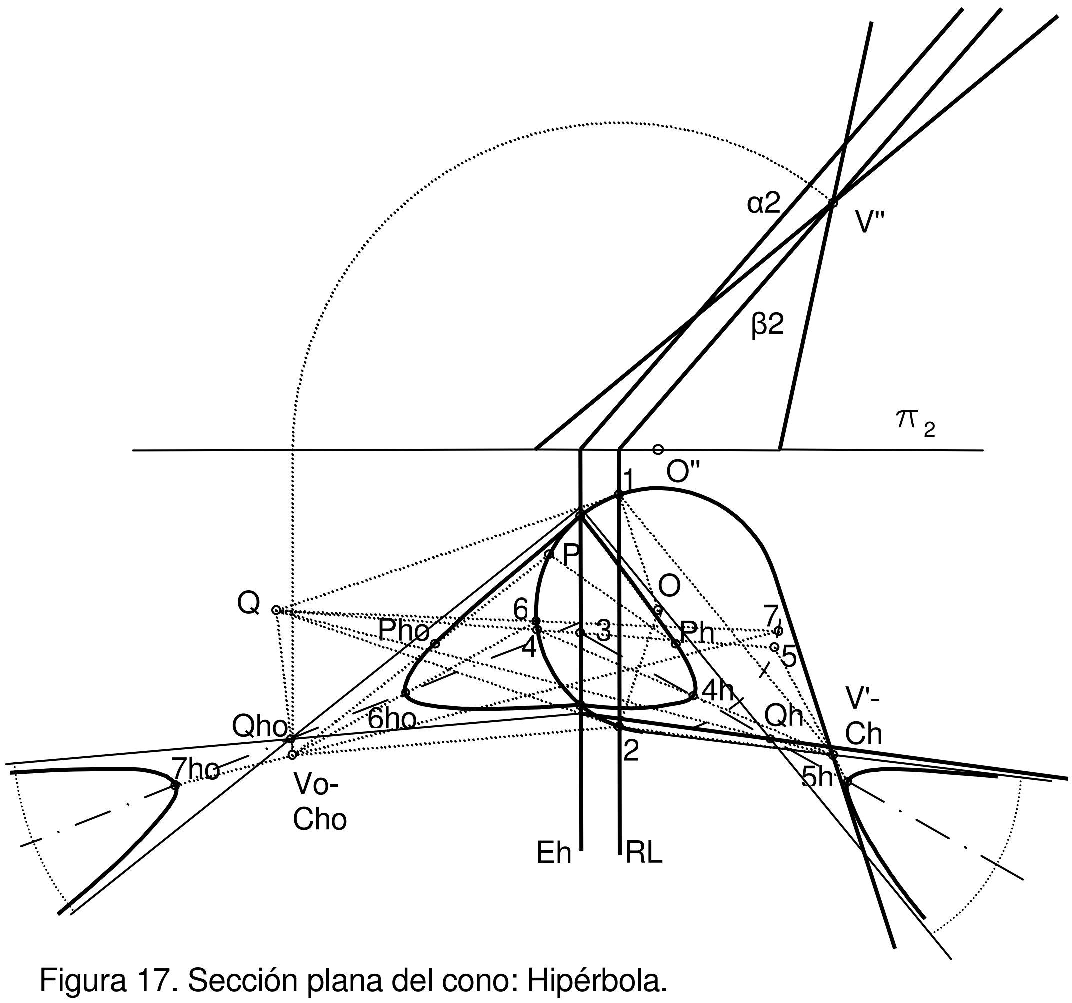


Figura 17. Sección plana del cono: Hipérbola.

En la figura 18 se muestra la misma sección del cono, pero situado de forma que el plano α sección está en una posición cualquiera. El plano está definido por sus trazas α_1 α_2, o lo que es lo mismo α(r,s).

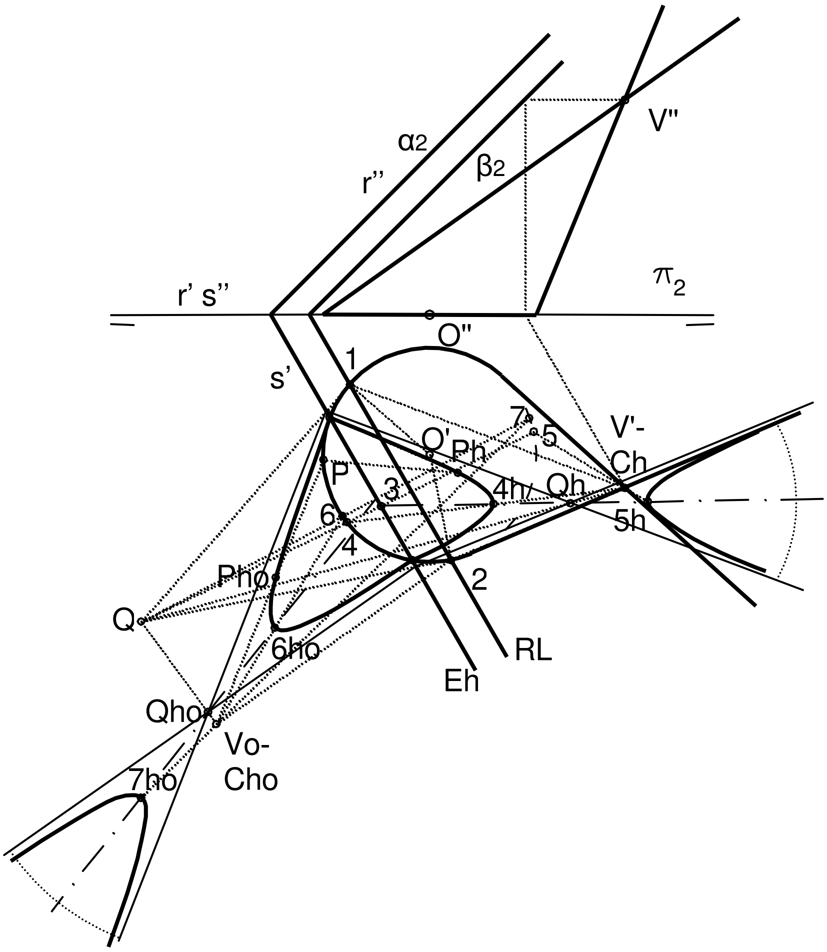


Figura 18. Sección plana del cono (por plano α cualquiera): Hipérbola.

Transformación afín. Aplicación a la sección plana del prisma y cilindro.

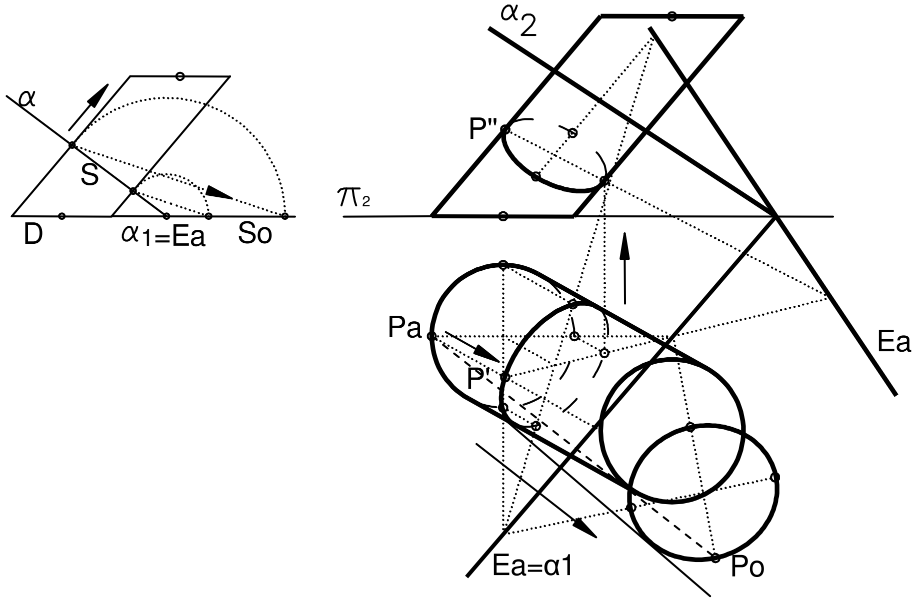


Figura 19: Sección plana del cilindro por afinidad.

La sección plana del cilindro se resuelve por afinidad (figura 19) teniendo en cuenta las condiciones siguientes:
- Es preciso tener un punto de la sección, como el P’ P’’ que se corresponda con el Pa de la directriz.
- La directriz y la proyección horizontal de la sección es una afinidad definida por el eje Ea=α1, y los puntos afines Pa-P’.
- La directriz y la Verdadera Magnitud de la sección es una afinidad definida por el eje Ea=α1, y los puntos afines Pa-Po, en el que Po es el abatido del P.
- La proyección horizontal y la vertical es una afinidad definida por el eje Ea, lugar geométrico de los puntos dobles del plano α, y los puntos afines P’-P’’. Esto es válido para todo par de vistas de una figura plana.