

ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

HOJA PROBLEMAS TEMA 1 - MATRICES Y DETERMINANTES

EJERCICIO 1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -3 & -7 \\ 7 & 2 & -3 & -8 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,

(a) Calcula el rango de A.

(b) Calcula la forma escalonada reducida de A.

EJERCICIO 2. Calcula la inversa de las siguientes matrices por el método de eliminación de Gauss:

$$a)A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad c)C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b)B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad d)D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 3. Calcular el rango de las siguientes matrices

$$a)A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -17 & -1 \end{pmatrix}$$

$$b)B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 8 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$c)C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 4. Calcula los determinantes de las siguientes matrices desarrollando por una fila o por una columna.

$$a)A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b)B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 5. Calcula por triangulación el valor de los siguientes determinantes:

$$a) |A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 10 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \text{ (Sol} = -7) \text{)}$$

$$b) |B| = \begin{vmatrix} 4 & -7 & 9 & 1 \\ 6 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & 6 & -3 & 3 \\ 0 & 7 & 4 & -1 \end{vmatrix} \text{ (Sol} = -1344)$$

$$c) |C| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 8 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 0 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \text{ (Sol} = -1.100)$$

EJERCICIO 6. Dados los siguientes pares de matrices analizar si son equivalentes por filas

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 7. Despejar la matriz X en la ecuación $3X - B^T = AX$, y calcular.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 8. Calcular la matriz X en la ecuación matricial $AXB=C$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 9. Hallar las matrices X e Y que verifican el sistema:

$$AX + BY = C$$

$$AX = Y$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 10. Calcular la forma escalonada reducida por filas y la matriz de paso P

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\text{EJERCICIO 11. Dada la matriz } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha & 0 \\ 2 & 4 & \alpha & 1 \\ 2 & 3 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Calcula el rango en función del parámetro
- Para $\alpha = 2$ calcula la forma escalonada reducida de la matriz A

EJERCICIO 12. Despeja X de las siguientes ecuaciones reduciendo al máximo posible y suponiendo que las matrices que intervienen son todas cuadradas del mismo orden y poseen matriz inversa:

$$(a) 5XA + 2I - 6B = C$$

$$(b) A(X + B) = CX$$

EJERCICIO 13. Calcular la inversa de la siguiente matriz utilizando el método de Gauss

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 14. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

encontrar una matriz regular Q tal que $QA=B$

EJERCICIO 15. Hallar el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & -1 & 2 & 8 \\ 3 & 8 & 7 & 0 & 4 & 11 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 16. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- (a) Calcular la forma escalonada reducida de A
 (b) Hallar la matriz de paso P tal que PA=H. Siendo la H la forma escalonada reducida del apartado anterior.
 (c) Determinar el rango de A

EJERCICIO 17. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 & -4 \\ 5 & 1 & 4 & 11 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

- (a) Calcula la inversa de la matriz A
 (b) Calcula el determinante de la matriz A

EJERCICIO 18. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Calcula la matriz regular P tal

que $P \cdot A = H$

EJERCICIO 19. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, resolver la ecuación matricial $XB(A + A^2) - (XB - B^2)A - B^2A = A$

EJERCICIO 20. Sean A y X matrices simétricas, despejar X

$$(A^t X^t)^{-1} - (X^t A^{-1})^{-1} + (X^{-1} A^t)^t = I$$

EJERCICIO 21. Dada la matriz A, hallar la forma escalonada por filas.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & -2 \\ 5 & -6 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 22. Simplifica la siguiente expresión, si A y B matrices simétricas

$$(BA)^t + 2A^t B - (BA^t)^t - AB$$

EJERCICIO 23. Calcular el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro

$$a) A = \begin{pmatrix} m-2 & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2(m+1) & m+1 \end{pmatrix}$$

$$b) B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -a \\ 2 & 6 & -2a \\ 1 & 3 & a+1 \end{pmatrix}$$

$$c) C = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$