ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

HOJA PROBLEMAS TEMA 3 - ESPACIOS VECTORALES

EJERCICIO 1. Sabiendo que el conjunto de vectores $\{(1,2,3,0),(-3,1,5,0),(6,-2,-10,0),(-1,-1,4,5)\}$ es sistema generador del subespacio S de $\mathbb{R}^4$, determinar una base de S y la dimensión de S.

EJERCICIO 2. Considere las siguientes bases de $\mathbb{R}^2$: $B=\{(1,2),(2,-3)\}$ y $B'=\{(2,-1),(3,1)\}$
Sabiendo que el vector v tiene coordenadas (15,10) en la base B, calcule sus coordenadas respecto a la base B'

EJERCICIO 3. En $\mathbb{R}^3$se consideran los siguientes subespacios $S_1=\{(1,0,-1),(1,-1,0)\}$y $S_2=\{(2,1,0),(-2,0,1)\}$. Hallar:

(a) Una base y la dimensión de S_1+S_2. Escribir dicha base en paramétricas.

(b) Una base y la dimensión de $S_1\cap S_2$

EJERCICIO 4. Dadas las bases $B_1=\{(1,0),(0,1)\}$ y $B_2=\{(2,1),(-1,3)\}$hallar las coordenadas en base B_2 del vector v=(14,7) utilizando la matriz de cambio de base.

EJERCICIO 5. Sean S y T subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$generados por $S=\{(1,0,1,1),(1,-1,-1,0),(0,1,2,1)\}$y $T=\{(x,y,z,t)/x-z-t=0,y+z=0\}$
(a) Obtener una base y dimensión de S
(b) Obtener una base y dimensión de T
(c) Obtener una base y la dimensión de $S+T$. ¿Están S y T en suma directa? (Demostrarlo sin calcular $S\cap T$)
(d) Obtener una base y la dimensión de $S\cap T$

EJERCICIO 6. Sean S y T subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$generados por $S=\{(x,y,z,t)/x-y=0\}$y $T=\{(1,1,2,1),(2,3,-1,1)\}$
(a) Obtener una base del subespacio $S+T$
(b) Estudiar si la suma S+T es directa
(c) Si la suma anterior no es directa, calcular una base del subespacio $S\cap T$

EJERCICIO 7. Dado el subespacio $S=\left\{(x,y,z,t)\epsilon\mathbb{R}^4/-x-y+z=0,-x-y+t=0\right\}$ y el subespacio T generado por los vectores (1,0,0,3), (2,0,1,4), (0,0,-1,2) y (-1,0,-2,1)

(a) Determinar una base de la suma de los subespacios S y T y explica si la suma es directa sin calcular la intersección.

(b) Determinar una base de la intersección de S y T

(c) Calcular las coordenadas del vector (2,0,3,0) en una base de S

EJERCICIO 8. En el espacio vectorial de R^4 , se consideran los subespacios dados en forma paramética:
$V1=(\alpha,\beta,-\beta,\gamma)$, $V2=(\beta,\alpha,\alpha,-\beta)$

(a) Hallar una base y dimensión de V1 y de V2
(b) Hallar las ecuaciones implícitas de V1 y de V2.
(c) Hallar una base de V1+V2 y de V1$\bigcap$V2 , y ver si la suma es directa.

EJERCICIO 9. Sean M y N dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$, siendo M el subespacio generado por los vectores (-3,1,0), (1,0,1) y (-10,2,-4) y $N=\left\{(x,y,z)\epsilon R^3/2x-y-z=0\right\}$
(a) Halla una base y dimensión de M y sus ecuaciones implícitas. ¿El vector (4,-1,1) pertenece a M?
(b) Halla una base y dimensión de N
(c) Halla una base de M$\bigcap$N
(d) Deduce la dimensión de M+N

EJERCICIO 10. Sean U y W dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$, siendo $U=\left\{(x,y,z,t)\epsilon R^4/y+z+t=0\right\}$ y $W=\left\{(x,y,z,t)\epsilon R^4/x+y=0,z=2t\right\}$
(a) Halla una base y dimensión de U y de W
(b) Halla una base de U+W
(c) Halla una base de U$\bigcap$W
(d) Sean S y T dos subespacio de $\mathbb{R}^5$, siendo dim S=3 y dim T= 1 ¿qué posibilidades hay para las dimensiones de S+T y de S$\bigcap$T ?

EJERCICIO 11. Dado el subespacio en $\mathbb{R}^4$ S={(-a+b,2c+b-a,c+d,-d)}, y el subespacio $T=\left\{(x,y,z,t)\epsilon\mathbb{R}^4/-x+y+2z=0, x-z+t=0\right\}$

(a) Deduce la dimensión de T sin calcular la base correspondiente.
(c) Hallar la forma implícita del subespacio S.
(b) Dar una base de S+T
(c) Razonar la dimensión de $S\cap T$ sin cacularlo. Explicar si S y T están en suma directa
(d) Dar una base de $S\cap T$
(e) Ver si el vector (1,5,5,-3) pertenece o no al subespacio T

EJERCICIO 12. Considerar en $\mathbb{R}^2$ la base canónica y la base $B=$ {(0,1),(-2,-1)}

(a) Hallar la matriz de cambio de la base canónina a B
(b) Hallar la matriz de cambio de la base B a la base canónica
(c) Utiliza algún resultado de los apartados anteriores para cacular las coordenadas en B del vector (-4,1)
(d) Utiliza algún resultado de los apartados anteriores para calcular el vector que tiene como coordenadas en la base B (-1,5)

EJERCICIO 13. En $\mathbb{R}^3$se consideran los subespacios, siendo $U=\left\{(x,y,z)\epsilon R^3/x-2y+z=0\right\}$ y $V=\{(3,-1,-1),(1,-1,1),(1,1,-3)\}$
(a) Halla una base de U$\bigcap$V y U+V
(b) Calcular las escuaciones cartesianas de U$\bigcap$V y paramétricas de U+V