SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Los sistemas de ecuaciones lineales tienen muchas aplicaciones en todos los campos y ciencias y ya desde a. C. se tenían métodos para resolver los sistemas. Estudiaremos sobre todo el método llamado de eliminación gaussiana o de Gauss, porque es la base de los procedimientos que se utilizan para resolver un sistema con el ordenador y asimismo para el estudio de los temas que siguen, Espacios Vectoriales y Aplicaciones Lineales.

2.1 INTRODUCCIÓN Y DEFINICIONES

El término lineal proviene de línea recta que es la expresión más simple de una ecuación y que puede escribirse de la forma

$$a_1 \cdot x + a_2 \cdot y = b$$

donde a_1, a_2 (***coeficientes***) y b (***término independiente***) son ctes. tal que a_1 y a_2 no son simultáneamente cero. Dicha ecuación se llama ***ecuación lineal de incógnitas x e y***.

En general una ecuación lineal es cualquiera de la forma

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots\dots + a_n \cdot x_n = b$$

donde las variables x_1, x_2, ... x_n (***incógnitas***) aparecen elevadas a la primera potencia y no son funciones trascendentes (lnx, cosx, e^x etc.) ni existen productos, ni raíces de las variables.

A menudo tenemos necesidad de resolver varias ecuaciones lineales al mismo tiempo, una colección finita de **m** ecuaciones lineales con **n** incógnitas x_1, x_2, ... x_n se llama un ***sistema de ecuaciones lineales o sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas:***

$$\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots\dots + a_{3n}x_n = b_3 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}$$

donde los coeficientes y términos independientes pertenecen en nuestro caso a **$\mathbb{R}$.**

Ejemplo 2.1

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= -4 \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Sistema lineal de dos ecuaciones con tres incógnitas, donde las variables vienen relacionadas con operaciones de suma y resta.

Ejemplo 2.2

$$\begin{aligned} 3x - \ln y &= 1 \\ -2x + 4e^y &= -2 \end{aligned}$$

Sistema no lineal, ya que las ecuaciones tienen funciones trascendentes ($\ln y$, e^y), es un sistema de ecuaciones sin más.

Ejemplo 2.3

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 0 \\ 3x + y - 3z &= 0 \\ -2x + 3y - 4z &= 0 \end{aligned}$$

Sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas, términos independientes todos nulos (***sistema homogéneo***).

Ejemplo 2.4

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 2 \\ -3x + \frac{2}{y} - z &= -1 \\ y + 2z &= 4 \end{aligned}$$

No es un sistema lineal, pues aparece una incógnita dividiendo.

Sistema en forma matricial

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{A \cdot X = B}$$

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se llama ***matriz de los coeficientes***

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix}$$ ***matriz de las incógnitas*** **y** $$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_m \end{pmatrix}$$ ***matriz de términos independientes.***

También se utilizará

$$\mathbf{A}'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ..... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ..... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ..... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & ..... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ ***matriz ampliada.***

Toda matriz representa un sistema lineal y todo sistema lineal se puede representar por su matriz ampliada.

Ejemplo 2.5

Dada la matriz $D=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & -4 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -7 & 12 \end{pmatrix}$ el sistema asociado es $\begin{cases} \quad\quad 1y-3z= & 5 \\ 1x \quad -4y \quad\quad = & -1 \\ 3x \quad +2y-7z= & 1 \end{cases}$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & -7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 12 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A\cdot X=B$$

Ejemplo 2.6

El sistema

$$\begin{matrix} 3x+2y-4z=-7 \\ -2x-5y\ +z\ =\ 5 \end{matrix}$$ la matriz asociada es $F=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 & -7 \\ -2 & -5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & -5 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A\cdot X=B$$

Se llama **solución** de un sistema lineal a una colección de valores que sustituidos en las incógnitas satisfacen simultáneamente las ecuaciones (**comprobación**).

Ejemplo 2.7

$$\begin{cases} 2x-3y=1 \\ -x+2y=3 \end{cases} \quad \text{Solución única} = \begin{cases} x=11 \\ y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cdot(11)-3\cdot(7)=1 \\ -11+2\cdot(7)=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x-2y+3z=0 \end{cases} \quad \text{Infinitas soluciones} = \begin{cases} x=7\alpha \\ y=5\alpha \\ z=\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \{(x,y,z)=(7,5,1)\ \alpha \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}$$

$$\text{Para } \alpha=1 \Longrightarrow \mathbf{(x, y, z) = (7, 5, 1)} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cdot(7)-3\cdot(5)+1=0 \\ 7-2\cdot(5)+3\cdot(1)=0 \end{cases}$$

Resolver un sistema lineal significa encontrar todas las posibles soluciones.

En orden a las soluciones podemos clasificar los sistemas en:

$$\textbf{\textit{Compatibles:}}\ \textit{si tienen solución} \begin{cases} \textbf{determinado} \text{ si tiene una única solución} \\ \textbf{indeterminado} \text{ si tiene infinitas soluciones} \end{cases}$$

Incompatibles: *si no tienen solución.*

Antes de resolver un sistema podemos averiguar si es compatible o no, para ello utilizamos el ***Teorema de Rouché-Fröbenius***

Un sistema puede ser:

$$\begin{cases} \textbf{Compatible} \Leftrightarrow \mathbf{rg(A)=rg(A')} \Leftrightarrow \begin{cases} \textbf{determinado} \Leftrightarrow \mathbf{rg(A)=rg(A')=n^o} \textbf{ de incógnitas} \\ \textbf{indeterminado} \Leftrightarrow \mathbf{rg(A)=rg(A')<n^o} \textbf{ de incógnitas} \end{cases} \\ \\ \textbf{Imcompatible} \Leftrightarrow \mathbf{rg(A)\neq rg(A')} \end{cases}$$

2.2 RESOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES

2.2-1 Métodos directos

Aquellos que con un número fijo de pasos se llega a la solución.

I)) Método de Gauss (Eliminación gaussiana)

Antes de encontrar las soluciones de un sistema, observamos que ciertos sistemas de forma triangular o casi triangular (la matriz ampliada del sistema está escalonada por filas) son más sencillos de resolver que otros, por ejemplo

$$\begin{aligned} x+4y-2z &= 3 \\ y+2z &= 10 \\ 3z &= 12 \end{aligned}$$

Con el proceso de ***sustitución hacia atrás***, en el cual, primero se resuelve la última ecuación en z: $z=\dfrac{12}{3}=4$ y después subiendo a la anteúltima, sustituyendo los valores encontrados en la ecuación anterior, se halla y: $y = 10 - 2z = 10 - 2(4) = 2$, y así, llegamos a la primera ecuación que resolvemos en x:

$$x = 3 - 4y + 2z = 3 - 4(2) + 2(4) = 3$$

Nuestro objetivo es por lo tanto, convertir un sistema lineal general a la forma triangular o casi triangular, para después resolver con la sustitución hacia atrás.

Un sistema lineal puede reducirse a la forma triangular o casi triangular (forma escalonada) aplicando operaciones elementales sobre las ecuaciones, las cuales corresponden a operaciones elementales sobre las filas en la matriz ampliada, de forma que estas operaciones no influyen en la solución del sistema ***(estos sistemas que tienen las mismas soluciones se llaman sistemas equivalentes)***

Las correspondencias serían:

Operación elemental en una matriz	**Operación elemental en un sistema**
Cambiar dos filas	Cambiar dos ecuaciones
Multiplicar una fila por una cte. K≠0	Multiplicar una ecuación por una cte. K≠0
Sumar una fila multiplicada por una cte. K a otra fila	Sumar una ecuación multiplicada por una cte. K a otra ecuación

Ejemplo 2.8

Sea el sistema $\begin{cases} 2x - y + 3z = -1 \\ 2x + 4y - 2z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$ Sistema equivalente $\begin{cases} 2x + 4y - 2z = 5 \\ 2x - y + 3z = -1 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Hemos cambiado las ecuaciones de lugar.

$$\text{Sea el sistema} \begin{cases} 2x - y + 3z = -1 \\ 2x + 4y - 2z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \text{Sistema equivalente} \begin{cases} -2x + y - 3z = 1 \\ 2x + 4y - 2z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Hemos multiplicado por (–1) la primera ecuación.

$$\text{Sea el sistema} \begin{cases} 2x - y + 3z = -1 \\ 2x + 4y - 2z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \text{Sistema equivalente} \begin{cases} 2x - y + 3z = -1 \\ 5y - 5z = 6 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

Hemos sumado a la 2ª ecuación la 1ª multiplicada por (–1)

El orden de elección de las operaciones elementales sobre los sistemas es el que marca la sencillez de las operaciones y un determinado razonamiento del trabajo de esas operaciones en la búsqueda del resultado.

Ejemplo 2.9

Resolver por eliminación gaussiana el sistema

$$\begin{aligned} 3x + 3y + 8z &= 1 \\ x + 4y - 4z &= 3 \\ 3y + 2z &= 7 \end{aligned}$$

En principio el cambio de ecuaciones sería la 1ª por la 2ª para emplear como pivote el **1**

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 8 & 1 \\ 1 & 4 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 & 3 \\ 3 & 3 & 8 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} x + 4y - 4z &= 3 \\ 3x + 3y + 8z &= 1 \\ 3y + 2z &= 7 \end{aligned}$$

hacemos ceros debajo del primer pivote, el **1**

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 4 & -4 & 3 \\ 3 & 3 & 8 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{2,1}(-3) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 4 & -4 & 3 \\ 0 & -9 & 20 & -8 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} x+4y-4z &= 3 \\ -9y+20z &= -8 \\ 3y+2z &= 7 \end{aligned}$$

cambiamos la 2ª fila por la 3ª para facilitar hacer ceros en la 2ª columna

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 4 & -4 & 3 \\ 0 & -9 & 20 & -8 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{2,3} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 4 & -4 & 3 \\ 0 & \mathbf{3} & 2 & 7 \\ 0 & -9 & 20 & -8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} x+4y-4z &= 3 \\ 3y+2z &= 7 \\ -9y+20z &= -8 \end{aligned}$$

hacemos ceros en la 2ª columna

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 4 & -4 & 3 \\ 0 & \mathbf{3} & 2 & 7 \\ 0 & -9 & 20 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{3,2}(3) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 4 & -4 & 3 \\ 0 & \mathbf{3} & 2 & 7 \\ 0 & 0 & \mathbf{26} & 13 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} x+4y-4z &= 3 \\ 3y+2z &= 7 \\ 26z &= 13 \end{aligned}$$

rg(A) = rg(A')=nº de incógnitas⇔ Sistema compatible determinado

aplicando la sustitución hacia atrás **(x, y, z) = (–3, 2, $\mathbf{\frac{1}{2}}$)**

Ejemplo 2.10

Resolver el sistema

$$\begin{aligned} x+y+z+t &= 7 \\ x+y+\quad+2t &= 8 \\ 2x+2y+3z \quad &= 10 \\ -x-y-2z+2t &= 0 \end{aligned}$$

Cogemos el primer pivote en la matriz ampliada (procurando que sea un **1**) y hacemos ceros debajo de él. En general cuando no es un **1** el primer pivote, para anular los correspondientes elementos de la columna, se multiplica por $(\frac{-a_i}{a_{11}})$ la fila del pivote, donde a_i es el elemento que queremos anular y se suma a la fila correspondiente.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 10 \\ -1 & -1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} E_{2,1}(-1) \\ E_{3,1}(-2) \\ E_{4,1}(1) \end{cases} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} x + y + z + t &= 7 \\ -z + t &= 1 \\ z - 2t &= -4 \\ -z + 3t &= 7 \end{aligned}$$

Cogemos el 2º pivote y hacemos ceros debajo de él

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} E_{3,2}(1) \\ E_{4,2}(-1) \end{cases} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} x + y + z + t &= 7 \\ -z + t &= 1 \\ -t &= -3 \\ 2t &= 6 \end{aligned}$$

Cogemos el 3er pivote y hacemos ceros debajo de él

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{1} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{4,3}(2) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{1} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A' \Leftrightarrow \begin{aligned} \mathbf{x} + y + z + t &= \mathbf{7} \\ -\mathbf{z} + t &= 1 \\ -\mathbf{t} &= -3 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

3 = rg(A) = rg(A') ≠ nº de incógnitas = 4 ⇔ Sistema compatible indeterminado

La anteúltima ecuación tiene solución, por lo que empezaríamos la sustitución hacia atrás despejando la incógnita correspondiente, en este caso la t.

Por regla general se despejan las incógnitas que definen los ***pivotes*** *en función de las otras, quedando* ***la solución en paramétricas***

$$\begin{aligned} t &= 3 \\ z &= 2 \\ x &= 7 - y - 5 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x &= 2 - \alpha \\ y &= \alpha \\ z &= 2 \\ t &= 3 \end{aligned}$$

$$\text{Soluciones indeterminadas} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall \alpha$$

Ejemplo 2.11

Resolver el sistema

$$\begin{aligned} x + y + z + t &= 7 \\ x + y + 2t &= 5 \\ 2x + 2y + 3z &= 10 \\ -x - y - 2z + 2t &= 0 \end{aligned}$$

Cogemos el primer pivote y hacemos ceros debajo de él

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 10 \\ -1 & -1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} E_{2,1}(-1) \\ E_{3,1}(-2) \\ E_{4,1}(1) \end{cases} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} x + y + z + t &= 7 \\ -z + t &= -2 \\ z - 2t &= -4 \\ -z + 3t &= 7 \end{aligned}$$

Cogemos el 2º pivote y hacemos ceros debajo de él

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} E_{3,2}(1) \\ E_{4,2}(-1) \end{cases} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} x + y + z + t &= 7 \\ -z + t &= -2 \\ -t &= -6 \\ 2t &= 9 \end{aligned}$$

Cogemos el 3^{er} pivote y hacemos ceros debajo de él

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{1} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{4,3}(2) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{1} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \mathbf{A}' \Leftrightarrow \begin{aligned} x + y + z + t &= 7 \\ -z + t &= -2 \\ -t &= -6 \\ \mathbf{0} &= \mathbf{-3} \end{aligned}$$

La última ecuación no tiene solución, luego el sistema es incompatible.

Por Rouché-Fröbenius el rg(A) = 3 y rg(A') = 4, luego el sistema es incompatible.

Cuando hay una ecuación de la forma ***(0, 0,.....0, b) con b≠0*** *al hallar la matriz escalonada de la matriz ampliada, el sistema es* ***incompatible.***

Ejemplo 2.12

Resolver el sistema

$$x-y+3z-2t=-3$$

Nº de incógnitas(4) menos nº de ecuaciones(1) igual a nº de parámetros(3)

$$\mathbf{A'=(1\ \ -1\ \ 3\ \ -2\ \ -3)}$$

Solución paramétrica: $x=y-3z+2t-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\mu-3\lambda+2\delta-3 \\ y=\mu \\ z=\qquad\lambda \\ t=\qquad\qquad\delta \end{cases}$

Los sistemas en los que todos los términos independientes son nulos se llaman ***sistemas homogéneos****. Siempre tienen la solución (0,0,.....0) llamada* ***trivial, por lo tanto siempre son compatibles.***

Como la columna de los términos independientes no aporta nada al rango de la matriz ampliada, se puede prescindir de esa columna y sólo estudiaríamos el rango de la matriz A, luego el teorema de **Rouché-Fröbenius** se convierte para los sistemas homogéneos en:

$$\textbf{Compatible} \Leftrightarrow \begin{cases} \textbf{determinado} \Leftrightarrow \mathbf{rg(A)=n^o\ de\ incógnitas} \Leftrightarrow \text{Para A cuadrada } |\mathbf{A}|\neq 0 \\ \textbf{indeterminado} \Leftrightarrow \mathbf{rg(A)<n^o\ de\ incógnitas} \Leftrightarrow \text{Para A cuadrada } |\mathbf{A}|=0 \end{cases}$$

Nuestro interés es encontrar soluciones distintas de la trivial, es decir resolver sistemas homogéneos compatibles indeterminados.

Ejemplo 2.13

Resolver el sistema

$$\begin{aligned} x-y+z&=0 \\ x-y-z&=0 \\ 2x-y+z&=0 \\ y+z&=0 \end{aligned}$$

Cogemos el primer pivote y hacemos ceros debajo de él

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} E_{2,1}(-1) \\ E_{3,1}(-2) \end{cases} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} x-y+z&=0 \\ -2z&=0 \\ y-z&=0 \\ y+z&=0 \end{aligned}$$

Cambiamos la 2ª ecuación por la 1ª

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{2,3} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{r} x-y+z=0 \\ y-z=0 \\ -2z=0 \\ y+z=0 \end{array}$$

Hacemos ceros debajo del 2º pivote

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{4,2}(-1) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{r} x-y+z=0 \\ y-z=0 \\ -2z=0 \\ 2z=0 \end{array}$$

Hacemos ceros debajo del 3er pivote

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{4,3}(1) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{r} x-y+z=0 \\ y-z=0 \\ -2z=0 \end{array}$$

rg(A) = nº de incógnitas ⇔ Compatible determinado

3 = rg(A) = nº de incógnitas = 3 ⇔ Compatible determinado

La sustitución hacia atrás nos da la solución: **(x, y, z) = (0, 0, 0)** llamada ***solución trivial*** y que tienen todos los sistemas homogéneos.

Ejemplo 2.14

Resolver el sistema

$$\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ x-y-z=0 \\ 2x-y-z=0 \\ y+z=0 \end{array}$$

Hacemos ceros debajo del 1er pivote

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} E_{2,1}(-1) \\ E_{3,1}(-2) \end{cases} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{r} x+y+z=0 \\ -2y-2z=0 \\ -3y-3z=0 \\ y+z=0 \end{array}$$

Cambiamos la fila 4ª por la 2ª

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{4,2} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} x+y+z&=0 \\ y+z&=0 \\ -3y-3z&=0 \\ -2y-2z&=0 \end{aligned}$$

Hacemos ceros debajo del 2º pivote

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} E_{3,2}(3) \\ E_{4,2}(2) \end{cases} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} x+y+z&=0 \\ y+z&=0 \\ 0&=0 \\ 0&=0 \end{aligned}$$

Rg(A) = 2 < nº de incógnitas = 3 ⇔ Compatible indeterminado

Resolviendo por sustitución hacia atrás $\begin{cases} y = -z \\ x = -y-z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$

Aplicación en la eliminación de parámetros

Sea el sistema $\begin{cases} x = b_1 + a_{11}\delta + a_{12}\theta + \dots\dots + a_{1n}\lambda \\ y = b_2 + a_{21}\delta + a_{22}\theta + \dots\dots + a_{2n}\lambda \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ z = b_m + a_{m1}\delta + a_{m2}\theta + \dots\dots + a_{mn}\lambda \end{cases}$

Eliminar los parámetros **δ, θ, ...λ** es lo mismo que obtener la condición que deben verificar los valores **(x, y,.....z)** para los que el sistema:

$$\begin{cases} a_{11}\delta + a_{12}\theta + \dots\dots + a_{1n}\lambda = x - b_1 \\ a_{21}\delta + a_{22}\theta + \dots\dots + a_{2n}\lambda = y - b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}\delta + a_{n2}\theta + \dots\dots + a_{mn}\lambda = z - b_m \end{cases}$$

sea compatible, es decir:

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & x-b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & y-b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & z-b_m \end{array}\right)$$

Ejemplo 2.15

Eliminar los parámetros en el sistema:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta \quad &= x \\ \beta + \gamma &= y \\ \alpha + 2\beta + \gamma &= z \end{aligned}$$

En forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Matriz ampliada

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 1 & 2 & 1 & z \end{pmatrix}$$

Hallamos su forma escalonada: hacemos ceros debajo del 1^er^ pivote **1**

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 1 & 2 & 1 & z \end{pmatrix} \Rightarrow E_{3,1}(-1) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & 1 & z-x \end{pmatrix}$$

Hacemos ceros en la 2ª columna debajo del 2º pivote **1**

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & x \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & y \\ 0 & 1 & 1 & z-x \end{pmatrix} \Rightarrow E_{3,2}(-1) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & x \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 & z-x-y \end{pmatrix}$$

Evidentemente para que el sistema sea compatible en la última fila se tiene que verificar que **z -x - y = 0** (***Ecuación en implícitas***) que es la condición buscada.

II) Método de Gauss-Jordan

El método consiste en convertir cualquier sistema en un sistema cuya matriz ampliada sea una **matriz escalonada reducida** por filas.

Ejemplo 2.16

Resolver

$$\begin{aligned} 4x + 16y + 64z &= 100 \\ 2x + 4y + 8z &= 6 \\ x + y + z &= -2 \end{aligned}$$

Hallamos un sistema equivalente simplificando las ecuaciones (multiplicamos las ecuaciones 1ª y 2ª por $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ respectivamente)

$$\begin{pmatrix} 4 & 16 & 64 & 100 \\ 2 & 4 & 8 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} E_1(\frac{1}{4}) \\ E_2(\frac{1}{2}) \end{cases} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 4 & 16 & 25 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{r} x+4y+16z = 25 \\ x+2y+\ 4z = 3 \\ x+\ y+\ \ z = -2 \end{array}$$

Con el 1^er^ pivote hacemos ceros debajo de él y simplificamos la 2ª fila

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 4 & 16 & 25 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} E_{2,1}(-1) \\ E_{3,1}(-1) \end{cases} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 4 & 16 & 25 \\ 0 & -2 & -12 & -22 \\ 0 & -3 & -15 & -27 \end{pmatrix} \Rightarrow E_2(\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 4 & 16 & 25 \\ 0 & -\mathbf{1} & -6 & -11 \\ 0 & -3 & -15 & -27 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{r} x+4y+16z = 25 \\ -y\ -6z = -11 \\ -3y-15z = -27 \end{array}$$

Con el 2º pivote hacemos ceros por debajo y simplificamos la 3ª fila

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 4 & 16 & 25 \\ 0 & -\mathbf{1} & -6 & -11 \\ 0 & -3 & -15 & -27 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{3,2}(-3) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 4 & 16 & 25 \\ 0 & -\mathbf{1} & -6 & -11 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow E_3(\frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 4 & 16 & 25 \\ 0 & -\mathbf{1} & -6 & -11 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{r} x\ +4y+16z = 25 \\ -y\ -6z = -11 \\ z = 3 \end{array}$$

Utilizamos la sustitución hacia atrás para hacer ceros por encima de los pivotes

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 4 & 16 & 25 \\ 0 & -\mathbf{1} & -6 & -11 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{2,3}(6) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 4 & 16 & 25 \\ 0 & -\mathbf{1} & 0 & 7 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{1,3}(-16) =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 4 & 0 & -24 \\ 0 & -\mathbf{1} & 0 & 7 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{1,2}(4) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -\mathbf{1} & 0 & 7 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow E_2(-1) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -7 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 \end{pmatrix}$$

El sistema queda ahora resuelto directamente:

$$\begin{array}{lll} x & & = 4 \\ & y & = -7 \\ & & z = 3 \end{array}$$

III) Resolver numéricamente sistemas lineales

La resolución de sistemas lineales, basada en matrices de gran tamaño, se realiza con ordenadores, por lo que antes de evaluar los distintos métodos vamos a estudiar la manera de operar de los ordenadores.

1.-Aritmética de coma flotante

La capacidad de cálculos así como la precisión y rapidez de las operaciones son características computacionales. Las operaciones en los ordenadores presentan sin embargo ciertas dificultades, en primer lugar no almacenan números como 2/3, $\sqrt{2}$, e, π etc. Para tratarlos emplean la ***aritmética de coma flotante***, donde cada número se escribe

$$\pm\, 0{,}d_1d_2.....d_k \times 10^e \Leftrightarrow \text{mantisa} \times 10^{\text{exponente}} \qquad [1]$$

siendo los dígitos d_i, k valores que satisfacen

$$1 \le d_1 \le 9 \qquad \text{y} \qquad 0 \le d_i \le 9 \quad (2 \le i \le k)$$

donde e es un número entero que depende del tipo de ordenador siendo los valores más comunes entre –39 y 47; El primer dígito después de '0.' es el dígito más significativo y el dígito más a la derecha es el menos significativo. El ***número de cifras (dígitos) significativas*** de un número es el nº de dígitos entre el más significativo y el menos significativo.

Ejemplo 2.17

2364570	$\Rightarrow$	$0{,}2364570 \times 10^7$	$\Rightarrow$	7 cifras significativas
0,00023645	$\Rightarrow$	$0{,}23645 \times 10^{-3}$	$\Rightarrow$	5 cifras significativas
−236,4577	$\Rightarrow$	$-0{,}2364577 \times 10^3$	$\Rightarrow$	7 cifras significativas
0,2364	$\Rightarrow$	$0{,}2364 \times 10^0$	$\Rightarrow$	4 cifras significativas
2,3645719	$\Rightarrow$	$0{,}2364719 \times 10^1$	$\Rightarrow$	7 cifras significativas
0023645710	$\Rightarrow$	$0{,}23645710 \times 10^8$	$\Rightarrow$	8 cifras significativas

2.-Truncamiento

Si ahora queremos representar un número en el ordenador, si el nº de cifras que utiliza un ordenador fuese infinito no habría problemas, pero como sólo puede almacenar un nº k finito de dígitos, el ordenador corta la serie **[1]** del nº en coma flotante, a un nº variable de cifras según sus características.

Esta operación se llama ***truncamiento***.

Un ordenador que solo disponga de 5 cifras significativas, nos convierte estos números en

2364570 $\Rightarrow 0,23645 \times 10^7$ $\Rightarrow$ 5 cifras significativas

0,00023645 $\Rightarrow 0,23645 \times 10^{-3}$ $\Rightarrow$ 5 cifras significativas

-236,4570 $\Rightarrow -0,23645 \times 10^3$ $\Rightarrow$ 5 cifras significativas

0,2364 $\Rightarrow 0,23640 \times 10^0$ $\Rightarrow$ 5 cifras significativas

2,3645719 $\Rightarrow 0,23647 \times 10^1$ $\Rightarrow$ 5 cifras significativas

0023645710 $\Rightarrow 0,23645 \times 10^8$ $\Rightarrow$ 5 cifras significativas

3.-Redondeo

Para paliar en parte el error que cometemos al 'cortar' el número, se utiliza el ***redondeo**, **que consiste en sumar una unidad a la última cifra que se conserva en el truncamiento si el siguiente es mayor o igual que 5, dejándole igual si es menor de 5.***

Ejemplo 2.18

Truncar a 4 cifras significativas los siguientes números

Número	Nº redondeado	Nº truncado
$0,23645710 \times 10^8$	$0,2365 \times 10^8$	$0,2364 \times 10^8$
$\pi = 3,1415926... = 0,31415926.. \times 10^1$	$0,3142 \times 10^1$	$0,3141 \times 10^1$
$2/3 = 0,6666666......$	0,6667	0,6666
$e = 2,718281828459........$	$0,2718 \times 10^1$	$0,2718 \times 10^1$
$-236,4500 = -0,2364570 \times 10^3$	$-0,2365 \times 10^3$	$-0,2364 \times 10^3$

4.-Errores

Los errores debidos al truncamiento y al redondeo cuando son miles de operaciones son importantes por lo que es interesante evaluar la forma en que se acumulan los errores. Para ello se definen dos tipos de errores

$$\boldsymbol{E_a = Error\ absoluto} = \left|N^* - N\right|$$

Diferencia del valor aproximado N^* y el valor real N

$$\boldsymbol{E_r = Error\ relativo} = \left|\frac{N^* - N}{N}\right|$$

Error absoluto dividido por el valor real, se suele dar en porcentaje sin más que multiplicar por 100.

Ejemplo 2.19

Sea $N = 3{,}1415$ y $N^* = 3{,}1416$

$$E_a = \textit{Error absoluto} = |N^* - N| = |3{,}1416 - 3{,}1415| = 0{,}0001$$

$$E_r = \textit{Error relativo} = \left|\frac{N^* - N}{N}\right| = \left|\frac{0{,}0001}{3{,}1415}\right| = 0{,}0000318 = 0{,}00318\%$$

Ejemplo 2.20

Número	Nº truncado	E_a	E_r	Nº redondeado	E_a	E_r
3,2	3	0,2	0,0625	3	0,2	0,0625
3,6	3	0,6	0,1666667	4	0,4	0,111111

En general se comete doble error al truncar que al redondear, por lo que es recomendable redondear al truncar.

5.-Operaciones aritméticas con ordenador

Los ordenadores y calculadoras realizan operaciones aritméticas pasando los nº reales a un nº con k cifras significativas haciendo uso del truncamiento y redondeo, nosotros en nuestros cálculos, fijaremos con anterioridad el nº de cifras a utilizar y luego convertiremos, en cada operación aritmética, todos los números a esa precisión.

Para **sumas y restas** se opera de la siguiente manera

1er paso: se convierten los números en coma flotante.

2er paso: los nº en coma flotante se ponen con el mismo exponente (**el mayor**).

3er paso: se realizan las sumas o restas de las mantisas con el exponente mayor.

4er paso: se reajusta el resultado, en su caso, a coma flotante y redondeo.

Ejemplo 2.21

Sumar 5+87 con dos cifras significativas

$$5+87 = 0{,}50\times10^1 + 0{,}87\times10^2$$
$$= 0{,}05\times10^2 + 0{,}87\times10^2$$
$$= 0{,}92\times10^2$$
$$= 92$$

Ejemplo 2.22

Sumar con dos dígitos significativos $7 + 99$

$$7+99 = 0{,}70\times10^1 + 0{,}99\times10^2$$
$$= 0{,}07\times10^2 + 0{,}99\times10^2$$
$= 1{,}06\times10^2 = 0{,}106\times10^3 = 106$ si el nº de dígitos fuese 3

$= 0{,}106\times10^3 = 0{,}11\times10^3 \cong 110$ siendo el nº de dígitos 2

Para **multiplicaciones y divisiones** se opera

1er paso: se convierte en coma flotante

2er paso: se realiza la multiplicación o división, multiplicando o dividiendo las mantisas y sumando o restando exponentes.

3er paso: se reajusta el resultado, en su caso, a coma flotante y se redondea.

Ejemplo 2.23

Multiplicar 3×35 con 2 cifras significativas

$$3\times 35 = 0{,}30\times 10^1 \times 0{,}35\times 10^2$$
$$= 0{,}105\times 10^3 = 0{,}11\times 10^3$$
$$\cong 110$$

6.-Resolución por Gauss con pivoteo parcial

Estamos ahora preparados para resolver cualquier sistema por eliminación gaussiana, nuestro camino será convertir la matriz ampliada del sistema en una matriz escalonada por filas.

Antes habremos de alguna forma 'preparado' la matriz, es decir todos los números reales se han aproximado por números decimales finitos con las cifras de precisión acordadas, desde las entradas que inicialmente pueden tener más cifras o a partir de las operaciones elementales realizadas en el cálculo de convertir la matriz en escalonada.

La solución será en su caso una solución aproximada, que dependerá del número de cifras significativas de partida, así como del número de operaciones realizadas y del método a seguir.

Antes de comenzar veamos una variación del método que reduce aún más los errores de redondeo acumulados en las operaciones.

Si cuando realizamos una operación elemental de eliminación de un número en la matriz ampliada, el primer pivote es cero, tenemos una operación imposible matemáticamente para hacer ceros (se resuelve la situación cambiando las filas hasta tener un pivote distinto de cero), pero si el pivote, resultado de redondear o truncar, está cercano a cero o es muy pequeño respecto al supuesto candidato a eliminar, cuando dividimos por ese número, el error numérico puede ser considerable.

Ejemplo 2.24

Sea el sistema

$$\begin{aligned} 0{,}0024x + 2y &= 1 \\ 12x - y &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}0024 & 2 & 1 \\ 12 & -1 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Para eliminar el } 12 \Rightarrow E_{2,1}\left(-\frac{12}{0{,}0024}\right) \Rightarrow -\frac{12}{0{,}0024} = -5000$$

Si hubiéramos redondeado a 0,002 la división sería ahora

$$E_{2,1}\left(-\frac{12}{0{,}002}\right) \Rightarrow -\frac{12}{0{,}002} = -6000$$

Se aprecia que la diferencia tiene un error notable.

Por lo que es necesario realizar una variación llamada ***eliminación gaussiana con pivoteo parcial:*** *consiste en comparar todos los elementos de la misma columna y elegir como primer pivote, cambiando las filas correspondientes, el mayor elemento en valor absoluto, y así sucesivamente hasta la finalización del método.*

Ejemplo 2.25

Resolver por eliminación gaussiana con pivoteo parcial:

$$\begin{aligned} y - 2z &= -7 \\ x + 3y + 2z &= 10 \\ -3x - 5y + 2z &= 2 \end{aligned}$$

Cambiamos las filas 1 y 3 porque hemos elegido el –3 como pivote

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & -7 \\ 1 & 3 & 2 & 10 \\ \mathbf{-3} & -5 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{1,3} = \begin{pmatrix} \mathbf{-3} & -5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} -3x - 5y + 2z &= 2 \\ x + 3y + 2z &= 10 \\ y - 2z &= -7 \end{aligned}$$

Hacemos ceros debajo del pivote

$$\begin{pmatrix} \mathbf{-3} & -5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{2,1}(\frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} \mathbf{-3} & -5 & 2 & 2 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} & \frac{32}{3} \\ 0 & 1 & -2 & -7 \end{pmatrix}$$

Simplificamos la 2ª fila

$$\begin{pmatrix} \mathbf{-3} & -5 & 2 & 2 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} & \frac{32}{3} \\ 0 & 1 & -2 & -7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow E_2(\frac{3}{4}) = \begin{pmatrix} \mathbf{-3} & -5 & 2 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \end{pmatrix}$$

Hacemos ceros debajo del 2º pivote

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{3} & -5 & 2 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{3,2}(-1) = \begin{pmatrix} -\mathbf{3} & 5 & 2 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -\mathbf{4} & -15 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$-4z = -15 \Rightarrow \mathbf{z} = \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{4}}$$

$$y + 2z = 8 \Rightarrow \mathbf{y} = 8 - 2\ \frac{15}{4} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

$$-3x - 5y + 2z = 2 \Rightarrow \mathbf{x} = \frac{2 - 2z + 5y}{-3} = \frac{2 - 2\cdot\frac{15}{4} + 5\frac{1}{2}}{-3} = \mathbf{1}$$

Ejemplo 2.26

Resolver el sistema lineal con pivoteo parcial

$$\begin{aligned} x + y + z &= -2 \\ 4x + 16y + 64z &= 100 \\ 2x + 4y + 8z &= 6 \end{aligned}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & 16 & 64 & 100 \\ 2 & 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Sin limitaciones, nosotros hubiéramos usado el **1** como pivote, pero el pivoteo parcial exige tomar como pivote el mayor en valor absoluto de la primera columna o sea el a_{21} = **4, luego cambiamos las filas 1ª y 2ª**

$$\begin{pmatrix} \mathbf{4} & 16 & 64 & 100 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Hacemos $a_{21} = 0$ y $a_{31} = 0$ sumando a la fila 2ª la 1ª multiplicada por $(\frac{-a_{21}}{a_{11}}) = -\frac{1}{4}$ y respectivamente a la 3ª por $(\frac{-a_{31}}{a_{11}}) = -\frac{2}{4}$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_{2,1}(-\frac{1}{4}) \\ E_{3,1}(-\frac{2}{4}) \end{cases} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & 16 & 64 & 100 \\ 0 & -3 & -15 & -27 \\ 0 & -4 & -24 & -44 \end{pmatrix}$$

Ahora comparamos en la 2ª columna a partir de la primera fila, el mayor elemento en valor absoluto que es $a_{32} = -4$ y cambiamos las filas 2ª y 3ª

$$\begin{pmatrix} \mathbf{4} & 16 & 64 & 100 \\ 0 & -\mathbf{4} & -24 & -44 \\ 0 & -3 & -15 & -27 \end{pmatrix}$$

Hacemos $a_{32} = 0$ sumando a la 3ª fila, la 2ª multiplicada por $(-\frac{a_{32}}{a_{22}}) = -\frac{-3}{-4}$

$$\Rightarrow E_{3,2}(-\frac{3}{4}) = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & 16 & 64 & 100 \\ 0 & -\mathbf{4} & -24 & -44 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} 4x + 16y + 64z = 100 \\ -4y - 24z = -44 \\ 3z = 6 \end{array}$$

que resolviendo por sustitución hacia atrás

$$\begin{cases} 3z = 6 \\ 4y - 24(2) = -44 \\ 4x + 16(-1) + 64(2) = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 2 \\ y = -1 \\ x = -3 \end{cases}$$

Ejemplo 2.27

Resolver el sistema sin pivoteo y con pivoteo parcial realizando todos los cálculos con 4 cifras significativas.

$$\begin{array}{l} 0{,}0001x + y = 2 \\ x + y = 3 \end{array}$$

Cuando los sistemas son de dos ecuaciones con dos incógnitas es más cómodo resolverlos sin utilizar la matriz ampliada

$$\begin{array}{r} 0{,}0001x + y = 2 \\ -x - y = -3 \\ \hline -0{,}9999\,x = -1 \end{array}$$

$$x = \frac{\boldsymbol{-1}}{\boldsymbol{-0{,}9999}} = \boldsymbol{1{,}0001..} = \boldsymbol{0{,}10001 \times 10^1} = \boldsymbol{0{,}1000 \times 10^1} = 1$$

$$y = 0{,}3000 \times 10^1 - 0{,}1000 \times 10^1 = 0{,}2000 \times 10^1 = 2$$

Sin pivoteo

Se ponen los datos en coma flotante y con 4 cifras significativas

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0{,}0001} & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{0{,}1 \times 10^{-3}} & 0{,}1 \times 10^1 & 0{,}2 \times 10^1 \\ 0{,}1 \times 10^1 & 0{,}1 \times 10^1 & 0{,}3 \times 10^1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0,1000\times10^{-3}} & 0,1000\times10^{1} & 0,2000\times10^{1} \\ 0,1000\times10^{1} & 0,1000\times10^{1} & 0,3000\times10^{1} \end{pmatrix}$$

Sumamos a la 2ª fila la 1ª multiplicada por $\left(-\dfrac{0,1000\times10^{1}}{0,1000\times10^{-3}}\right)$

$$\Rightarrow E_{2,1}\left(-\frac{0,1000\times10^{1}}{0,1000\times10^{-3}}\right)=\begin{pmatrix} \mathbf{0,1000\times10^{-3}} & 0,1000\times10^{1} & 0,2000\times10^{1} \\ 0 & -0,1000\times10^{5} & -0,2000\times10^{5} \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} 0,1000\times10^{-3}x+0,1000\times10^{1}y= \ 0,2000\times10^{1} \\ \qquad\qquad -0,1000\times10^{5}y=-0,2000\times10^{5} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y=2 \\ x=0 \end{cases}$$

Con pivoteo

Se elige el mayor pivote de la 1ª columna

$$\begin{pmatrix} 0,0001 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 3 \\ 0,0001 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Se ponen los datos en coma flotante y con 4 cifras significativas

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0,1\times10^{1}} & 0,1\times10^{1} & 0,3\times10^{1} \\ 0,1\times10^{-3} & 0,1\times10^{1} & 0,2\times10^{1} \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} \mathbf{0,1000\times10^{1}} & 0,1000\times10^{1} & 0,3000\times10^{1} \\ 0,1000\times10^{-3} & 0,1000\times10^{1} & 0,2000\times10^{1} \end{pmatrix}$$

Sumamos a la 2ª fila la 1ª multiplicada por $(\left(-\dfrac{0,1000\times10^{-3}}{0,1000\times10^{1}}\right))$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0,1000\times10^{1}} & 0,1000\times10^{1} & 0,3000\times10^{1} \\ 0 & 0,1000\times10^{1}-0,1000\times10^{-3} & 0,2000\times10^{1}-0,3000\times10^{-3} \end{pmatrix}$$

Hacemos las operaciones y reconvertimos en 4 cifras significativas

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0,1000\times10^{1}} & 0,1000\times10^{1} & 0,3000\times10^{1} \\ 0 & 0,1000\times10^{1}-0,00001\times10^{1} & 0,2000\times10^{1}-0,00003\times10^{1} \end{pmatrix}$$

$$0,1000\times10^{1}-0,00001\times10^{1}=0,09999\times10^{1}=\mathbf{0,1000\times10^{1}}$$
$$0,2000\times10^{1}-0,00003\times10^{1}=0,19997\times10^{1}=\mathbf{0,2000\times10^{1}}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0,1000\times10^{1}} & 0,1000\times10^{1} & 0,3000\times10^{1} \\ 0 & 0,1000\times10^{1} & 0,2000\times10^{1} \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} x+\ y=3 \\ \quad 1\cdot y=2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y=2 \\ x=1 \end{cases}$$

7.-Sistemas mal condicionados

Vamos a ver que hay sistemas en las que un pequeño error de redondeo puede producir un error grande en los resultados finales; a estos sistemas se les llama ***mal condicionados.***

Ejemplo 2.28

Sea el sistema

$$x + 2y = 10$$
$$1.1x + 2y = 10.4$$

Restamos la 1ª de la 2ª

$$0{,}1x = 0{,}4 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

Si hacemos un pequeño cambio en el sistema

$$x + 2y = 10$$
$$\mathbf{1.05}\, x + 2y = 10.4$$

Restamos la 1ª de la 2ª

$$0{,}05\, x = 0{,}4 \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 1 \end{cases}$$

Es decir, un error de 5 centésimas ocasiona un cambio total en las soluciones.

Estos sistemas son muy difíciles de manejar y lo que podemos hacer es reconocer cuando estamos ante un sistema mal condicionado.

¿Cómo reconocemos un sistema mal condicionado? En principio cuando el ***determinante de los coeficientes se aproxima a cero***.

El problema es especificar cuanto de aproximado a cero tiene que estar el determinante, puesto que un determinante puede cambiar su valor, multiplicando una o más ecuaciones por un factor escalar, mientras que no altera la solución del sistema:

Ejemplo 2.29

Sea el sistema

$$3x + 2y = 18$$
$$-x + 2y = 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 8 \quad \text{bien condicionado}$$

Sea el sistema

$$x + 2y = 10$$
$$1{,}1x + 2y = 10{,}4$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1{,}1 & 2 \end{vmatrix} = -0{,}2 \quad \text{mal} \quad \text{condicionado}$$

Si en este sistema multiplico las dos ecuaciones por 10, el sistema no varía ni la solución ni el estado de condicionamiento, pues estaríamos ante un sistema equivalente. En cambio si ahora calculamos su determinante, obtenemos

$$\begin{vmatrix} 10 & 20 \\ 11 & 20 \end{vmatrix} = -20 \quad \text{bien} \quad \text{condicionado} \quad ??$$

no está bien condicionado, pues el sistema sigue siendo el mismo, luego con el determinante no podemos asegurar su condicionamiento del todo.

8.-Escalamiento

Para evitar este dilema, donde las magnitudes de los coeficientes esconden los sistemas mal condicionados utilizamos el ***'escalamiento'*** de las ecuaciones, de forma que el mayor coeficiente en cada ecuación sea como mucho del orden de las unidades y así evitamos o minimizamos los errores de redondeo para aquellos sistemas que tengan alguna ecuación con coeficientes de distintas magnitudes.

El método consiste en acotar los mayores coeficientes de las incógnitas por medio de potencias enteras de 10 y dividir todos los coeficientes por la cota inferior

$$\boxed{\mathbf{c_i = 10^{ki} \leq \max |\, a_{ij} \,| \leq 10^{ki+1} \qquad para \;\; ki \in \mathbb{Z}}}$$

de forma que todas las filas tengan los coeficientes mayores de las incógnitas en el orden de las unidades.

Ejemplo 2.30

Escalar el sistema

$$30x + 591400y = 591700$$
$$5{,}29x - 61{,}30y = 46{,}78$$

para la 1ª fila

$$\max \{\, |30| \,,\, |591400| \,\} = 591400$$

Las cotas serán $\mathbf{c_i = 10^5} < 591400 < 10^6$

para la 2ª fila

$$\max \{ |5{,}29| , |-61{,}30| \}=61{,}30$$

Las cotas serán $\mathbf{c_i = 10^1} < 61{,}30 < 10^2$

dividiendo por $c_i = 10^5$ y 10^1 respectivamente las filas, resulta

$$\begin{aligned} 0{,}0003x + 5{,}914\,y &= 5{,}917 \\ 0{,}529x - 6{,}130y &= 4{,}678 \end{aligned}$$

A partir de aquí redondeamos y resolvemos.

Ejemplo 2.31

Resolver por el método de Gauss con pivoteo parcial, usando tres cifras significativas

$$\begin{aligned} 7{,}797x - 20073y &= 43215 \\ 7{,}0004x + 5{,}995y &= 1{,}065 \end{aligned}$$

Solución:

Con escalamiento

Para la 1ª fila

$$\max \{ |7{,}799| , |-20073| \}=20073$$

Las cotas serán $\mathbf{c_i = 10^4} < 20073 < 10^5$

dividiendo por $\mathbf{c_i = 10^4}$ la 1ª fila, resulta

$$\begin{aligned} 0{,}0007797x - 2{,}0073y &= 4{,}3215 \\ 7{,}0004x + 5{,}995y &= 1{,}065 \end{aligned}$$

Paso a tres cifras significativas

$$\begin{aligned} 0{,}7797 \times 10^{-3}\, x - 0{,}20073\times 10^1 y &= 0{,}43215\times 10^1 \\ 0{,}70004\times 10^1 x + 0{,}5995\times 10^1\, y &= 0{,}1065\times 10^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0{,}780\times 10^{-3}\, x - 0{,}201\times 10^1 y &= 0{,}432\times 10^1 \\ 0{,}700\times 10^1 x + 0{,}600\times 10^1\, y &= 0{,}107\times 10^1 \end{aligned}$$

Pivoteo parcial y Eliminación gaussiana

Busco el pivote mayor: $E_{1,2}$

$$\begin{pmatrix} 0,780\times10^{-3} & -0,201\times10^{1} & 0,432\times10^{1} \\ 0,700\times10^{1} & 0,600\times10^{1} & 0,107\times10^{1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0,700\times10^{1} & 0,600\times10^{1} & 0,107\times10^{1} \\ 0,780\times10^{-3} & -0,201\times10^{1} & 0,432\times10^{1} \end{pmatrix}$$

$$E_{2,1}\left(\frac{-0,780\times10^{-3}}{0,700\times10^{1}}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0,700\times10^{1} & 0,600\times10^{1} & 0,107\times10^{1} \\ 0 & -0,201\times10^{1} & 0,432\times10^{1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 0,700\times10^{1}x + 0,600\times10^{1}y = 0,107\times10^{1} \\ 0 \qquad -0,201\times10^{1}y = 0,432\times10^{1} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2,15 \end{cases}$$

Sin escalamiento

$$\begin{matrix} 7,797x - 20073y = 43215 \\ 7,0004x + 5,995\,y = 1,065 \end{matrix}$$

Tres cifras significativas

$$\begin{matrix} 0,7797\times10^{1}x - 0,20073\times10^{5}y = 0,43215\times10^{5} \\ 0,70004\times10^{1}x + 0,5995\times10^{1}y = 0,1065\times10^{1} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0,780\times10^{1}x - 0,201\times10^{5}y = 0,432\times10^{5} \\ 0,700\times10^{1}x + 0,600\times10^{1}y = 0,107\times10^{1} \end{matrix}$$

Eliminación gaussiana:

$$E_{2,1}\left(-\frac{0,700\times10^{1}}{0,780\times10^{1}}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 0,780\times10^{1} & -0,201\times10^{5} & 0,432\times10^{5} \\ 0,700\times10^{1} & 0,600\times10^{1} & 0,107\times10^{1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0,780\times10^{1} & -0,201\times10^{5} & 0,432\times10^{5} \\ 0 & 0,180\times10^{5} & -0,388\times10^{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 0,780\times10^{1}x - 0,201\times10^{5}y = 0,432\times10^{5} \\ 0 \qquad 0,180\times10^{5}y = -0,388\times10^{5} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 25,6 \\ y = -2,16 \end{cases}$$

Ejemplo 2.32

Resolver por el método de Gauss con pivoteo parcial y usando tres cifras significativas

$$\begin{aligned} 8,7861x - 28156y &= 47083 \\ 6,9965x + 8,0054y &= 2,3162 \end{aligned}$$

Solución:

Escalamiento

$$\max \{ |8,78610| , |28156| \} = 28156$$

Las cotas serán $\mathbf{c_i = 10^4} < 28156 < 10^5$

dividiendo por $\mathbf{c_i} = 10^4$ resulta

$$\begin{aligned} 0,00087861x - 2,8156y &= 4,7083 \\ 6,9965x + 8,0054y &= 2,3162 \end{aligned}$$

Cifras significativas

$$\begin{aligned} 0,87861\times10^{-3}x - 0,28156\times10^{1}y &= 0,47083\times10^{1} \\ 0,69965\times10^{1}x + 0,80054\times10^{1}y &= 0,23162\times10^{1} \end{aligned}$$

Redondeo

$$\begin{aligned} 0,879\times10^{-3}x - 0,282\times10^{1}y &= 0,471\times10^{1} \\ 0,700\times10^{1}x + 0,801\times10^{1}y &= 0,232\times10^{1} \end{aligned}$$

Pivoteo parcial y eliminación

$$\begin{pmatrix} 0,700\cdot10^{1} & 0,801\cdot10^{1} & 0,232\cdot10^{1} \\ 0,879\cdot10^{-3} & -0,282\cdot10^{1} & 0,471\cdot10^{1} \end{pmatrix} \Rightarrow E_{2,1}\left(\frac{0,879\cdot10^{-3}}{0,700\cdot10^{1}}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0,700\cdot10^{1} & 0,801\cdot10^{1} & 0,232\cdot10^{1} \\ 0 & -0,282\cdot10^{1} & 0,471\cdot10^{1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7,00 & 8,00 & 2,32 \\ 0 & -2,82 & 4,71 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 7,00x + 8,01y &= 2,32 \\ -2,82y &= 4,71 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 2,24 \\ y &= -1,67 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.33

Resolver, por el método de Gauss con pivoteo parcial, el siguiente sistema de ecuaciones usando 3 cifras significativas.

$$\begin{aligned} 0.9998x + y + 1.995z &= 1.0008 \\ 2.002x + 1200000y - 6.003z &= 2400008 \\ 4x + y - z &= 6.9964 \end{aligned}$$

Solución:

Para la 2ª fila

$$\max\{|2{,}002|, |1200000|, |-6{,}003|\}=1200000$$

Las cotas serán $\mathbf{c_i=10^6}<28156<10^7$

dividiendo por $\mathbf{c_i=10^6}$ y pasando a 3 cifras significativas, resulta

$$\begin{pmatrix} 0{,}9998 & 1 & 1{,}995 \\ 2{,}002 & 1200000 & 6{,}003 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1{,}0008 \\ 2400008 \\ 6{,}9964 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}9998\cdot10^0 & 0{,}100\cdot10^1 & 0{,}1995\cdot10^1 \\ 0{,}2002\cdot10^1 & 0{,}120\cdot10^7 & -0{,}6003\cdot10^1 \\ 0{,}400\cdot10^1 & 0{,}100\cdot10^1 & -0{,}100\cdot10^1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}10008\cdot10^1 \\ 0{,}2400008\cdot10^7 \\ 0{,}6996\cdot10^1 \end{pmatrix}$$

divido la 2ª fila por: $\dfrac{1}{10^6}\Longrightarrow E_2\left(\dfrac{1}{10^6}\right)$

$$\begin{pmatrix} 0{,}9998\cdot10^0 & 0{,}100\cdot10^1 & 0{,}1995\cdot10^1 \\ 0{,}2002\cdot10^{-5} & 0{,}120\cdot10^1 & -0{,}6003\cdot10^{-5} \\ 0{,}400\cdot10^1 & 0{,}100\cdot10^1 & -0{,}100\cdot10^1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}10008\cdot10^1 \\ 0{,}2400008\cdot10^1 \\ 0{,}6996\cdot10^1 \end{pmatrix}$$

redondeo a 3 cifras significativas

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0{,}100\cdot10^1 & 0{,}100\cdot10^1 & 0{,}200\cdot10^1 & 0{,}100\cdot10^1 \\ 0{,}200\cdot10^{-5} & 0{,}120\cdot10^1 & -0{,}600\cdot10^{-5} & 0{,}240\cdot10^1 \\ 0{,}400\cdot10^1 & 0{,}100\cdot10^1 & -0{,}100\cdot10^1 & 0{,}700\cdot10^1 \end{array}\right)\Rightarrow E_{1,3}$$

Aplico el pivoteo parcial

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0{,}400\cdot10^1 & 0{,}100\cdot10^1 & -0{,}100\cdot10^1 & 0{,}700\cdot10^1 \\ 0{,}200\cdot10^{-5} & 0{,}120\cdot10^1 & -0{,}600\cdot10^{-5} & 0{,}240\cdot10^1 \\ 0{,}100\cdot10^1 & 0{,}100\cdot10^1 & 0{,}200\cdot10^1 & 0{,}100\cdot10^1 \end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases} E_{2,1}\left(-\dfrac{0.200\cdot10^{-5}}{0.400\cdot10^1}\right) \\ E_{3,1}\left(-\dfrac{0.100\cdot10^1}{0.400\cdot10^1}\right) \end{cases}$$

Eliminación gaussiana

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0{,}400\cdot10^1 & 0{,}100\,10^1 & -0{,}100\cdot10^1 & 0.700\,10^1 \\ 0 & 0{,}120\cdot10^1 & -0{,}100\cdot10^{-5} & 0.240\cdot10^1 \\ 0 & 0{,}750\cdot10^0 & 0{,}225\cdot10^1 & -0.750\cdot10^0 \end{array}\right)\Rightarrow E_{3,2}\left(-\dfrac{0.750\cdot10^0}{0.120\cdot10^1}\right)$$

$$\left(\begin{array}{lll|l} 0,400\cdot10^1 & 0,100\cdot10^1 & -0,100\cdot10^1 & 0,700\cdot10^1 \\ 0 & 0,120\cdot10^1 & -0,100\cdot10^{-5} & 0,240\cdot10^1 \\ 0 & 0 & 0,225\cdot10^1 & -0,225\cdot10^1 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} 0,400\cdot10^1x+0,100\cdot10^1y-0,100\cdot10^1z = 0,700\cdot10^1 \\ 0,120\cdot10^1y-0,100\cdot10^{-5}z = 0,240\cdot10^1 \\ 0,225\cdot10^1z = -0,225\cdot10^1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{array}$$

IV) Resolución de sistemas lineales mediante la factorización de matrices

Vamos a resolver sistemas lineales con ayuda de la factorización $L\cdot U$ de matrices mediante unos ejemplos:

Caso de factorización sin intercambios:

Ejemplo 2.34

Resolver

$$\begin{array}{r} 2x+4y-4z=12 \\ x-4y+3z=-21 \\ -6x-9y+10z=-24 \end{array}$$

Escribiéndolo en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 3 \\ -6 & -9 & 10 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 \\ -21 \\ -24 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A\cdot X=B}$$

Vamos a factorizar la matriz A en la forma L · U:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 3 \\ -6 & -9 & 10 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} E_{2,1}(-\frac{1}{2}) \\ E_{3,1}(3) \end{cases} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 0 & -6 & 5 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -3 & * & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 0 & -6 & 5 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{3,2}(\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 0 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = U \quad \text{y} \quad L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -3 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 4 & -4\\ 1 & -4 & 3\\ -6 & -9 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 1 & 0\\ -3 & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4 & -4\\ 0 & -6 & 5\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\mathbf{L}\cdot\mathbf{U}$$

Método:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{B}\\ \mathbf{A}=\mathbf{L}\cdot\mathbf{U}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\mathbf{L}\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{B}\\ \mathbf{A}=\mathbf{L}\cdot\mathbf{U}\end{array}\right\}\Rightarrow\mathbf{L}\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{B}\Rightarrow\begin{cases}\mathbf{U}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{Y}\\ \mathbf{L}\cdot\mathbf{Y}=\mathbf{B}\end{cases}$$

En el sistema primitivo se sustituye A por su factorización y se desdobla el sistema en dos

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{B}\Rightarrow\mathbf{L}\cdot\mathbf{U}\quad\mathbf{X}=\mathbf{B}\Rightarrow\begin{cases}\mathbf{U}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{Y}\\ \mathbf{L}\cdot\mathbf{Y}=\mathbf{B}\end{cases}$$

Pero esos dos nuevos sistemas son triangulares y en consecuencia se resuelven inmediatamente. Resolvemos $\mathbf{L}\cdot\mathbf{Y}=\mathbf{B}$

$$\mathrm{L}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 1 & 0\\ -3 & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\qquad \mathrm{Y}=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}\qquad \mathrm{B}=\begin{pmatrix}12\\ -21\\ -24\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{Y}=\mathbf{B}\Longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 1 & 0\\ -3 & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\ -21\\ -24\end{pmatrix}$$

$a=12$

$1/2\ a+b=-21\Rightarrow b=-21-1/2\cdot(12)=-27$

$-3a+1/2\ b+c=-24\Rightarrow c=-24-1/2\cdot(-27)+3\cdot(12)=-3/2$

Si ahora resolvemos el otro sistema $\mathbf{U}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{Y}$**:**

$$\mathbf{U}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 0 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad Y=\begin{pmatrix} 12 \\ -27 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 0 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 \\ -27 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+4y-4z=12 \\ -6y+5z=-27 \\ \frac{1}{2}z=-\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{12-4\cdot 2+4\cdot(-3)}{2}=-4 \\ y=\dfrac{27+5(-3)}{6}=2 \\ z=-3 \end{cases}$$

Ejemplo 2.35

Resolver aplicando la factorización $\mathbf{L}\cdot\mathbf{U}$, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x+5y+3z-5t&=-8 \\ y-z-6t&=-20 \\ x+2y+z+7t&=24 \\ 2x+4y+2t&=8 \end{aligned}$$

Solución:

Forma matricial:

$$\left.\begin{aligned} x+5y+3z-5t&=-8 \\ y-z-6t&=-20 \\ x+2y+z+7t&=24 \\ 2x+4y+2t&=8 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -8 \\ -20 \\ 24 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow A\cdot X=B$$

Factorización:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} E_{3,1}(-1) \\ E_{4,1}(-2) \end{cases} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & -3 & -2 & 12 \\ 0 & -6 & -6 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} E_{3,2}(3) \\ E_{4,2}(6) \end{cases} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & -12 & -24 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E_{4,3}\left(-\frac{12}{5}\right)=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -9,6 \end{pmatrix}=U \quad \text{y} \quad L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & 2,4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & 2,4 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -9,6 \end{pmatrix}=L\cdot U$$

Método:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{A\cdot X=B} \\ \mathbf{A=L\cdot U} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \mathbf{L\cdot U\cdot X=B} \\ \mathbf{A=L\cdot U} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{L\cdot U\cdot X=B} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathbf{U\cdot X=Y} \\ \mathbf{L\cdot Y=B} \end{array}\right.$$

Resolvemos $L\cdot Y=B$

$$L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & 2,4 & 1 \end{pmatrix} \quad Y=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -8 \\ -20 \\ 24 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & 2,4 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -8 \\ -20 \\ 24 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} a & = & -8 \\ b & = & -20 \\ a-3b+c & = & 24 \\ 2a-6b+2,4c+d & = & 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} a & = & -8 \\ b & = & -20 \\ c & = & -28 \\ d & = & -28,8 \end{array}$$

Resolvemos el otro sistema **U X= Y:**

$$U=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -9,6 \end{pmatrix} \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad Y=\begin{pmatrix} -8 \\ -20 \\ -28 \\ -28,8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -9,6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -8 \\ -20 \\ -28 \\ -28,8 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+5y+3z-5t=-8 \\ y-z-6t=-20 \\ -5z-6t=-28 \\ -9,6t=-28,8 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & 0 \\ z & = & 2 \\ t & = & 3 \end{array}$$

b) Caso de factorización con intercambios

Ejemplo 2.36

Resolver por el método de la L U el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x+6y-4z &= 14 \\ -4x-12y+11z &= -28 \\ 3x+14y-16z &= 31 \end{aligned}$$

Solución:

Hallamos la factorización:

Forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -4 & -12 & 11 \\ 3 & 14 & -16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -28 \\ 31 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A \cdot X = B}$$

Factorización:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -4 & -12 & 11 \\ 3 & 14 & -16 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} E_{2,1}(2) \\ E_{3,1}(-1.5) \end{cases} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{2,3} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1{,}5 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{P \cdot A = L \cdot U}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -4 & -12 & 11 \\ 3 & 14 & -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1.5 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Método:

$$\left.\begin{matrix} \mathbf{A \cdot X = B} \\ \mathbf{P \cdot A = L \cdot U} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \mathbf{P \cdot A \cdot X = P \cdot B} \\ \mathbf{P \cdot A = L \cdot U} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathbf{L \cdot U \cdot X = P \cdot B} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{U \cdot X = Y} \\ \mathbf{L \cdot Y = P \cdot B} \end{cases}$$

Resolvemos $\mathbf{L \cdot Y = P \cdot B}$

$$L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1{,}5 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Y=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 14 \\ -28 \\ 31 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1{,}5 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 14 \\ -28 \\ 31 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a &= 14 \\ 1{,}5a + b &= 31 \\ -2a + c &= -28 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a &= 14 \\ b &= 10 \\ c &= 0 \end{aligned}$$

Resolvemos $\mathbf{U \cdot X = Y}$

$$U=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad Y=\begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2x + 6y - 4z &= 14 \\ 5y - 10z &= 10 \\ 3z &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.37

Resolver el sistema de ecuaciones, utilizando la factorización $L \cdot U$

$$\begin{aligned} 2x+2y-z+t &= 4 \\ 3x+3y-2z+2t &= 6 \\ 8x+5y-3z+4t &= 12 \\ 4x+3y-z+2t &= 6 \end{aligned}$$

Solución:

Forma matricial: $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A \cdot X = B}$

Factorización:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} E_{2,1}(-1.5) \\ E_{3,1}(-4) \\ E_{4,1}(-2) \end{cases} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{1,3} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{3,2}(-3)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{4,3}\left(-\frac{0{,}5}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1{,}5 & 0 & 0{,}25 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{P \cdot A = L \cdot U}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1{,}5 & 0 & 0{,}25 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Método:

$$\left.\begin{matrix} \mathbf{A \cdot X = B} \\ \mathbf{P \cdot A = L \cdot U} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \mathbf{P \cdot A \cdot X = P \cdot B} \\ \mathbf{P \cdot A = L \cdot U} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathbf{L \cdot U \cdot X = P \cdot B} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{U \cdot X = Y} \\ \mathbf{L \cdot Y = P \cdot B} \end{cases}$$

Resolvemos $\mathbf{L \cdot Y = P \cdot B}$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1{,}5 & 0 & 0{,}25 & 1 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1,5 & 0 & 0,25 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= 4 \\ 2a + b &= 6 \\ 4a + 3b + c &= 12 \\ 1.5a + 0.25c + d &= 6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a &= 4 \\ b &= -2 \\ c &= 2 \\ d &= -0.5 \end{aligned}$$

Resolvemos $\mathbf{U \cdot X = Y}$

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ -0,5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 1 \\ z &= -1 \\ t &= -1 \end{aligned}$$

c) Caso de factorización de Cholesky

Ejemplo 2.38

Resolver utilizando la factorización de Cholesky el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 4x + 12y &= 4 \\ 12x + 40y &= 20 \end{aligned}$$

Solución:

Forma matricial

$$\mathbf{A \cdot X = B} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 40 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 40 \end{pmatrix}$$ Se observa que la matriz es simétrica

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 40 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{1,1}\left(\frac{1}{\sqrt{4}}\right)=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 12 & 40 \end{pmatrix} \Longrightarrow E_{2,1}(-6)=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow E_2(\frac{1}{\sqrt{4}})=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=C^t \quad y \quad C=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{6} & \mathbf{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{6} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}=\mathbf{C}\ \mathbf{C}^t$$

Método:

$$\boxed{\left.\begin{matrix} \mathbf{A\cdot X=B} \\ \mathbf{A=C\cdot C^t} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \mathbf{C\cdot C^t\cdot X= B} \\ \mathbf{A=C\cdot C^t} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathbf{C\cdot C^t\cdot X= B} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \mathbf{C^t\cdot X=Y} \\ \mathbf{C\cdot Y=B} \end{matrix}\right.}$$

Resolvemos C Y = B

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \qquad Y=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 4 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} & & 2a & = & 4 \\ 6a & + & 2b & = & 20 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} a=2 \\ b=4 \end{matrix}$$

Resolvemos $\mathbf{C^t\cdot X=Y}$

$$C^t=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad Y=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x+6y&=2 \\ 2y&=4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= -5 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.39

Resolver el sistema:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 8x_2 + 16x_3 &= 64 \\ 8x_1 + 20x_2 + 44x_3 &= 168 \\ 16x_1 + 44x_2 + 109x_3 &= 403 \end{aligned}$$

Forma matricial

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{B} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 8 & 16 \\ 8 & 20 & 44 \\ 16 & 44 & 109 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 \\ 168 \\ 403 \end{pmatrix}$$

Factorización de Cholesky:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 4 & 8 & 16 \\ 8 & 20 & 44 \\ 16 & 44 & 109 \end{pmatrix} \Rightarrow E_1(\frac{1}{\sqrt{4}}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 8 & 20 & 44 \\ 16 & 44 & 109 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} E_{2,1}(-4) \\ E_{3,1}(-8) \end{matrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 12 & 45 \end{pmatrix} \Rightarrow E_2(\frac{1}{\sqrt{4}}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 12 & 45 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{3,2}(-6) =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow E_3(\frac{1}{\sqrt{9}}) \Rightarrow \mathbf{C}^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 8 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 16 \\ 8 & 20 & 44 \\ 16 & 44 & 109 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 8 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \mathbf{C}\cdot\mathbf{C}^t$$

Método:

$$\boxed{\left.\begin{matrix} \mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{B} \\ \mathbf{A}=\mathbf{C}\cdot\mathbf{C}^t \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \mathbf{C}\cdot\mathbf{C}^t\cdot\mathbf{X}=\mathbf{B} \\ \mathbf{A}=\mathbf{C}\cdot\mathbf{C}^t \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathbf{C}\cdot\mathbf{C}^t\cdot\mathbf{X}=\mathbf{B} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \mathbf{C}^t\cdot\mathbf{X}=\mathbf{Y} \\ \mathbf{C}\cdot\mathbf{Y}=\mathbf{B} \end{matrix}\right.}$$

Resolvemos $\mathbf{C \cdot Y = B}$

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 8 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{Y}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 64 \\ 128 \\ 403 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 8 & 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 64 \\ 168 \\ 403 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a = 64 \\ 4a+2b=168 \\ 8a+6b+3c=403 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=32 \\ b=20 \\ c=9 \end{cases}$$

Resolvemos $\mathbf{C^t \cdot X = Y}$

$$\mathbf{C^t}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \mathbf{Y}=\begin{pmatrix} 32 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C^t \;\; X = Y} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 32 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3z=9 \\ 2y+6z=20 \\ 2x+4y+8z=32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=3 \end{cases}$$

2.2.2 Métodos de iteración

En contraposición con los métodos directos, existen los métodos iterativos en los cuales llegamos a una respuesta mediante una serie de iteraciones, cuyo resultado es una aproximación de la solución, aproximaciones, que en el mejor de los casos convergen a la solución correcta, en el sentido de que cada respuesta de una aproximación será mejor que la anterior aproximación. Estudiamos dos métodos iterativos: **método de Jacobi y método de Gauss - Seidel.**

Antes de desarrollar estos métodos veamos algunas precisiones puntuales. En primer lugar, sólo resolveremos sistemas compatibles determinados, es decir sistemas con el determinante de A distinto de cero, det (A)≠ 0, de manera que el sistema tendrá una solución única. Incluso así, estos métodos no siempre dan los resultados esperados, sino que los sistemas tienen que cumplir una condición:

I) Matriz estrictamente dominante en la diagonal

Diremos que una ***matriz es estrictamente dominante en la diagonal****, si en cada fila, el valor absoluto del elemento de la diagonal es mayor que la suma de los valores absolutos de los otros elementos de la fila.*

$$|a_{ii}| > |a_{i1}| + |a_{i2}| + \ldots\ldots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| \ldots\ldots + |a_{in}| = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{i,j}$$

Ejemplo 2.40

Verificar si la matriz A del sistema, es estrictamente dominante en la diagonal

$$\begin{aligned} 3x - y + z &= 4 \\ 2x + 5y + 2z &= -5 \\ x + 2y + 4z &= 20 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 3 & -6 & 2 \\ -3 & 5 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} |-5| > |1| + |-2| = 3 \\ |-6| > |3| + |2| = 5 \\ |9| > |-3| + |5| = 8 \end{cases}$$

Luego cumple la condición.

Ejemplo 2.41

Verificar si la matriz A del sistema, es estrictamente dominante en la diagonal

$$\begin{aligned} 3x - 6y + 2z &= 20 \\ -5x + y - 2z &= -13 \\ -3x + 5y + 9z &= 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -5 & 1 & -2 \\ -3 & 5 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} |3| < |-6| + |2| = 8 \\ |1| < |-5| + |-2| = 7 \\ |9| > |-3| + |5| = 8 \end{cases}$$

Aparentemente no tiene la diagonal estrictamente dominante, pero si intercambiamos las filas 1ª y 2ª, el sistema es equivalente y la solución es la misma.

$$\begin{aligned} -5x + y - 2z &= -13 \\ 3x \text{ v } 6y + 2z &= 20 \\ -3x + 5y + 9z &= 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 3 & -6 & 2 \\ -3 & 5 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} |-5| > |1| + |-2| = 3 \\ |-6| > |3| + |2| = 5 \\ |9| > |-3| + |5| = 8 \end{cases}$$

Ahora la matriz es estrictamente dominante en la diagonal.

Si la matriz A de un sistema de ecuaciones lineales es estrictamente dominante en la diagonal, las iteraciones de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel convergen a la solución única.

II) Parada y errores

Cuando resolvemos sistemas de ecuaciones por iteración, el punto de partida es saber cuando debemos parar el proceso de aproximar las soluciones, siempre que no nos fijen el nº de aproximaciones, así como el error cometido en las soluciones; por lo que antes de comenzar debemos fijar el 'error' y de acuerdo con ello, el número de iteraciones vendrá dado por las soluciones con el error previsible.

Utilizaremos el error siguiente

$$\boxed{\epsilon = \frac{\max\{|x_i - x_{i-1}|, |y_i - y_{i-1}|, |z_i - z_{i-1}| \ldots\ldots\}}{\max\{|x_i|, |y_i|, |z_i| \ldots\ldots\}}}$$

El error será el cociente entre el máximo de las diferencias de las últimas y las anteúltimas aproximaciones de todas las variables en valor absoluto y, el máximo de las últimas aproximaciones en valor absoluto.

Fijado el error permitido para las soluciones, el número de aproximaciones vendrá determinado por el resultado de las soluciones dentro del margen de error preestablecido.

III) Método de Jacobi

Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

1^er^ paso: Despejamos cada variable de la diagonal (siempre se puede arreglar para que en la diagonal todos los elementos sean distintos de cero) en función de las otras:

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - \ldots\ldots\ldots a_{1n}x_n)$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - \ldots\ldots\ldots a_{2n}x_n)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad [1]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - \ldots\ldots\ldots a_{n-1n}x_{n-1})$$

2º paso: Se parte de una aproximación inicial, por comodidad dando los valores nulos a las variables

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots\ldots\ldots x_n = 0$$

La 1ª aproximación será:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

$$x_2 = \frac{b_2}{a_{22}}$$

$$x_3 = \frac{b_3}{a_{33}}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

3er paso: La 2ª aproximación será sustituyendo los valores anteriores en las fórmulas iniciales **[1]**, obteniendo una nueva aproximación.

Así sucesivamente hasta cumplir el error preestablecido.

Ejemplo 2.42

Resolver por el método de Jacobi con un error menor de 10^{-2} el sistema siguiente

$$\begin{aligned} 3x - y + z &= 4 \\ 2x + 5y + 2z &= -5 \\ x + 2y + 4z &= 20 \end{aligned}$$

$$x = \frac{1}{3}(y - z + 4) = 0,333(y - z + 4)$$
$$y = \frac{1}{5}(-5 - 2x - 2z) = -0,2(5 + 2x + 2z)$$
$$z = \frac{1}{4}(20 - x - 2y) = -0,25(x + 2y - 20)$$

Solución inicial: $\mathbf{x = y = z = 0}$

1ª Iteración:

$$x = 0,3333\ (0 - 0 + 4) = 1,3333$$
$$y = -0,2\ (5 + 2\ 0 + 2\ 0) = -1$$
$$z = -0,25\ (0 + 2\ 0 - 20) = 5$$

2ª Iteración:

$$x = 0,3333\ (-1 - 5 + 4) = -0,6666$$
$$y = -0,2\ (2\,1,3333 + 2\,5 + 5) = -3,5333$$
$$z = -0,25\ (1,3333 - 2 - 20) = 5,1666$$

3ª Iteración:

$$x = 0,3333\ (-3,5333 - 5,1666 + 4) = -1,5666$$
$$y = -0,2\ (2\ \ 0,6666 + 2\,5,1666 + 5) = -2,8$$
$$z = -0,25\ (0,6666 - 2\ \ 3,5333 - 2\,10) = 6,9333$$

Error

$$\varepsilon = \frac{\mathbf{max}\{|\mathbf{-1,5666-(-0,6666)}|, |\mathbf{-2,8-(-3,5333}|, |\mathbf{6,9333-5,1666}|\}}{\mathbf{max}\{|\mathbf{-1,5666}|, |\mathbf{-2,8}|, |\mathbf{6,9333}|\}} =$$

$$\frac{\mathbf{max}\{|\mathbf{-0,9}|, |\mathbf{0,7333}|, |\mathbf{1,7667}|\}}{\mathbf{6,9333}} = \frac{\mathbf{1,7667}}{\mathbf{6,9333}} \mathbf{=0,25}$$

4ª Iteración:

$$x = 0,3333\ (-2,8 - 6,9333 + 4) = -1,9111$$
$$y = -0,2\ (2\ \ (-1,5666) + 2\,6,9333 + 5) = -3,1466$$
$$z = -0,25\ (-1,5666 - 2\ \ 2,8 - 2\,10) = 6,7916$$

5ª Iteración:

$$x = 0,3333\ (-3,1466 - 6,716 + 4) = -1,9794$$
$$y = -0,2\ (2\ (-1,9111) + 2\ 6,7916 + 5) = -2,9522$$
$$z = -0,25\ (-1,9111 - 2\ 3,1466 - 2\,10) = 7,0511$$

$$\varepsilon = \frac{\max\{|-1,9794-(--1,9111)|,|-2,9522-(-3,1466|,|7,0511-6,7916|\}}{\max\{|-1,9794|,|-2,9522|,|7,0511|\}} =$$

$$\frac{\max\{|-0,0683|,|0,1944|,|0,2595|\}}{7,0511} = \frac{0,2595}{7,0511} = 0,0368$$

6ª Iteración:

$$x = 0,3333\ (-2,9522 - 7,0511 + 4) = -2,0011$$
$$y = -0,2\ (2\ (-1,9794) + 2\ 7,0511 + 5) = -3,0286$$
$$z = -0,25\ (-1,9794 - 2\ 2,9522 - 2\,10) = 6,9709$$

7ª Iteración:

$$x = 0,3333\ (-3,0286 - 6,9709 + 4) = \mathbf{-1,9998 \approx -2}$$
$$y = -0,2\ (2\ (-2,0011) + 2\ 6,9709 + 5) = \mathbf{-2,9879 \approx -3}$$
$$z = -0,25\ (-2,0011 - 2\ 3,0286 - 2\,10) = \mathbf{7,0146 \approx 7}$$

$$\varepsilon = \frac{\max\{|-1,9998-(-2,0011)|,|-2,9879-(-3,0286)|,|7,0511-6,7916|\}}{\max\{|-1,9998|,|-2,9879|,|7,0146|\}} =$$

$$\frac{\max\{|0,0012|,|0,0407|,|0,0436|\}}{7,0146} = \frac{0,0436}{7,0146} = 0,0062 < 10^{-2}$$

IV) Método de Gauss-Seidel

Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots\dots + a_{3n}x_n = b_3$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots\dots + a_{n\,n}x_n = b_n$$

1^{er} paso: Despejamos cada variable de la diagonal en función de las otras variables:

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - \dots\dots a_{1n}x_n)$$
$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - \dots\dots a_{2n}x_n)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad [1]$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_n = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - \dots\dots a_{n-1n}x_{n-1})$$

2º paso: Se hace una aproximación inicial, dando los valores nulos a las variables:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \dots\dots x_n = 0$$

La 1ª aproximación será:

$$x'_1 = \frac{b_1}{a_{11}} \Rightarrow \text{este valor se sustituye en las otras ecuaciones}$$
$$x'_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{12}x'_1) \Rightarrow \text{este valor se sustituye en las otras ecuaciones}$$
$$x'_3 = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{13}x'_1 - a_{22}x'_2) \text{ y asi sucesivamente}$$
$$\dots\dots$$
$$x'_n = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{13}x'_1 - a_{22}x'_2 \dots\dots\dots)$$

3^{er} paso: La 2ª aproximación será sustituyendo los valores anteriores en las fórmulas iniciales **[1], y al tiempo que se van hallando las soluciones**, se emplean esos valores en las siguientes ecuaciones.

Proseguimos sustituyendo las aproximaciones más recientes hasta que determinamos las soluciones con el error establecido de antemano.

Ejemplo 2.43

Resolver por el método de Gauss-Seidel con un error menor de 10^{-2} el sistema siguiente

$$\begin{aligned} 3x - y + z &= 4 \\ 2x + 5y + 2z &= -5 \\ x + 2y + 4z &= 20 \end{aligned}$$

$$x = \frac{1}{3}(y - z + 4) = 0,333(y - z + 4)$$
$$y = \frac{1}{5}(-5 - 2x - 2z) = -0,2(5 + 2x + 2z)$$
$$z = \frac{1}{4}(20 - x - 2y) = -0,25(x + 2y - 20)$$

Solución inicial: $\mathbf{x = y = z = 0}$

1ª Iteración:

$$x = 0,3333\ (0 - 0 + 4) = 1,3333$$
$$y = -0,2\ (5 + 2\ 1,333 + 2\ 0) = -1,5333$$
$$z = -0,25\ (1,3333 + 2\ (-1,5333) - 20) = 5,4333$$

2ª Iteración:

$$x = 0,3333\ (-1,5333 - 5,4333 + 4) = -0,9888$$
$$y = -0,2\ (5 + 2\ (-0,9888) + 2\ 5,4333) = -2,7777$$
$$z = -0,25\ (-0,9888 + 2\ (-2,7777) - 20) = 6,6361$$

3ª Iteración:

$$x = 0,3333\ (-2,7777 - 6,6361 + 4) = -1,8046$$
$$y = -0,2\ (5 + 2\ (-1,8046) + 2\ 6,6361) = -2,9326$$
$$z = -0,25\ (-1,8046 + 2\ (-2,9326) - 20) = 6,9174$$

4ª Iteración:

$$x = 0,3333\ (-2,9326 - 6,9174 + 4) = -1,9500$$
$$y = -0,2\ (5 + 2\ (-1,9500) + 2\ 6,9174) = -2,9869$$
$$z = -0,25\ (-1,9500 + 2\ (-2,9869) - 20) = 6,9809$$

5ª Iteración:

$$\begin{aligned}
x &= 0,3333\ (-2,9869 - 6,9809 + 4) = \mathbf{-1,9893 \approx -2} \\
y &= -0,2\ (5 + 2\ (-1,9893) + 2\ 6,9809) = \mathbf{-2,9966 \approx -3} \\
z &= -0,25\ (-1,9893 + 2\ (-2,9966) - 20) = \mathbf{6,9956 \approx 7}
\end{aligned}$$

Error:

$$\varepsilon = \frac{\mathbf{max}\left\{\left|\mathbf{-1,9893-(-1,9500)}\right|, \left|\mathbf{-2,9966-(-2,9869)}\right|, \left|\mathbf{6,9956-6,9809}\right|\right\}}{\mathbf{max}\left\{\left|\mathbf{-1,9893}\right|, \left|\mathbf{-2,9966}\right|, \left|\mathbf{6,9956}\right|\right\}} =$$

$$\frac{\mathbf{max}\left\{\left|\mathbf{0,0392}\right|, \left|\mathbf{0,0096}\right|, \left|\mathbf{0,0146}\right|\right\}}{\mathbf{6,9956}} = \frac{\mathbf{0,0392}}{\mathbf{6,9956}} \mathbf{=0,0056<10^{-2}}$$

Como norma general, el método de Gauss-Seidel converge más rápidamente que el de Jacobi supuesta la matriz estrictamente dominante en la diagonal como se ha visto en el ejemplo anterior.