ESPACIOS VECTORIALES

Introducción.

La idea de vector está tomada de la Física, donde sirven para representar magnitudes vectoriales como fuerzas, velocidades o aceleraciones. Para ello se emplean vectores de dos componentes en el plano, de tres componentes en el espacio...

Se supone conocida la representación gráfica y manejo de los vectores de $\mathbb{R}^2$ *y de* $\mathbb{R}^3$*.*

En Matemáticas, tratamos de abstraer las propiedades que caracterizan a los vectores para extenderlas también a otro tipo de objetos diferentes de los vectores de la Física.

Esencialmente, el comportamiento que caracteriza a los vectores es el siguiente:

- **Podemos sumar dos vectores y obtenemos otro vector;**
- **Podemos multiplicar un vector por un número (escalar) y obtenemos otro vector.**

Además estas operaciones cumplen ciertas propiedades, que observamos en los vectores de $\mathbb{R}^2$ y de $\mathbb{R}^3$:

En lo sucesivo, utilizaremos habitualmente la siguiente notación: u,v,w (u otras letras latinas) para vectores, mientras que las letras griegas designarán escalares.

Propiedades de la suma de vectores.

- Asociativa: (u+v)+w = u+(v+w)
- Conmutativa: v+u=u+v.
- Existe un elemento neutro, el vector $\vec{0}$, tal que $\vec{0}$ + v = v para cualquier vector v.
- Para cada vector v existe un elemento opuesto, –v, que sumado con él da $\vec{0}$.

Propiedades del producto de un vector por un escalar.

- Asociativa: $\beta(\alpha v) = (\beta\alpha)v$
- Distributivas:
  - Respecto de la suma de escalares: $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$
  - Respecto de la suma de vectores: $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
- Existe un elemento unidad: el escalar 1, tal que 1· v = v para cualquier vector v.

Definición: espacio vectorial.

Cualquier conjunto que posea unas operaciones suma y producto por escalares, cumpliendo todas las propiedades anteriores, diremos que es un <u>espacio vectorial</u>. Los elementos de tal conjunto se llamarán <u>vectores</u> (aunque pueda tratarse de objetos diferentes a los vectores de la Física.)

Diremos que el espacio vectorial es <u>real</u> o <u>complejo</u>, según sean los escalares.

• Otras propiedades de los espacios vectoriales pueden deducirse de las anteriores propiedades básicas. Por ejemplo:

Si α **v** = $\vec{0}$ (α escalar, **v** vector) entonces o bien es $\alpha = 0$ o bien es **v** = $\vec{0}$.

Ejemplos de espacios vectoriales.

1) El espacio $\mathbb{R}^n$, formado por los vectores de n componentes $(x_1, \ldots, x_n)$ **es un espacio vectorial real**, en el que se pueden sumar vectores y multiplicar por un escalar (real) de la forma habitual.

Se puede comprobar que se cumplen las propiedades requeridas para ambas operaciones.
El vector cero es (0,. . .,0).

No es un espacio vectorial complejo, pues no podemos multiplicar por escalares complejos (si lo hacemos, el resultado no se mantendrá dentro de $\mathbb{R}^n$).

2) Consideremos el conjunto $\mathbb{P}_2$ de los **polinomios de grado ≤ 2 con coeficientes reales**:

$$\mathbb{P}_2 = \{ ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{R} \}$$

Es un espacio vectorial real, pues podemos sumar dos elementos de $\mathbb{P}_2$ y obtenemos otro elemento de $\mathbb{P}_2$; también podemos multiplicar un elemento de $\mathbb{P}_2$ por un escalar real y obtenemos otro elemento de $\mathbb{P}_2$. Veámoslo:

- Suma: $(ax^2 + bx + c) + (a'x^2 + b'x + c') = (a+a') x^2 + (b+b') x + (c+c')$ que pertenece a $\mathbb{P}_2$.
- Producto por un escalar real: $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda(ax + bx + c) = \lambda ax^2 + \lambda bx + \lambda c$ que pertenece a $\mathbb{P}_2$.

Se puede comprobar que se cumplen las propiedades requeridas. El vector $\vec{0}$ es el polinomio cero: $0x^2 + 0x + 0$

No es un espacio vectorial complejo, pues al multiplicar por un escalar complejo el resultado podrá ser un polinomio complejo que no pertenece a $\mathbb{P}_2$.

3) Consideremos el conjunto G de los polinomios de grado = 3 (exactamente 3) con coeficientes reales.

No es un espacio vectorial (real ni complejo), pues al sumar dos elementos de G, no está garantizado que el resultado esté en G. En efecto, consideremos los polinomios

$$p = x^3+x^2+x+1 \quad , \quad q = -x^3+x^2+x+1$$

Pertenecen a G, pues su grado es 3. Pero su suma es $p+q = 2x^2+2x+2$ que no pertenece a G (su grado no es 3).

4) Consideremos el conjunto $\mathbb{M}_{2x2}$ (también denotado por $\mathbb{M}_2$) de las **matrices 2x2 con términos reales:**

$$\mathbb{M}_{2x2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Es un espacio vectorial real, pues podemos sumar dos matrices de $\mathbb{M}_{2x2}$ obteniendo otra matriz de $\mathbb{M}_{2x2}$, y multiplicar una matriz de $\mathbb{M}_{2x2}$ por un escalar real obteniendo otra matriz de $\mathbb{M}_{2x2}$. Se puede comprobar que se cumplen las propiedades. El vector $\bar{0}$ es, en este caso, la matriz con todos sus términos nulos.

No es un espacio vectorial complejo.

5) Consideremos el conjunto MC de las **matrices 2x3 con términos complejos.**

Es un espacio vectorial real, pues podemos sumar dos matrices de MC obteniendo otra matriz de MC, y multiplicar un elemento de MC por un escalar **real** obteniendo otra matriz de MC.

También es un espacio vectorial complejo, pues podemos multiplicar una matriz de MC por un escalar **complejo** obteniendo otra matriz de MC.

(Compruébese con elementos genéricos).

6) Consideremos el conjunto ME de las **matrices 3x2 con términos enteros.**

Podemos sumar dos matrices de ME y obtenemos otro elemento de ME:

En efecto, si tomamos $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$ con a, a', b, b', c, c', d, d' enteros,

$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & c+c' \\ b+b' & d+d' \end{pmatrix}$ también tiene términos enteros, luego pertenece a ME.

Sin embargo ME **no es un espacio vectorial real,** pues al multiplicar un elemento de ME por un escalar real no está garantizado que el resultado permanezca dentro de ME. Si el escalar es p.ej. el número real 1.25, el resultado ya no es una matriz con términos enteros.

Por similar razón **tampoco es un espacio vectorial complejo.**

7) El conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos se puede considerar como un espacio vectorial real. En efecto, se pueden sumar dos números complejos obteniéndose otro número complejo; y se puede multiplicar un complejo por un escalar real, obteniéndose otro complejo.

Es decir,

- Suma: $(a+b\boldsymbol{i}) + (c+d\boldsymbol{i}) = (a+c) + (b+d)\boldsymbol{i}$, que es otro número complejo.
- Producto por un escalar real: $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda(a+b\boldsymbol{i}) = \lambda a + \lambda b\boldsymbol{i}$ que es otro número complejo.

La suma y el producto por un escalar cumplen todas las propiedades requeridas. En este caso el vector $\vec{0}$ es el número complejo cero, $0+0\boldsymbol{i}$.

Nótese que aquí los complejos funcionan como vectores (elementos del espacio vectorial $\mathbb{C}$) y los reales como escalares.

Observar además que, en este contexto, el conjunto de los números complejos se comporta igual que el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, identificando el número complejo $a+b\boldsymbol{i}$ con el vector (a,b).

Este es el motivo por el cual se suele representar el plano complejo como si fuera $\mathbb{R}^2$, con la parte real en el eje de abscisas y la parte imaginaria en el eje de ordenadas.

8) El conjunto de las funciones continuas definidas en $\mathbb{R}$: Se pueden sumar dos funciones, y se puede multiplicar una función por un escalar real.

Por ejemplo, las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=\log(x)$ pueden sumarse y resulta otra función $h(x)=x^2+\log(x)$.
La función $g(x)=\log(x)$ puede multiplicarse por el escalar λ y resulta la función $k(x)=\lambda \log(x)$.

Si sumamos dos funciones continuas, el resultado es otra función continua. Si multiplicamos una función continua por un escalar, el resultado es otra función continua.

Las operaciones cumplen las propiedades requeridas. El vector $\vec{0}$ es la función constante 0.

Por tanto se trata de un **espacio vectorial real**.

- Hay muchos otros espacios vectoriales. Gracias a esto, las propiedades que encontremos para espacios vectoriales en general, las podemos aplicar a matrices, polinomios, funciones...

Observación.

En algunos espacios vectoriales reales, distintos de $\mathbb{R}^n$, puede hacerse un “paralelismo” o “identificación” con $\mathbb{R}^n$, para un **n** adecuado.

Por ejemplo, ya hemos visto cómo el espacio vectorial real $\mathbb{C}$ de los números complejos puede identificarse con $\mathbb{R}^2$, correspondiendo el número complejo $a+b\boldsymbol{i}$ al vector (a,b)

Veamos cómo el espacio $\mathbb{P}_2$ = { polinomios de grado ≤ 2 } puede identificarse con $\mathbb{R}^3$: cada polinomio $\mathbf{ax^2+bx+c}$ correspondería al vector **(a,b,c)** de $\mathbb{R}^3$.

Lo mismo ocurre con el espacio de matrices $\mathbb{M}_{2x2}$ = { matrices 2x2 }, que se identifica con $\mathbb{R}^4$, correspondiendo a la matriz $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ el vector (a,b,c,d).

En todos los casos las operaciones de suma y producto por escalar se pueden trasladar paralelamente del espacio considerado a $\mathbb{R}^n$.

Esto hace posible efectuar las operaciones en $\mathbb{R}^n$ en lugar de otros espacios.

SUBESPACIOS VECTORIALES

Dado un espacio vectorial V, podemos considerar una parte S de él que funcione como un espacio vectorial "más pequeño", incluido en V.

Como V es un espacio vectorial, posee unas operaciones (suma, producto por un escalar) que en particular se pueden efectuar en S. Solo necesitaremos que, al efectuarlas, su resultado quede dentro de S.

Definición: Subespacio.

Dado un espacio vectorial V, se dice que un subconjunto S de V es un subespacio vectorial si contiene al vector $\vec{0}$, y si al efectuar las operaciones de suma y producto por escalar entre vectores de S, el resultado permanece en S.

(Se puede decir que S es "cerrado" para las operaciones suma y producto por escalar.)

Es decir:

- $\vec{0} \in$ S .
- Si **v, w** $\in$ S entonces **v** + **w** $\in$ S.
- Si **v** $\in$ S y λ es un escalar, entonces λ**v** $\in$ S.

Ya no hace falta comprobar que se cumplen las propiedades asociativa, conmutativa, etc. puesto que sabemos que se cumplen en V, y por tanto también en S (se dice que S "hereda" las propiedades de las operaciones en V).

Por supuesto si para V utilizamos escalares reales, también para S; si para V utilizamos complejos, también para S.

Ejemplos de subespacios.

1) La recta x=y es un subespacio de $\mathbb{R}^2$. Está formado por los vectores de la forma (a,a).
Contiene al vector (0,0).
Además, es cerrado para la suma y producto por escalar:

- Suma: (a,a) + (b,b) = (a+b, a+b) que también es un elemento de la recta.
- Producto por un escalar: $\lambda \in \mathbb{R}$, λ(a,a) = (λa, λa) que también es un elemento de la recta.

2) El plano XY es un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Está formado por los vectores de la forma (x,y,0). Contiene al vector (0,0,0).
Además, es cerrado para la suma y producto por escalar:

- Suma: (x,y,0) + (x',y',0) = (x+x', y+y', 0) que también es un elemento del plano.
- Producto por un escalar: $\lambda \in \mathbb{R}$, λ(x,y,0)=(λx, λy, 0) que también es un elemento del plano.

Podemos decir que este plano "es como $\mathbb{R}^2$" pero incluido en $\mathbb{R}^3$.

3) ¿Es un subespacio de $\mathbb{R}^2$ el conjunto de los vectores de la forma (a,1)?
No, puesto que no contiene al (0,0).
O también: porque no se puede sumar dentro de este conjunto, por ejemplo (a,1)+(b,1)=(a+b,2) que no pertenece al conjunto.

4) En el espacio $\mathbb{P}_2$ = { polinomios de grado ≤ 2 }, el conjunto de los polinomios de grado ≤1 forma un subespacio. En efecto, contiene al polinomio cero, y podemos sumar y multiplicar por un escalar sin salir del conjunto:

- Suma: (ax+b) + (a'x+b') = (a+a')x + (b+b') que también es un polinomio de grado ≤1.
- Producto por escalar: $\lambda \in \mathbb{R}$, λ(ax+b)= λax+λb que también es un polinomio de grado ≤1.

5) En $\mathbb{M}_2$ = { matrices 2x2 }, el conjunto de las matrices simétricas $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ es un subespacio.
Contiene a la matriz nula, y es cerrado para las operaciones:

- Suma: $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ b+b' & c+c' \end{pmatrix}$ que también es una matriz simétrica.
- Producto por escalar: $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda b & \lambda c \end{pmatrix}$ que también es una matriz simétrica.

6) Geométricamente, los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ son rectas, planos, y solo uno de ellos es un punto, el $\{\vec{0}\}$.

Las curvas o las superficies curvas no son subespacios; tampoco las figuras geométricas finitas, como círculos o polígonos en el plano, esferas o poliedros en el espacio.

(Comprobar gráficamente que no pueden sumarse vectores dentro de este tipo de conjuntos)

7) En todo espacio vectorial existen el subespacio cero, formado solamente por el vector $\{\vec{0}\}$, y el subespacio total, formado por todos los vectores del espacio.

Descripción de los subespacios de $\mathcal{R}^n$.

Los subespacios de $\mathbb{R}^n$ pueden describirse de dos formas: implícita y paramétrica.

- **Forma implícita**: Mediante ecuaciones. Los vectores que verifiquen las ecuaciones son los que pertenecen al subespacio.
- **Forma paramétrica**: Mediante una expresión con parámetros, los cuales al tomar distintos valores producen todos los vectores del subespacio.

Para pasar de una a otra forma:

- De la forma implícita a la paramétrica: Basta considerar las ecuaciones implícitas como un sistema, y resolverlo. La solución general del sistema (que podrá depender de parámetros) es la expresión paramétrica.
- De la forma paramétrica a la implícita: Podemos decir, aunque no es un método riguroso, que se trata de "describir" mediante ecuaciones cómo es el vector genéricos del subespacio.

Ayudará el conocer qué número de ecuaciones es necesario (lo que se verá más adelante).

Ejemplos:

1) En $\mathbb{R}^2$, la recta bisectriz del primer cuadrante puede describirse en implícitas como { y=x }, y en paramétricas como $\{ (\lambda,\lambda) : \lambda \in \mathbb{R} \}$

2) En $\mathbb{R}^3$, dado el subespacio en paramétricas $\{ (\alpha, \beta, \alpha-\beta) : \alpha,\beta \in \mathbb{R} \}$, su forma implícita es la ecuación { z=x–y } .

3) En $\mathbb{R}^3$, dado el subespacio en paramétricas $\{ (\lambda, \lambda, 3\lambda) : \lambda \in \mathbb{R} \}$, para describirlo en forma implícita necesitamos dos ecuaciones: $\begin{cases} y = x \\ z = 3x \end{cases}$

4) Consideremos el subespacio de $\mathbb{R}^3$ dado en implícitas por $\begin{cases} x + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$

¿Cuál es su forma paramétrica? Para ello resolvemos el sistema, que es compatible indeterminado. La solución depende de un parámetro y es $\{ (\lambda, -\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R} \}$.

5) El subespacio cero y el subespacio total constituyen un caso especial. Por ejemplo en $\mathbb{R}^3$:

- El subespacio { (0,0,0) } tiene como ecuaciones implícitas $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$

Su forma paramétrica es (0,0,0): no hay parámetros, pues como se trata de un solo punto, no se puede variar nada.

Por el contrario el subespacio total $\mathbb{R}^3$ tiene como forma paramétrica $\{ (\alpha,\beta,\gamma) : \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R} \}$ (tres parámetros variando libremente, pues no hay ninguna limitación).
Ecuaciones implícitas no tiene ninguna, pues no hay restricción alguna que imponer.

Relación entre la forma implícita y paramétrica.

Si S es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, la forma implícita y paramétrica de S satisfacen en general la siguiente relación:

Nº de ecuaciones implícitas + Nº de parámetros = n.

Comprobar esta relación en los ejemplos anteriores.

Sin embargo para que esto sea cierto debe cumplirse que las ecuaciones implícitas sean independientes entre sí, es decir, que ninguna sea combinación lineal de otras. Esto significa que, considerando las ecuaciones como un sistema, no debe “sobrar” ninguna ecuación: es decir, que la matriz de coeficientes tenga **rango** igual al **número de ecuaciones.**

También los parámetros deben ser independientes entre sí: por ejemplo en la expresión paramétrica **$(\alpha+\beta, \alpha+\beta, 0)$,** que en $\mathbb{R}^3$ corresponde a la forma implícita **{x=y , z=0},** no se cumple la relación anterior: $2+2 \neq 3$. Esto ocurre porque los dos dos parámetros no son independientes. En realidad puede sustituirse $\alpha+\beta$ por un solo parámetro λ y así tendríamos **$(\lambda, \lambda, 0)$** y ya se cumple $2+1=3$.

(Esto será más fácil de comprobar más adelante, en el punto *“Bases y dimensión”,* pues el número de parámetros independientes es igual a la dimensión del subespacio).

Inclusión de subespacios.

Dados dos subespacios A y B, puede ocurrir que uno esté incluido en otro (una recta dentro de un plano, por ejemplo).

Se dice que A está contenido o incluido en B (y se denota $A \subset B$) si todos los elementos de A están también en B.

En cualquier espacio vectorial V, el subespacio $\{\vec{0}\}$ está contenido en todos los demás subespacios; mientras que todos ellos están contenidos en el total V.

Veamos cómo reconocer si un subespacio está incluido en otro.

- En forma implícita: Si las ecuaciones de B están incluidas en las de A, entonces $A \subset B$. (Cuantas más ecuaciones implícitas, más pequeño es el subespacio).

- En forma paramétrica: Para ver si $A \subset B$, tendremos que ver si todo vector genérico de A, está en B.

Ejemplo

1) En $\mathbb{R}^3$**,** sean los siguientes subespacios dados en implícitas:

$A=\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$ $\qquad B=\{\, y=0 \,\}$

Tenemos que $A \subset B$, pues todo vector que satisfaga las dos ecuaciones de A, es decir que cumpla y=0, z=0, también satisface la ecuación de B, y=0.

2) En $\mathbb{R}^3$, sean los siguientes subespacios dados en paramétricas:

A= { $(\lambda,0,0)$: $\lambda \in \mathbb{R}$ }   b= { $(\alpha,0,\beta)$: $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ }

Tenemos que A $\subset$ B , pues todo vector de la forma $(\lambda,0,0)$ también es de la forma $(\alpha,0,\beta)$, tomando $\beta=0$.

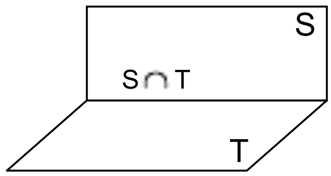
Ambos ejemplos son en realidad el mismo, pues se trata del eje X contenido en el plano XZ.

OPERACIONES CON SUBESPACIOS

A partir de dos subespacios podemos construir otro efectuando las operaciones de suma o intersección de subespacios.

1. Intersección de subespacios.

La intersección, indicada por el símbolo $\cap$, puede aplicarse a conjuntos cualesquiera, no solo a espacios vectoriales. Consiste en encontrar los elementos comunes a dos conjuntos.



Por ejemplo, la intersección de dos planos en $\mathbb{R}^3$ podrá ser una recta.

Notar que dados dos subespacios cualesquiera, siempre hay vectores comunes a ambos (al menos el $\vec{0}$, que está en todos los subespacios.)

Teorema

La intersección de subespacios es un subespacio.

En efecto, es posible sumar vectores dentro de $S\cap T$, pues por ser S y T subespacios, la suma debe permanecer dentro de S y dentro de T, y por tanto dentro de $S\cap T$. Lo mismo para el producto por escalares.

Cálculo de la intersección.

La forma más sencilla (aunque no la única) de calcular $S\cap T$ es utilizar la expresión implícita de S y de T.

Como buscamos los vectores que verifiquen a la vez ambas condiciones, podremos describir $S\cap T$ considerando conjuntamente las ecuaciones implícitas de S y las de T (formando un sistema con todas ellas).

Este sistema, si es "sencillo", puede considerarse ya como la forma implícita de $S\cap T$.

En todo caso, resolviendo este sistema obtenemos la forma paramétrica de $S\cap T$.

Ejemplos.

1) Sean en $\mathbb{R}^3$ los subespacios S=plano XY, T=plano XZ.

Sus ecuaciones implícitas son: S $\equiv$ { z=0 }, T $\equiv$ { y=0 }

Uniendo ambas tenemos $\begin{cases} z=0 \\ y=0 \end{cases}$ que es la expresión implícita de S$\cap$T.

Se trata por tanto del eje X , { (λ,0) } en paramétricas.

2) Sean en $\mathbb{R}^4$ los subespacios dados por las ecuaciones implícitas

U $\equiv \begin{cases} x+z=0 \\ y+t=0 \end{cases}$ W $\equiv \begin{cases} 2x+3z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$

Uniendo todas las ecuaciones resulta $\begin{cases} x+z = 0 \\ y + t = 0 \\ 2x + 3z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ sistema cuya solución es (0,0,0,0) por tanto U$\cap$W = { (0,0,0,0) }

2. Suma de subespacios.

Dados dos subespacios S, T se define el subespacio suma como:

S+T = { u + v : u $\in$ S , v $\in$ T }

es decir, aquellos vectores que podamos construir sumando un vector de S y uno de T.

Teorema

La suma de subespacios es un subespacio.

Cálculo del subespacio suma.

Al contrario que la intersección, la suma S+T se calcula más fácilmente usando la forma paramétrica de S y de T. Esto nos permite tomar un vector genérico de cada uno de los subespacios y sumarlos, obteniéndose una expresión paramétrica de S+T.

No obstante la forma paramétrica así obtenida puede tener parámetros no independientes.

Más adelante, en el punto *"Sistemas generadores"* se dará otro método para calcular el subespacio suma.

Ejemplo.

Consideremos los subespacios en $\mathbb{R}^3$ dados en paramétricas por:

H={ (α, $\alpha+\beta$, β) : $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$}

K={ (0,0, γ) : $\gamma \in \mathbb{R}$ }

Entonces los elementos de H+K se formarán sumando (α, $\alpha+\beta$, β) + (0,0, γ) = (α, $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$)

es decir, H + K = { (α, $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$) : $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ }

Observación

La intersección $S \cap T$ es un subespacio "más pequeño" que S y que T (está contenido en S y también en T).

Por el contrario la suma S+T es un subespacio "más grande" que S y que T, pues contiene a ambos.

De hecho $S \cap T$ es el mayor subespacio contenido en ambos, y S+T es el menor subespacio que contiene a ambos.

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Definición: Combinación lineal.

Dado un conjunto de vectores $v_1, \dots, v_n$ se llama una combinación lineal de ellos a cualquier vector de la forma

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

donde $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son escalares, llamados coeficientes de la combinación lineal.

Teorema.

Para probar que un conjunto S es subespacio, basta probar que:

La combinación lineal de elementos de S está en S.

(Ello es debido a que calcular una combinación lineal de vectores involucra tanto la suma como el producto por escalares, así que equivale a probar ambas cosas por separado).

Esto se suele expresar diciendo que un subespacio es un conjunto "cerrado" para las combinaciones lineales.

Ejemplo.

Veamos si es subespacio de $\mathbb{R}^2$ el conjunto $U=\{ (\lambda,\lambda) \ : \lambda \in \mathbb{R} \}$.

Tomamos dos elementos genéricos de U, (λ,λ) y (μ,μ). Una combinación lineal de ellos es:

$\alpha(\lambda,\lambda) + \beta(\mu,\mu) = (\alpha\lambda+\beta\mu, \alpha\lambda+\beta\mu)$ que también es un elemento de U.

Por tanto U es subespacio.

Definición: Dependencia lineal.

Se dice que un conjunto de vectores es linealmente dependiente (o ligado) si:

(a) Uno de ellos es combinación lineal de los demás.

Esto se puede expresar también así:

(b) El vector $\vec{0}$ es combinación lineal de ellos (con coeficientes no todos nulos).

Ejemplo

Sean en $\mathbb{R}^2$ los vectores $u=(1,1)$, $v=(0,3)$, $w=(2,5)$.

- Observamos que son linealmente dependientes por **(a):**

  w es combinación lineal de u y v , puesto que $w = v+2u$.
  (pueden encontrarse también otras combinaciones, como $u = \frac{1}{2}w - \frac{1}{2}v$, etc).

- También podemos verlo por **(b):**

  $\vec{0}$ es combinación lineal de u, v , w puesto que $\vec{0} = v+2u-w$, (y los coeficientes de esta combinación lineal son 1, 2, –1 que no son todos nulos).

Observación

Si un conjunto es linealmente dependiente, entonces por **(a)** sabremos que existe algún vector entre ellos que es combinación lineal de los demás. Pero esto no quiere decir que “cualquier” vector de ellos sea combinación lineal de los demás.

Por ejemplo, el siguiente conjunto en $\mathbb{R}^3$ podemos comprobar que es ligado:

u=(1,0,0), v=(0,1,0), w=(1,1,0), k=(0,0,1),

ya que, por (a), tenemos que w = u + v (es decir, w=1u + 1v + 0w), hay un vector que es combinación lineal de los demás. Pero no “cualquier” vector lo es, puesto que k no es combinación lineal de los demás. Esto se puede ver poniendo

$$(0,0,1) = \alpha\,(1,0,0) + \beta\,(0,1,0) + \gamma\,(1,1,0)$$

y viendo que se obtiene un sistema incompatible.

Definición: Independencia lineal.

En caso de que un conjunto de vectores no sea linealmente dependiente, se dice que es linealmente independiente (o libre) .

Por tanto, escribiendo la negación de la definición de dependencia lineal, tendremos que un conjunto de vectores es linealmente independiente cuando:

(a) Ninguno de ellos es combinación lineal de los demás.

O equivalentemente:

(b) El vector $\vec{0}$ no es combinación lineal de ellos, a no ser que la combinación tenga coeficientes todos nulos.

Expresando **(b)** de otra manera,

(b) La única forma de poner $\vec{0}$ como combinación lineal de los vectores, es con todos los coeficientes nulos.

Observación.

La definición de dependencia lineal no es: “ v, w son dependientes si 0v + 0w = $\vec{0}$ ”

Esa afirmación no aporta nada, puesto que se cumple para todos los vectores, dependientes o no.

De lo que se trata, es de ver si esa es la única manera de poner $\vec{0}$ como combinación lineal de ellos.

Ejemplos.

1) Veamos que **u**=(3,1) y **v**=(4,5) en $\mathbb{R}^2$ son linealmente independientes.

Para ello intentaremos poner (0,0) como combinación lineal de ellos, y encontraremos que solo es posible con coeficientes nulos.

$$(0,0) = \alpha\,(3,1) + \beta\,(4,5) \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{r} 3\,\alpha + 4\,\beta = 0 \\ \alpha + 5\,\beta = 0 \end{array}\right\}$$ Este sistema es compatible determinado, por tanto sólo tiene la solución $\alpha=0, \beta=0$.

Así pues, la única forma de poner (0,0) como combinación lineal de **u, v** es con coeficientes α, β nulos. Esto significa que son <u>linealmente independientes</u>.

2) Veamos si son independientes **w**=(3,1) y **k**=(6,2): con el mismo planteamiento,

$$(0,0) = \alpha\,(3,1) + \beta\,(6,2) \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{r} 3\,\alpha + 6\,\beta = 0 \\ \alpha + 2\,\beta = 0 \end{array}\right\}$$ Este sistema es compatible indeterminado.

Esto quiere decir (aun sin resolver el sistema) que existen coeficientes α, β no nulos que permiten poner (0,0) como combinación lineal de **w, k**. Por tanto **w, k** son <u>linealmente dependientes</u>.

3) Veamos si son independientes **u**=(1,0,2), **v**=(4,3,1) y **w**=(5,3,3) en $\mathbb{R}^3$:

$$(0,0,0) = \alpha\,(1,0,2) + \beta\,(4,3,1) + \gamma(5,3,3) \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{r} 3\,\alpha + 4\,\beta + 5\,\gamma = 0 \\ 3\,\beta + 3\,\gamma = 0 \\ 2\,\alpha + \quad \beta + 3\,\gamma = 0 \end{array}\right\}$$

Este sistema es <u>compatible indeterminado</u>, puesto que su matriz es $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ con rango 2.

Esto quiere decir (aun sin resolver el sistema) que existen coeficientes α, β, γ no nulos que permiten poner (0,0,0) como combinación lineal de **u, v, w.** Por tanto son <u>linealmente dependientes</u>.

4) Veamos si son independientes **u**=(3,2,–1), y **v**=(2,2,0) en $\mathbb{R}^3$:

$$(0,0,0) = \alpha\,(3,2,-1) + \beta\,(2,2,0) \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} 3\,\alpha + 2\,\beta = 0 \\ 2\,\alpha + 2\,\beta = 0 \\ -\,\alpha \qquad\; = 0 \end{array}\right\}$$

Este sistema es <u>compatible determinado</u>, puesto que su matriz es:

$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ que tiene rango 2 y hay 2 incógnitas.

Esto quiere decir que la única solución es $\alpha=0, \beta=0$ y por tanto que la única forma de poner (0,0,0) como combinación lineal de **u, v,** es con coeficientes nulos. Por tanto son <u>linealmente independientes</u>.

<u>Observación.</u>

Si observamos los dos últimos ejemplos, veremos que la matriz del sistema está formada por los vectores dados, en columnas.

Hallando el rango de esa matriz vemos si el sistema es compatible determinado o indeterminado, y por tanto si los vectores son dependientes o independientes.

Volveremos sobre esto más tarde (en el punto *"Rango de un conjunto de vectores"*.)

Propiedades de la dependencia / independencia lineal.

1) El conjunto formado por un solo vector **v** no nulo, es libre.

(En efecto, una combinación lineal de v es solamente λv, y $\lambda v=\vec{0}$ solo puede conseguirse con λ=0).

2) Dos vectores **v, w** son linealmente dependientes cuando uno es múltiplo del otro , **v**=λ**w**
(ya que esto equivale a decir que uno es combinación lineal del otro).

3) Todo conjunto que contenga al $\vec{0}$ es ligado.

Veámoslo para 3 vectores: si tenemos { v, w, $\vec{0}$} podemos formar $\vec{0}$ como combinación de ellos:

$$0\,v + 0\,w + 1\,\vec{0} = \vec{0}$$

y los coeficientes de esta combinación lineal son 0, 0, 1 y por tanto no todos nulos.

4) Si un conjunto es ligado, añadiéndole vectores sigue siendo ligado.
(En efecto, si un vector es combinación de otros, aunque añadamos más vectores seguirá siéndolo.)

5) Si un conjunto es libre, quitándole vectores sigue siendo libre.

(En efecto, si no se puede formar $\vec{0}$ como combinación de ellos, al quitar vectores tampoco se podrá)

6) Si un conjunto es libre, se pueden añadir más vectores libres hasta un cierto número *(que será la dimensión del espacio, según veremos más adelante).* Por encima de este número ya no se pueden añadir más vectores libres.

7) Si un conjunto es ligado, quitándole los vectores que son combinación lineal de los demás, llegará a ser libre.
El desarrollo de esta propiedad nos lleva a un nuevo concepto, el de *rango.*

RANGO DE UN CONJUNTO DE VECTORES

Ejemplo.

Consideremos en $\mathbb{R}^2$ el conjunto de vectores (2,0), (0,1), (4,3), (2,5); vamos a aplicar la propiedad 7) anterior.

- Este conjunto es linealmente dependiente puesto que observamos que algún vector es combinación de los demás; concretamente

$$(4,3) = 2\,(2,0) + 3\,(0,1)$$

Suprimimos por tanto el vector (4,3) ; el conjunto restante (2,0), (0,1), (2,5) sigue siendo ligado puesto que

$$(2,5) = 1\ (2,0) + 5\ (0,1)$$

Suprimimos el vector (2,5), el conjunto restante (2,0), (0,1) ya es independiente (son dos vectores y uno no es múltiplo del otro).

- También podríamos haber seguido otro camino, por ejemplo viendo que (2,0) es combinación lineal de los demás (compruébese) y suprimiéndolo. El conjunto restante (0,1), (4,3), (2,5) sigue siendo ligado; vemos que (0,1) es combinación lineal de los demás y lo suprimimos. Llegamos entonces al conjunto (4,3), (2,5) que ya es independiente.

Por los dos caminos llegamos a distintos conjuntos independientes. Pero ambos constan del mismo número de vectores (dos en este caso).

Teorema: Rango de un conjunto de vectores.

Dado un conjunto de vectores, si quitamos aquellos que sean combinación lineal de los demás, queda finalmente un cierto número de vectores, que ya son independientes.

Este número no depende del camino seguido, y se llama rango del conjunto de vectores.

Propiedades del rango.

1) En $\mathbb{R}^n$, el rango de un conjunto de vectores es igual al **rango de la matriz que forman** colocándolos en filas o en columnas (habitualmente se hace por columnas).

2) Dados **m** vectores, **si su rango es m** significa que son **linealmente independientes**.

3) En particular, si tenemos **n** vectores en $\mathbb{R}^n$, la matriz que forman es cuadrada, por lo que se puede calcular su **determinante:**

- Serán independientes si el rango de la matriz es **n**, es decir, si el determinante es no nulo.

- Si el determinante es nulo los vectores son linealmente dependientes.

4) Dado un conjunto de vectores, si al eliminar uno de ellos se conserva el rango del conjunto, entonces dicho vector depende linealmente de los demás.

Si por el contrario al eliminarlo disminuye el rango, entonces es independiente de los demás.

5) Dado un conjunto de vectores, si al añadir un nuevo vector se conserva el rango del conjunto, entonces el nuevo vector depende linealmente de los anteriores.

Si por el contrario al añadirlo aumenta el rango, entonces el nuevo vector es independiente de los anteriores.

Ejemplos.

1. En $\mathbb{R}^4$ determinar el rango de los vectores (1,2,3,4), (0,1,6,–1), (3,3,1,0) :

La matriz que forman por columnas es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ cuyo rango es 3

(lo que puede comprobarse escalonando la matriz).
Esto significa que los 3 vectores son linealmente independientes.

2. En $\mathbb{R}^2$ determinar el rango de los vectores (1,3), (5,8). Como la matriz que forman es cuadrada $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ se puede calcular su determinante. Como este es no nulo, los vectores son linealmente independientes.

3. En $\mathbb{R}^3$ determinar el rango de los vectores u=(1,0,0), v=(0,1,0), w=(1,1,0), k=(0,0,1).

La matriz que forman por columnas es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en la cual (ya está escalonada) se aprecia que el rango es 3. Esto quiere decir que de los 4 vectores, solo 3 son independientes, y el otro es combinación lineal de los demás.

Observación.

En un caso como el 3 anterior, el cálculo del rango nos dice *cuántos* vectores son independientes, pero no *cuáles*. Aunque el rango sea 3, no está garantizado que 3 vectores *cualesquiera* vayan a ser independientes. Por ejemplo en este caso, **u,v,w** no lo son.

Para saber cuáles lo son, se pueden tomar los correspondientes a las columnas pivotales después de escalonar la matriz (en este caso **u, w, k**).

También podemos verlo usando la propiedad **4)** del rango, quitando el vector que no haga disminuir el rango: en este caso podemos quitar **v**. Otra posibilidad es quitar **u**, o también **w**. Pero no podemos quitar **k**, pues entonces disminuiría el rango.

SISTEMAS GENERADORES

Definición: Subespacio generado y sistema generador.

Dado un conjunto de vectores $v_1, \ldots, v_r$, el conjunto de todas las posibles combinaciones lineales de ellos se llama subespacio generado (o engendrado) por $v_1, \ldots, v_r$.

Se dice también que dichos vectores son un sistema generador del subespacio (o del espacio, en su caso).

Observación.

Notar que, dado un conjunto de vectores, el conjunto de todas sus combinaciones lineales es efectivamente un subespacio:

- la suma de dos combinaciones lineales de $v_1, \dots, v_r$ es otra combinación lineal de $v_1, \dots, v_r$.

- el producto de un escalar por una combinación lineal de $v_1, \dots, v_r$ es otra combinación lineal de $v_1, \dots, v_r$.

Ejemplos.

1) En $\mathbb{R}^2$, un vector no nulo v genera una recta (los vectores de la forma αv).

2) En $\mathbb{R}^3$: Dos vectores generan un plano.
Tres vectores que estén en el mismo plano, generan ese plano.
Tres vectores que no estén en el mismo plano, generan todo el espacio $\mathbb{R}^3$.

3) Veamos qué subespacio generan en $\mathbb{R}^3$ los vectores (1,0,0) y (0,1,0): las combinaciones lineales de ellos serán de la forma

α (1,0,0) + β (0,1,0)

es decir de la forma $\{ (\alpha,\beta,0) : \alpha,\beta \in \mathbb{R} \}$ que es la expresión paramétrica del plano XY.

4) Obtener un sistema generador del subespacio $S=\{ (\lambda,\mu,2\lambda+\mu) : \lambda,\mu \in \mathbb{R} \}$ de $\mathbb{R}^3$.

Observemos que

$(\lambda,\mu,2\lambda+\mu) = \lambda(1,0,2)+\mu(0,1,1)$

por tanto los vectores de S son exactamente las combinaciones lineales de (1,0,2) y (0,1,1).

Así pues, estos dos vectores son un sistema generador de S.

Por supuesto pueden encontrarse otros sistemas generadores diferentes para S (de hecho hay infinitas posibilidades).

5) Un sistema generador de $\mathbb{R}^2$ es (1,0), (0,1).
En efecto, todo vector $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ se puede poner como combinación lineal de ellos:
(a,b) puede expresarse como **a (1,0) + b (0,1)**

6) Otro sistema generador de $\mathbb{R}^2$ es (2,1), (1,3), (2,0). Veamos que todo vector $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ se puede poner como combinación lineal de ellos:

$(a,b) = \lambda\,(2,1) + \mu\,(1,3) + \sigma\,(2,0)$ produce un sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} 2\lambda+\mu+2\sigma &= a \\ \lambda+3\mu \quad\; &= b \end{aligned}\right\}$$ (donde las incógnitas son λ,μ,σ mientras que a, b son datos).

Se observa que para cualesquiera datos a, b este sistema es compatible. Así cualquier vector $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ puede ponerse como combinación lineal de (2,1), (1,3), (2,0) y por ello son un sistema generador de $\mathbb{R}^2$.

7) ¿Son los vectores (1,1) y (2,2) un sistema generador de $\mathbb{R}^2$?

Las combinaciones lineales de estos vectores son de la forma α (1,1) + β (2,2), es decir,

$(\alpha + 2\beta, \alpha + 2\beta)$.

Se observa pues, que solo podemos generar vectores que tengan sus dos componentes iguales. No podemos generar otros vectores como (3,4). (Si se intenta poner (3,4) como combinación lineal de (1,1) y (2,2) se obtiene un sistema incompatible).

Por ello, (1,1) y (2,2) no forman un sistema generador de $\mathbb{R}^2$.

8) El espacio que generan (1,1) y (2,2) no es $\mathbb{R}^2$. ¿Cuál es?
Se trata de la recta $\{ (\alpha,\alpha) : \alpha \in \mathbb{R} \}$, es decir la bisectriz del primer cuadrante.

De hecho para generar esta recta bastaría con uno de los dos vectores.

9) Hallar un sistema generador del subespacio { x = y } de $\mathbb{R}^3$.
Para ello obtenemos primero la forma paramétrica, que es $\{ (\alpha,\alpha,\beta) : \alpha,\beta \in \mathbb{R} \}$.
Entonces, $(\alpha,\alpha,\beta) = \alpha(1, 1, 0)+\beta(0, 0, 1)$.
Así pues, (1,1,0) y (0,0,1) son un sistema generador del subespacio dado.

Observación

¿Cuándo un vector **u** pertenece al subespacio generado por otros vectores $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}$?

Esto ocurrirá si **u** es combinación lineal de $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}$. , por tanto podemos plantear tal combinación lineal, lo que conducirá a un sistema de ecuaciones, y ver si es compatible o incompatible.

Ejemplo

En $\mathbb{R}^3$, ¿pertenece **u**=(1,2,3) al subespacio generado por **v**=(4,5,6), **w**=(7,8,9) ?
Veamos si es posible poner **u** = α **v** + β **w**.

$$(1,2,3) = \alpha\,(4,5,6) + \beta\,(7,8,9) \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} 4\alpha + 7\beta = 1 \\ 5\alpha + 8\beta = 2 \\ 6\alpha + 9\beta = 3 \end{array}\right\}$$

Este sistema es compatible, por tanto **u** pertenece al subespacio.

- Además, observar que el sistema es compatible porque la matriz ampliada $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 5 & 8 & 2 \\ 6 & 9 & 3 \end{pmatrix}$ tiene el mismo rango (=2) que la matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$.

Si los rangos fueran diferentes el sistema sería incompatible.

Notar que la matriz de coeficientes está formada por los vectores **v, w** en columnas, y la matriz ampliada se forma añadiendo la columna **u**.

Esto nos lleva a formular el siguiente

Teorema

Un vector **u** pertenece al subespacio generado por un conjunto de vectores $\mathbf{v_1, \dots, v_n}$ si al añadirlo a estos no aumenta el rango.

(En efecto, ya vimos que si al añadir **u** no aumenta el rango, significa que **u** depende linealmente de $\mathbf{v_1, \dots, v_n}$, es decir, es combinación lineal de ellos).

Sistema generador del subespacio suma.

Hemos visto que puede no ser fácil determinar el subespacio suma U+V a partir de la forma paramétrica de U y de V. Pero conociendo sistemas generadores de U y de V, podemos usar el siguiente resultado:

Uniendo sistemas generadores de U y de V, se obtiene un sistema generador de U+V.

Ejemplo.

Sean en $\mathbb{R}^3$ los subespacios:

U=plano XY={ $(\alpha, \beta, 0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ } , sistema generador (1,0,0), (0,1,0).

V= plano XZ={ $(\lambda, 0, \mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ } sistema generador (1,0,0), (0,0,1).

Por tanto un sistema generador de U+V es (1,0,0), (0,1,0), (1,0,0), (0,0,1).
El vector repetido (1,0,0) se puede eliminar: un sistema generador más sencillo de U+V es

(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)

Por tanto los elementos de U+V son las combinaciones lineales de (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), es decir:
a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) = (a,b,c) por tanto son todos los vectores del espacio.

Es decir, en este caso el subespacio suma es U+V=$\mathbb{R}^3$.

Teorema: Reducción de los sistemas generadores.

Si de un sistema generador suprimimos los vectores que son combinación lineal de los demás, los restantes siguen generando el mismo subespacio.

- Por tanto, siempre será mejor reducir los sistemas generadores en lo posible, suprimiendo todos aquellos vectores que dependan linealmente de los demás.

Esto llevará al concepto de **base**.

BASES Y DIMENSIÓN DE ESPACIOS VECTORIALES.

Definición: Base. Se llama base de un espacio (o subespacio) vectorial a un conjunto linealmente independiente que sea a la vez sistema generador de dicho espacio o subespacio.

- Por tanto, la dimensión es *el máximo número de vectores linealmente independientes* que podemos tener en el espacio o subespacio.

  En otras palabras, es el *máximo rango* que puede tener un conjunto de vectores de dicho espacio.

  Es también el rango de cualquier sistema generador de dicho espacio.

Propiedades de las bases.

1. Una base de S es un sistema generador minimal de S (lo más pequeño posible).

2. Además es un conjunto independiente maximal dentro de S (lo más grande posible).

3. Una base de S permite expresar todos los vectores de S como combinación lineal de ella, de manera única para cada vector.

Ejemplos de bases.

1. La base canónica de $\mathbb{R}^n$:

$e_1 = (1,0,. . . ,0)$
$e_2 = (0,1,. . . ,0)$
....
$e_n = (0,0,. . . ,1)$

- Son linealmente independientes porque forman un determinante no nulo.

- Son sistema generador de $\mathbb{R}^n$ porque todo vector $(a_1,a_2,. . . ,a_n) \in \mathbb{R}^n$ se puede expresar como combinación lineal de ellos:

$$(a_1,a_2,. . . ,a_n) = a_1(1,0,. . . ,0) + a_2(0,1,. . . ,0) + . . . + a_n(0,0,. . . ,1)$$

2. Otra base de $\mathbb{R}^3$ distinta de la canónica: (1,0,0), (1,1,0), (0,2,-3).

- Son linealmente independientes porque forman un determinante no nulo.

- Son sistema generador de $\mathbb{R}^3$ porque cualquier vector (a,b,c) se puede poner como combinación lineal de ellos. En efecto, dado (a,b,c), buscamos α, β, γ que satisfagan

$$(a,b,c)= \alpha(1,0,0)+ \beta\ (1,1,0)+\gamma(0,2,-3)$$

Se obtiene un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha+\beta = a \\ \beta+2\gamma = b \\ -3\gamma = c \end{array}\right\}$$

en las incógnitas α, β, γ, que es compatible determinado para cualesquiera a, b, c.

3. (1,2,3), (4,5,6), (7,8,9) en $\mathbb{R}^3$ no forman base porque no son linealmente independientes (su determinante es nulo).

4. Base de un subespacio. En $\mathbb{R}^3$, consideremos el subespacio S= plano XY. Veamos que los vectores (3,2,0) , (1,–1,0) forman una base de S.

- Son linealmente independientes, porque uno no es múltiplo del otro.

- Son un sistema generador de S: Dado un vector genérico de S, de la forma (a,b,0), lo podemos poner como combinación lineal de (3,2,0) y (1,–1,0). Para ello, buscamos α, β que cumplan:

$$(a,b,0)= \alpha(3,2,0)+ \beta\ (1,-1,0) \quad \rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} 3\alpha+\beta = a \\ 2\alpha-\beta = b \end{array}\right\} \quad \text{S. C. D. para cualesquiera a,b.}$$

5. Extender un conjunto para que forme base. ¿Es (1,0,2), (1,0,–1) base de $\mathbb{R}^3$?

- Son linealmente independientes, porque uno no es múltiplo del otro.

- Pero no son un sistema generador de $\mathbb{R}^3$, porque no es cierto que todo vector de $\mathbb{R}^3$ pueda ponerse como combinación lineal de ellos. Por ejemplo, el (0,1,0) no se puede poner (resulta un sistema incompatible).

Por tanto no son base de $\mathbb{R}^3$. ¿Puede obtenerse una base de $\mathbb{R}^3$ de algún modo?

Sí, añadiendo algún otro vector de manera que siga siendo independiente de los anteriores, por ejemplo (0,1,0). Así el conjunto (1,0,2), (1,0,–1), (0,1,0) es linealmente independiente, y genera $\mathbb{R}^3$, por tanto es base de $\mathbb{R}^3$.

6. Reducir un conjunto para que forme base. ¿Es (2,0,0), (0,3,0), (4,1,0) base de S=plano XY de $\mathbb{R}^3$?

- Son un sistema generador de S, pero no son independientes (su determinante es nulo).

Por tanto no son base de S. ¿Puede obtenerse una base de S de algún modo?

Sí. Uno de los vectores es combinación lineal de los demás: (4,1,0)=2·(2,0,0) + $\frac{1}{3}$ · (0,3,0).

Suprimimos por tanto (4,1,0) y los restantes vectores (2,0,0), (0,3,0) siguen generando el mismo subespacio S y son independientes. Son por tanto base de S.

Teorema y definición: Dimensión.

Todas las bases de un mismo espacio o subespacio tienen el mismo número de vectores. Se llama dimensión de dicho espacio o subespacio.

Ejemplos de dimensión.

1. $\Re^n$ tiene dimensión n, pues tiene una base de n elementos (p.ej. la canónica).

2. $\mathbf{M}_{2x2}$= {matrices 2x2 con términos reales} tiene dimensión 4. Una base de $\mathbf{M}_{2x2}$ es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. $\mathbf{P}_2$= {polinomios de grado $\leq$ 2 con coeficientes reales} tiene dimensión 3. Una base de $\mathbf{P}_2$ es, por ejemplo, la formada por los tres polinomios siguientes:

$1+0x+0x^2$, $0+x+0x^2$, $0+0x+x^2$ (es decir, los polinomios 1, x, x^2).

Otra base: $1+2x+3x^2$, $4+x^2$, $3–x–5x^2$.

Propiedades de la dimensión.

1. Significado físico de la dimensión: los planos tienen dimensión 2, las rectas dimensión 1, el punto dimensión 0. El subespacio {0} es el único que tiene dimensión 0.

2. La dimensión de un subespacio en $\mathbb{R}^n$, coincide con el número de parámetros libres en su forma paramétrica.

3. Si S y T son subespacios y S está contenido en T, entonces dim S $\leq$ dim T.

Además, si se da la igualdad, dim S = dim T, ambos espacios han de coincidir.

4. El rango de una familia de vectores, es igual a la dimensión del subespacio que generan.

Es decir: si $v_1, v_2, \ldots v_n$ generan un cierto subespacio S, y si el rango de dicho conjunto es r, entonces dim S = r.

(Si un cierto conjunto de vectores tienen rango 2, entonces generan un plano; etc.)

Ejemplo.

En $\mathbb{R}^3$, sea S el subespacio generado por: (1,0,2), (0,–1,–2), (3,3,3), (2,2,0).

Observamos que el rango de este conjunto (= rango de la matriz que forman, por filas o por columnas) es 3. Así por la propiedad **4** , tenemos que dim S = 3. Pero como estamos en $\mathbb{R}^3$, por la propiedad **3** ha de ser S=$\mathbb{R}^3$.

Teorema.

Sea S un espacio o subespacio de dimensión **m**. Entonces,

- Si tenemos **m** vectores linealmente indep. en S, también serán sistema generador de S.
- Si tenemos **m** vectores que generan S, también serán linealmente independientes.

Por tanto, si tenemos un conjunto formado por tantos vectores como indica la dimensión, dichos vectores serán a la vez linealmente independientes y sistema generador, o bien ninguna de las dos cosas.

Así pues, para probar que son base, bastaría probar solamente una de las dos cosas: que son linealmente independientes, o que son sistema generador.

Esto solamente se puede aplicar cuando conocemos la dimensión del espacio y cuando tenemos tantos vectores como indica la dimensión.

Teorema. En un espacio o subespacio de dimensión **m**,

- un conjunto de más de **m** vectores nunca puede ser linealmente independiente.
- un conjunto de menos de **m** vectores nunca puede ser sistema generador.

Así pues, por ejemplo, 3 vectores en $\mathbb{R}^2$ podrán ser o no sistema generador de $\mathbb{R}^2$, pero nunca podrán ser linealmente independientes.

Del mismo modo, 2 vectores en $\mathbb{R}^3$ podrán ser linealmente independientes o no, pero nunca serán sistema generador de $\mathbb{R}^3$ (aunque sí podrán serlo de un subespacio más pequeño).

IMPLICITACIÓN

Vimos ya las formas implícita y paramétrica de subespacios; el paso **de la forma implícita a la paramétrica** es sencillo pues se reduce a resolver un sistema de ecuaciones.

El paso inverso, **de la paramétrica a la implícita**, puede explicarse ahora a la luz de los conocimientos que ya tenemos. Podrá hacerse de dos formas; veámoslo con unos ejemplos.

1) Expresar en forma implícita el subespacio S= { $(\alpha, \beta, 3\alpha-5\beta)$ } de $\mathbb{R}^3$.

1ª forma. Veamos primero cuántas ecuaciones implícitas son necesarias. La forma paramétrica tiene dos parámetros libres. Entonces,

nº ecuaciones	+	nº parámetros libres (es decir, dim S)	=	3 (en $\mathbb{R}^3$)
1	+	2	=	3

Hace falta, por tanto, **1 ecuación implícita**. Tratemos de buscar una relación entre las coordenadas x,y,z del vector genérico $(\alpha, \beta, 3\alpha-5\beta)$

Observamos que *la tercera coorden*ada es *tres veces la primera menos cinco veces la segunda*. Así, la relación es **z = 3x - 5y.** Esta es la forma implícita.

(Nota: las ecuaciones implícitas nunca pueden tener término independiente, pues siempre ha de satisfacerlas el vector cero).

2ª forma. Obtenemos una base de S:

$(\alpha, \beta, 3\alpha-5\beta) = \alpha(1,0,3) + \beta\,(0,1,-5)$ $\rightarrow$ sistema generador (1,0,3), (0,1,-5).

y son linealmente independientes: $rg\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}=2$, luego son base. *(Por tanto dimS = 2).*

Ahora, un vector (x,y,z) de $\Re^3$ pertenecerá a S si es combinación lineal de (1,0,3), (0,1,-5) : por tanto si al añadirlo a ellos, el rango no aumenta y sigue siendo 2.

Debe ser $\mathbf{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 3 & -5 & z \end{pmatrix}\mathbf{=2.}$ Escalonamos esta matriz para ver su rango.

(Notar que el hecho de que sus términos sean incógnitas no impide en absoluto efectuar operaciones elementales en las filas, como en cualquier matriz numérica.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 3 & -5 & z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 5 & z-3x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z-3x+5y \end{pmatrix}$$

Las dos primeras filas de la matriz son no nulas, así que el rango será 2 cuando la tercera fila sea nula, es decir, cuando **z - 3x + 5y = 0.** Esta es la forma implícita buscada. Notar que es la misma que se obtuvo en la 1ª forma.

<u>Otra variante de esta 2ª forma</u>: como la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 3 & -5 & z \end{pmatrix}$ es cuadrada, podemos también hallar su determinante, que resulta ser **z - 3x + 5y .** Cuando el determinante sea nulo, el rango de la matriz es 2. Se obtiene así también la misma ecuación implícita.

2) <u>Expresar en forma implícita el subespacio S= { $(\alpha, \beta, 2\alpha+\beta, -\alpha+3\beta)$ } de $\mathbb{R}^4$</u>.

<u>1ª forma</u>. nº ecuaciones + nº parámetros libres (es decir, dim S) = 4 (en $\mathbb{R}^4$)

2 + 2 = 4

Hacen falta, por tanto, **2 ecuaciones implícitas**. Tratemos de buscar <u>dos</u> relaciones entre las coordenadas x,y,z,t del vector genérico $(\alpha,\beta,2\alpha+\beta,-\alpha+3\beta)$

Estas dos relaciones son “claramente” **z = 2x + y ; t = -x + 3y.**

Así pues, esta es la forma implícita.

(<u>Nota</u>: La forma implícita no es única. Otra posibilidad es: **z = 2x + y ; z + 2t = 7y** *por ejemplo.)*

2ª forma. Obtenemos una base de S:

$(\alpha,\beta,2\alpha+\beta,-\alpha+3\beta)=\alpha(1,0,2,-1)+\beta(0,1,1,3)$

y son linealmente independientes: $\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=2$, luego son base. *(Por tanto dimS = 2).*

Un vector (x,y,z,t) de $\mathbb{R}^4$ pertenecerá a S si es combinación lineal de $(1,0,2,-1),(0,1,1,3)$, por tanto si al añadirlo a ellos, el rango no aumenta y sigue siendo 2.

Debe ser $\textbf{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 2 & 1 & z \\ -1 & 3 & t \end{pmatrix}$**=2.** Escalonamos esta matriz para ver su rango.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 2 & 1 & z \\ -1 & 3 & t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & z-2x \\ 0 & 3 & t+x \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z-2x-y \\ 0 & 0 & t+x-3y \end{pmatrix}$$

Las dos primeras filas de la matriz son no nulas, así que el rango será 2 cuando la tercera y cuarta filas sean nulas, es decir, cuando **z – 2x – y = 0 ; t + x – 3y = 0.** Estas son las ecuaciones implícitas buscadas. Notar que son las mismas que se obtuvieron en la 1ª forma.

3) Expresar en forma implícita el subespacio S= { $(\alpha, 2\alpha, 3\alpha)$ } de $\mathbb{R}^3$.

1ª forma. nº ecuaciones + nº parámetros libres (es decir, dim S) = 3 (en $\mathbb{R}^3$)

2 + 1 = 3

Hacen falta, por tanto, **2 ecuaciones implícitas**. Tratemos de buscar dos relaciones entre las coordenadas x,y,z,t del vector genérico $(\alpha,2\alpha,3\alpha)$.

Estas dos relaciones son **z = 3x ; y = 2x.** Estas son las ecuaciones implícitas.

2ª forma. Obtenemos una base de S:

$(\alpha,2\alpha,3\alpha)=\alpha(1,2,3)$ luego (1,2,3) es una base. *(Por tanto dimS = 1).*

Ahora, un vector (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ pertenecerá a S si es combinación lineal de (1,2,3) por tanto si al añadirlo a él , el rango no aumenta y sigue siendo 1.

Debe ser $\textbf{rg}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & y \\ 3 & z \end{pmatrix}$**=1.** Escalonamos esta matriz para ver su rango.

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & y \\ 3 & z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y-2x \\ 0 & z-3x \end{pmatrix}$$

La primera fila de la matriz es no nula, así que el rango será 1 cuando la tercera y cuarta filas sean nulas, es decir, cuando **y – 2x = 0 ; z – 3x = 0.** Estas son las ecuaciones implícitas buscadas. Notar que son las mismas que se obtuvieron en la 1ª forma.

4) Expresar en forma implícita el subespacio S= { $(\alpha+2\beta, 2\alpha+4\beta, 3\alpha+6\beta)$ } de $\mathbb{R}^3$.

A pesar de las apariencias, pues hay dos parámetros, la dimensión de S no es dos. Ello se debe a que los parámetros no son libres. Se aprecia al hallar una base:

$(\alpha+2\beta, 2\alpha+4\beta, 3\alpha+6\beta) = \alpha(1,2,3) + \beta(2,4,6) \rightarrow$ Sistema generador (1,2,3) , (2,4,6)

Pero no son independientes, luego no son base. Hay que quitar el segundo vector, que es múltiplo del primero: La base es (1,2,3), por tanto se trata del mismo espacio del ***ejemplo 3).***

5) Expresar en forma implícita el subespacio S= { $(6\alpha+2\beta, 0, 0, \alpha+4\beta, 0)$ } de $\mathbb{R}^5$.

Es inmediato por la 1ª forma:

nº ecuaciones	+	nº parámetros libres (es decir, dim S)	=	5 (en $\mathbb{R}^5$)
3	+	2	=	5

Hay que buscar tres relaciones entre las coordenadas x,y,z,t,s del vector genérico $(6\alpha+2\beta, 0, 0, \alpha+4\beta, 0)$.

Obviamente se tiene: **y=0 , z=0 , s=0.** Por tanto, estas son las ecuaciones implícitas.

(Nota: una forma paramétrica más sencilla de este subespacio es $(\lambda, 0, 0, \mu, 0)$).

COORDENADAS Y CAMBIO DE BASE

Definición: Coordenadas.

En un espacio vectorial V, fijada una base $\{v_1,v_2,...v_n\}$, todo vector $u \in V$ puede ponerse de forma única como combinación lineal de dicha base:

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots \alpha_n v_n$$

Los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ se llaman coordenadas del vector u en la base $\{v_1,v_2,...v_n\}$.

Ejemplos de coordenadas.

1. Coordenadas en distintas bases.

En $\mathbb{R}^2$ fijemos la base canónica, { (1,0), (0,1) }. Consideremos el vector **v**=(1,2). Para hallar sus coordenadas en esta base, ponemos u como combinación lineal de la misma:

$(1,2)=\mathbf{1}\cdot(1,0) + \mathbf{2}\cdot(0,1)$

Por tanto, (1,2) son las coordenadas de **v** en base canónica.

Cuando se utiliza la base canónica, obtenemos el sentido usual de “coordenadas”.

Pero cuando se utiliza otra base no es así.

Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$ fijemos ahora la base **B** = { (2,3), (1,–1) } y consideremos el mismo vector **v**=(1,2). Hallemos sus coordenadas en la base **B**. Para poner **v** como combinación lineal de dicha base, planteamos el sistema

$(1,2)= \alpha(2,3)+\beta\ (1,-1)$ cuya solución es $\alpha=\frac{3}{5}$, $\beta=-\frac{1}{5}$. Así pues,

$\mathbf{v} = \frac{3}{5}\ (2,3) - \frac{1}{5}\ (1,-1)$

Por tanto, $\left(\frac{3}{5}\ ,\ -\frac{1}{5}\right)$ son las coordenadas de **v** en base **B**.

<u>No debe confundirse el vector con sus coordenadas</u>; aquí el vector sigue siendo **v**=(1,2), y las coordenadas $\left(\frac{3}{5}\ ,\ -\frac{1}{5}\right)$ son un par de números que indican cómo expresar **v** en combinación lineal de la base B.

2. Si u es el vector que tiene como coordenadas (5, –6) en la base (1,2) (3,4), ¿cuál es el vector u?

Según la definición de coordenadas,

$u = 5\ (1,2) + (-6)\ (3,4) = (-13, -14)$.

3. El vector cero tiene coordenadas (0, . . . ,0) en cualquier base.

4. <u>Coordenadas en un subespacio</u>.

En $\mathbb{R}^3$, sea el subespacio S generado por los vectores (1,1,0) y (0,0,1). (Se trata del plano **x=y** en $\mathbb{R}^3$). Los dos vectores son independientes, por tanto forman base de S.

Consideremos el vector **v** = (2,2,3) perteneciente a S. Hallemos las coordenadas de este vector respecto a la base (1,1,0), (0,0,1) de S. Para ello expresamos **v** como combinación lineal de dicha base:

$(2,2,3)= \mathbf{2}\cdot(1,1,0) + \mathbf{3}\cdot(0,0,1)$

Así pues, las coordenadas de **v** en esta base de S son (2,3).

No debe sorprendernos que **v** tenga sólo 2 coordenadas. El vector **v** ciertamente tendría 3 coordenadas como elemento de $\mathbb{R}^3$, pero tiene 2 coordenadas <u>como elemento del plano S,</u> que es un subespacio de dimensión 2.

Definición: Matriz del cambio de base.

En un espacio vectorial V, dadas dos bases B y B' , se llama matriz de cambio de base (o de cambio de coordenadas) de B a B' a la matriz que contiene en sus columnas las coordenadas de los vectores de la base B expresados en función de la base B'.

Su utilidad es la siguiente: Conocidas las coordenadas de un vector en base B, nos permitirá hallar las coordenadas de dicho vector en base B'.

En efecto, sean ($a_1, a_2, \ldots a_n$) las coordenadas de un vector en base B, y sea P la matriz de cambio de base de B a B'. Entonces:

$$P\cdot\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

obteniéndose así ($b_1, b_2, \ldots b_n$) las coordenadas del vector en base B'.

Ejemplo.

Consideremos en $\mathbb{R}^2$ las dos bases siguientes:

la base del ejemplo (1) anterior, B ={ (2,3), (1, –1) }

la base canónica B' ={ (1,0), (0,1) }

- Vamos a construir la matriz de cambio de base de B a B'.

Para ello debemos expresar los vectores de la base B en función de la base canónica B'.

(2,3) = **2**·(1,0) + **3**·(0,1) → coordenadas (2,3)

(–1,1)= **1**·(1,0) –**1**·(0,1) → coordenadas (1, –1)

Introduciendo estas coordenadas en las columnas de una matriz, tendremos la matriz de cambio de base de B a B':

$$P=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

- Del mismo modo podemos construir la matriz de cambio de base de B' a B.

Para ello expresamos los vectores de la base canónica B' en función de la base B. Podemos hallarlo planteando dos sistemas de ecuaciones, de los cuales se obtendrá

(1,0) = $\frac{1}{5}$(2,3) + $\frac{3}{5}$(1,–1) → coordenadas ($\frac{1}{5}, \frac{3}{5}$)

(0,1)= $\frac{1}{5}$(2,3) –$\frac{2}{5}$(1,–1) → coordenadas ($\frac{1}{5}$, $-\frac{2}{5}$)

Introduciendo estas coordenadas en las columnas de una matriz, tendremos la matriz de cambio de base de B' a B.

$$Q=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Vamos a aplicar estas matrices para hallar las coordenadas en base B del vector **v**=(1,2). Tenemos sus coordenadas en la base canónica B' que son (1,2). Utilizamos la matriz Q de cambio de base de B' a B:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Así hemos obtenido $\left(\frac{3}{5}\ ,\ -\frac{1}{5}\right)$, las coordenadas de v en base B. Comprobar que son las mismas que se obtuvieron en el ejemplo (1) anterior.

Podemos volver a las coordenadas en base B' utilizando la matriz P de cambio de base de B a B':

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Propiedades de las matrices de cambio de base.

1. Toda matriz de cambio de base es cuadrada nxn, donde n es la dimensión del espacio al que se refieren las bases.

2. Toda matriz de cambio de base es inversible (es decir, con determinante no nulo).

Además, la matriz de cambio de B a B' es inversa de la matriz de cambio de B' a B.

3. La matriz de cambio de una base B a la misma base B, es la matriz identidad.

- Comprobar en el ejemplo anterior que P y Q son inversas entre sí. Por tanto, después de hallar P, podríamos haber hallado Q como P^{-1}.
- También se observa en el ejemplo anterior que la matriz más fácil de obtener es la **P**, que pasa de una base B a la base canónica, pues basta escribir en las columnas la base B. La **Q** puede entonces obtenerse como la inversa de P.

$$\begin{tikzcd} \textbf{Base B} \arrow[r, bend left, "\mathbf{P}"] & \textbf{Base canónica} \arrow[l, bend left, "\mathbf{Q}"] \end{tikzcd}$$

$\boxed{\textbf{P = base B en columnas;} \quad \mathbf{Q = P^{-1}}}$

SUMA DIRECTA Y SUBESPACIOS SUPLEMENTARIOS

Dados dos subespacios S, T, consideramos el subespacio suma:

$S+T=\{ u+v : u\in S , v\in T\}$

Uniendo un sistema generador de S con uno de T se obtiene un sistema generador de S+T.

Sin embargo, no siempre es cierto que uniendo una base de S con una base de T se obtenga una base de S+T.

Ejemplo.

En $\mathbb{R}^3$, consideremos los subespacios

S = planoXY, una base es (1,0,0), (0,2,0).

T = planoXZ, una base es (3,0,0), (0,0,4).

S+T resulta ser el espacio total $\mathbb{R}^3$. En efecto, un sistema generador de S+T es la unión de ambos,

(1,0,0), (0,2,0), (3,0,0), (0,0,4)

que es un sistema generador de $\mathbb{R}^3$. Pero no es una base, pues no es linealmente independiente.

(Ello ocurre porque $S\cap T$ no es cero)

Definición: Suma directa.

Se dice que la suma es directa, $S\oplus T$, si su intersección $S\cap T$ es solamente el vector cero.

Teorema.

Si la suma $S\oplus T$ es directa, al unir una base de S y una base de T se obtiene una base de $S\oplus T$.

Ejemplo.

En $\mathbb{R}^3$, consideremos los subespacios

S = planoXY, una base es (1,0,0), (0,2,0).

H = eje Z, una base es (0,0,5)

La suma es directa pues $S\cap H = \{0\}$. El subespacio suma $S\oplus H$ resulta ser el espacio total $\mathbb{R}^3$. Por el teorema anterior, uniendo las bases de S y de H se obtendrá una base del subespacio suma:

(1,0,0), (0,2,0), (0,0,5)

que efectivamente es base de $\mathbb{R}^3$.

Fórmulas de las dimensiones (Grassmann).

Del teorema anterior se deduce la siguiente fórmula: si la suma es directa,

$$\boxed{\dim (S \oplus T) = \dim (S) + \dim (T)}$$

Si la suma no es directa, hay que añadir un término más, teniéndose la fórmula

$$\boxed{\dim (S+T) + \dim (S \cap T) = \dim (S) + \dim (T)}$$

(la primera fórmula se puede obtener de la segunda, pues en el caso de suma directa, el término de la intersección vale cero).

Definición (subespacio suplementario):

Si dos subespacios S, T están en suma directa y además su suma es igual al espacio total, $S \oplus T = V$, se dice que S y T son suplementarios (o complementarios).

Todo subespacio tiene infinitos suplementarios, salvo el {0}, cuyo único suplementario es el total, y el total, cuyo único suplementario es el {0}.

Ejemplo.

En $\mathbb{R}^3$, el suplementario de un plano es cualquier recta que no esté contenida en el plano. Igualmente el suplementario de una recta es cualquier plano que no la contenga.

Cálculo de una base de un suplementario:

Dada una base de S, la prolongamos añadiendo vectores, independientes de los anteriores, hasta formar una base del espacio total. (Para ello podemos elegir cualesquiera vectores, por ejemplo elegirlos entre los de la base canónica).

Los vectores añadidos forman así una base de un suplementario de S.

Ejemplo.

En $\mathbb{R}^4$, sea S el subespacio cuya base es v_1=(1,0,2,0), v_2=(3,0,0,0). Vamos a hallar un suplementario de S. Para ello prolongamos la base dada añadiendo vectores que elegimos entre los de la base canónica. Han de ser independientes de los anteriores.

- No podemos añadir (1,0,0,0) porque no es independiente de los anteriores. (Es múltiplo de v_2).
- Podemos añadir v_3 = (0,1,0,0) pues es independiente de v_1 , v_2 (La matriz formada por v_1, v_2, v_3 tiene rango 3).
- No podemos añadir w = (0,0,1,0) pues no es independiente de los anteriores. (La matriz formada por v_1, v_2, v_3 ,w tiene rango 3; su determinante es cero).
- Podemos añadir v_4 = (0,0,0,1) pues es independiente de v_1 , v_2 (La matriz formada por v_1, v_2, v_3, v_4 tiene rango 4; su determinante es no nulo).

– Ya hemos terminado, pues tenemos 4 vectores independientes y por tanto una base del total $\mathbb{R}^4$. Los dos vectores que hemos añadido, v_3 = (0,1,0,0) y v_4 = (0,0,0,1), forman una base de un suplementario de S.

AUTOEVALUACIÓN - Espacios Vectoriales.

Cada **(●)** *es un punto.*

Hay en total 50 puntos, de los cuales 20 son de cuestiones y 30 de ejercicios.

A) Cuestiones (20 puntos)

C-1) ¿Existe...

(●) **a)**...un subespacio de $\Re^2$ que "se parezca" a $\Re$?

(●) **b)**...un subespacio de $\Re^2$ que "se parezca" a $\Re^3$?

Si existe pon un ejemplo, y si no, razona por qué.

(●) **C-2)** En el espacio vectorial de las matrices 2x2 con términos reales, inventa un ejemplo de subespacio (que no hayas visto en otro lugar).

(●●) **C-3)** **a)** Si S y T son subespacios de $\Re^5$, siendo **dim S = 2** y **dim T = 3**, ¿qué posibilidades hay para las dimensiones de **S+T** y de **S∩T** ?

(●) **b)** Lo mismo pero en $\Re^4$ en lugar de $\Re^5$.

(●) **C-4)** ¿La intersección de dos planos en $\Re^3$ puede ser un solo punto? Explica por qué. *(Puedes razonar como en la cuestión anterior).*

(●) **C-5)** **a)** En $\Re^2$, inventa un conjunto de tres vectores {u,v,w} linealmente dependientes, que tenga rango 2, de modo que se pueda suprimir uno de ellos y se conserve el rango.

(●●) **b)** Lo mismo, pero de modo que no se pueda suprimir uno cualquiera. Señala cuáles se pueden suprimir y cuáles no.

C-6) ¿Pueden ser...

(●) **a)** linealmente independientes cinco vectores en $\Re^4$?

(●) **b)** sistema generador cuatro vectores en $\Re^5$?

Si es posible pon un ejemplo, y si no, razona por qué.

(●) **C-7)** Si **u, v** son linealmente independientes, ¿también lo son **2u** y **3v**? Explica por qué.

(●) **C-8)** ¿Cierto o falso? *"En un espacio vectorial, ningún conjunto linealmente independiente puede tener más vectores que un sistema generador."* Razona la respuesta.

C-9) Dado el vector **v=(1,2)** en $\Re^2$, como es sabido, sus coordenadas en la base canónica { **(1,0), (0,1)** } son (1,2). Si es posible, inventa otra base de modo que las coordenadas de **v** sean...

(•) **a)** (2,1)

(•) **b)** (–1, –2)

(•) **c)** (0, 0)

C-10) ¿Puede esta matriz ser una matriz de cambio de base en algún espacio vectorial? Razona la respuesta.

(•) **a)** $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(•) **b)** $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(•) **c)** $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

B) Ejercicios (30 puntos)

E-1) En $\Re^2$, determina si es o no subespacio vectorial el conjunto...

(•) **a)** $\{ (a+b, a+b+2) : a, b \in \Re \}$

(•) **b)** $\{ (a+1, a+1) : a \in \Re \}$

(•) **E-2)** En $\Re^3$, determina si v=(1,4,16) pertenece al subespacio generado por (1,2,4) y (-1,-1,2).

(•) **E-3)** **a)** Pasar a forma implícita el subespacio de $\Re^3$ dado en paramétricas: $\{ (a+b, a+2b, b) : a, b \in \Re \}$

(•) **b)** Pasar a forma paramétrica el subespacio de $\Re^3$ dado en implícitas: { x-2y+3z=0 }

E-4) Determinar si es o no linealmente independiente el conjunto...

(•) **a)** (1, 2, 0, 1), (-1, -1, -1, 3), (4, 0, -2, 1), (2, 0, 0, 1) en $\Re^4$

(•) **b)** (1, 2, 0, 1) , (2, -3, -3, 3), (-1,12, 6, -3) en $\Re^4$

E-5) Hallar el rango del siguiente conjunto de vectores:

(•) **a)** (1,0,1), (2,0,3), (-1,0,4) en $\Re^3$

(•) **b)** (1,2), (3,-1), (5,0), (1,-2) en $\Re^2$

(•) **E-6)** Extraer del siguiente conjunto en $\Re^4$ una familia linealmente independiente:

(1, 2, 0, 1), (-1, -1, -1, 3), (-1, 1, -3, 11) ,(4, 0, -2, 1), (2, -3, -3, 3),

(•) **E-7)** Dado el subespacio de $\Re^5$ en forma paramétrica (a, a+b, a+b+c, c, 2a-b), obtener un sistema generador del subespacio.

E-8) En $\Re^4$, si S tiene como sistema generador { (1,1,0,0), (1, -1, 0, 0) } y T tiene como sistema generador { (0,2,1,0) , (-1,1,1,0) }, hallar:

(•) **a)** un sistema generador del subespacio S+T.

(•) **b)** una base de S+T.

E-9) Dados los subespacios de $\Re^4$ S= $\left\{\begin{matrix} x+y-z-t=0 \\ 2x+2y-z-t=0 \end{matrix}\right\}$ y T= $\left\{\begin{matrix} x-y=0 \\ z-t=0 \end{matrix}\right\}$, calcular:

(•) **a)** el subespacio S∩T.

(•) **b)** el subespacio S+T *(sugerencia: se puede usar el resultado de a) para hallar la dimensión de S+T).*

E-10) Dado el siguiente subespacio de $\Re^4$ en implícitas, $\left\{\begin{matrix} x+y+z+t=0 \\ y-2z-t=0 \end{matrix}\right\}$ hallar una base y dimensión. Puedes hacerlo mediante el siguiente proceso:

(•) - Pasar las implícitas a paramétricas.

(•) - De la forma paramétrica, obtener un sistema generador.

(•) - Del sistema generador, extraer una base. Dar la dimensión.

(•) **E-11)** **a)** Determinar si (1,2,3) (4,5,6), (7,8,9) forma base de $\Re^3$.

(•) **b)** Determinar si (1,0,1) , (-1,0,2) forma base del subespacio { y=0 } de $\Re^3$.

(•) **E-12)** Extender el siguiente conjunto linealmente independiente hasta que forme base de $\Re^4$. (2,3,0,1), (0,2,0,0).

(•) **E-13)** Reducir el siguiente sistema generador hasta que forme base de $\Re^3$.

(1,2,3) (4,5,6), (7,8,9), (0,1,3)

(••) **E-14)** Dada la base { (0,-1), (1,2) } de $\Re^2$, hallar las coordenadas del vector v= (-3,-8) en dicha base.

E-15) Dadas las bases B={ (1,0), (0,1) } (canónica) y B'={ (0,-1), (1,2) } , hallar:

(•) **a)** la matriz de cambio de base de B' a B .

(••) **b)** la matriz de cambio de base de B a B'

E-16) Determinar si los siguientes subespacios están en suma directa.

(•) **a)** S= <(1,2,0,0), (1,0,0,2)> y T= <(0,0,2,1), (2,0,0,1)> en $\Re^4$

(•) **b)** S= <(1,2,0), (1,0,2)> y T= <(0,2,1), (2,0,1)> en $\Re^3$

(•) **E-17)** Hallar un subespacio suplementario (o complementario) de <(1,2,3), (4,5,6)> en $\Re^3$.

SOLUCIONES A LA AUTOEVALUACIÓN - Espacios Vectoriales.

A) Soluciones a las Cuestiones

Sol. C-1) **a)** Sí, por ejemplo el eje X, formado por los vectores de la forma $(\lambda, 0)$, que se identificarían con el número real λ. También valdría el eje Y, o cualquier otra recta que pase por el origen. (Al ser de dimensión 1, una recta se puede identificar con $\Re$, que también es de dimensión 1).

b) No es posible, pues $\Re^2$ tiene dimensión 2, y no puede contener un espacio que "se parezca" a $\Re^3$, pues éste tendría dimensión 3. Un espacio de dimensión 3 no puede estar contenido en otro de dimensión 2.

Sol. C-2) Hay muchas posibilidades; estos son sólo algunos ejemplos: las matrices de la forma
$\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & 2a \\ 3a & 4a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ 2a & 2b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ b+c & c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & a+b+c \end{pmatrix}$, etc.

Sol. C-3) Utilizamos la fórmula $\dim S + \dim T = \dim(S+T) + \dim(S\cap T)$.

a) El primer miembro de la igualdad es 2+3, por tanto el segundo miembro ha de sumar también 5, así que las posibilidades son:

- $\dim(S+T) = 5$, $\dim(S\cap T) = 0$
- $\dim(S+T) = 4$, $\dim(S\cap T) = 1$
- $\dim(S+T) = 3$, $\dim(S\cap T) = 2$

No hay más posibilidades. No sería correcto "$\dim(S+T) = 2$ y $\dim(S\cap T) = 3$" porque la suma ha de ser "más grande" que S y que T, y la intersección ha de ser "más pequeña" que S y que T.

b) Ahora las posibilidades son:

- $\dim(S+T) = 4$, $\dim(S\cap T) = 1$
- $\dim(S+T) = 3$, $\dim(S\cap T) = 2$

es decir, las mismas que en **a)** excepto la primera. No sería posible $\dim(S+T) = 5$ porque estamos en $\Re^4$, así que no puede haber un subespacio de dimensión 5.

Sol. C-4) Como en la cuestión anterior, $\dim S + \dim T = \dim(S+T) + \dim(S\cap T)$.

Ahora S y T son planos, por tanto ambos de dimensión 2, así que el 2º miembro ha de sumar 4, lo que nos da las posibilidades:

- $\dim(S+T) = 2$, $\dim(S\cap T) = 2$ (plano)
- $\dim(S+T) = 3$, $\dim(S\cap T) = 1$ (recta)

No hay más posibilidades. No es correcto " $\dim(S+T) = 4$ y $\dim(S\cap T) = 0$ " porque estamos en $\Re^3$, así que no puede haber un subespacio de dimensión 4.

Por tanto, en ninguna de las posibilidades $S\cap T$ es un punto (que sería de dimensión 0).

Sol. C-5) **a)** Es fácil, porque prácticamente tres vectores cualesquiera en $\Re^2$ (a no ser que los 3 estén alineados) van a tener rango 2. Por ejemplo,

u=(1,0), v=(0,1), w=(1,1) su rango es 2.

Se puede suprimir uno cualquiera de ellos y el rango sigue siendo 2.

b) Habría que poner 2 vectores que sean linealmente dependientes entre sí, p. ej. u=(1,0) , v=(2,0) , y otro que sea independiente de ellos: p.ej. w= (1,1) . Este conjunto tiene rango 2.

Así, quitando u se conserva el rango; quitando v también; pero no podemos quitar w porque entonces el rango disminuye.

Sol. C-6) a) No, porque nunca pueden ser independientes más vectores de lo que indica la dimensión.

b) No, pues nunca pueden ser sistema generador menos vectores de lo que indica la dimensión.

Sol. C-7) Sí, porque si **u, v** son linealmente independientes, como sólo son 2 vectores, significa que uno no es múltiplo del otro. Entonces **2u** y **3v** tampoco pueden ser uno múltiplo del otro.

(Imagina que **2u** fuese múltiplo de **3v ,** p.ej. 5 veces: $2u = 5 \cdot 3v$, entonces despejando tendríamos $u = \frac{15}{2}$ v , y no puede ser porque **u** y **v** eran independientes).

Sol. C-8) Cierto, pues el conjunto independiente siempre tiene un número de vectores <u>menor o igual</u> que la dimensión del espacio, mientras que el sistema generador siempre tiene un número de vectores <u>mayor o igual</u> que la dimensión del espacio.

Sol. C-9) **a)** La base { **(0,1)** , **(1,0)** } , es decir, la canónica pero con los vectores en orden contrario. Así claramente (1,2) = 2 · **(0,1)** + 1 ·**(1,0).**

b) La base { **(–1,0), (0,–1)**} , es decir, la canónica pero con los vectores cambiados de signo. Así claramente (1,2) = (–1) · **(–1,0)** + (–2) · **(0,–1)**

c) No es posible. En cualquier base, las coordenadas (0,0) son exclusivas del vector nulo.

Sol. C-10) **a)** No, por no ser cuadrada.

b) No, por no ser inversible.

c) Sí, por ser cuadrada e inversible. Sería la matriz de cambio entre ciertas bases de $\Re^2$. (de hecho es la matriz de cambio de B={ (1,3), (1,2) } a la base canónica).

B) Soluciones a los Ejercicios

Sol. E-1) **a) No,** porque no contiene al (0,0), ya que no hay ningún valor de a, b que cumpla a la vez a+b=0 y a+b+2=0.

b) Sí. Es el conjunto de todos los vectores de $\Re^2$ que tienen sus dos coordenadas iguales. Se ve más fácilmente si llamamos b=a+1, entonces el conjunto es { (b,b) }. Es subespacio porque:

- La suma de dos elementos es (b,b)+(c,c)=(b+c,b+c) que es otro elemento del conjunto.

- Si λ es un escalar, λ (b,b) = (λb,λb) que es otro elemento del conjunto.

Sol. E-2) *1ª forma*: Plantear el sistema dado por $\alpha(1,2,4)+\beta(-1,-1,2)=(1,4,16)$. Es compatible, por tanto es posible poner v como combinación lineal de (1,2,4) y (-1,-1,2). **Sí pertenece**.

2ª forma: Hallar el rango de los tres vectores y ver que es 2. Por tanto, v es combinación lineal de (1,2,4) y (-1,-1,2). **Sí pertenece.**

Sol. E-3) **a)** *1ª forma*: Como hay 2 parámetros, y estamos en $\Re^3$, hará falta 1 ecuación. "Claramente" ésta es **y=x+z** , es decir, **x-y+z=0.**

2ª forma: Un sistema generador del subespacio es (1,1,0), (1,2,1). Un vector (x,y,z) pertenece al subespacio si el rango de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & y \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix}$ es 2. Esto ocurre cuando **x-y+z=0** (se puede ver calculando el determinante o triangulando la matriz).

b) Resolviendo el sistema de una sola ecuación, la incógnita principal es x, quedando como parámetros y=α, z=β. La solución al sistema es por tanto **($2\alpha-3\beta$, α, β),** que es la forma paramétrica.

Sol. E-4) **a)** Escalonando la matriz se ve que es de rango 4, igual al número de vectores, luego el conjunto es **independiente**. (*Otra forma*: porque el determinante 4x4 que forman, es no nulo).

b) Escalonando la matriz se ve que es de rango 2, menor que el número de vectores, luego el conjunto es **dependiente**. (*Otra forma*: viendo que alguno es combinación lineal de los otros).

Sol. E-5) **a)** Escalonando la matriz se obtiene **rango 2** (2 filas no nulas).
Otra forma: Sin escalonar la matriz. Está claro que la matriz que forman tiene una columna toda nula, así que el determinante es nulo, luego el rango ya no es 3. Sería 2 ó 1. No es 1 porque entonces serían todos los vectores múltiplos uno de otro, y no lo son. Por tanto, **rango 2.**

b) Escalonando la matriz se obtiene **rango 2** (2 filas no nulas).
Otra forma: Sin escalonar la matriz. Está claro que el rango no puede ser más de 2, pues estamos en $\Re^2$ (la matriz sólo tiene 2 filas). Y el rango no es 1 porque entonces serían todos los vectores múltiplos uno de otro, y no lo son. Por tanto, **rango 2.**

Sol. E-6) Haciendo la forma escalonada de la matriz, las columnas pivotales son la 1ª, 2ª y 4ª. Por tanto extraemos los **vectores independientes 1º, 2º y 4º.**

(Hay otras soluciones, por ejemplo 1º, 2º y 5º, o también 3º, 4º y 5º, etc. Pero otras posibilidades no valen, por ejemplo 1º, 2º y 3º no vale, porque no son independientes.)

Sol. E-7) Ponemos (a, a+b, a+b+c, c, 2a-b) = a (1,1,1,0,2) + b (0,1,1,0,-1) + c(0,0,1,1,0). Así, un sistema generador es **(1,1,1,0,2) , (0,1,1,0,-1), (0,0,1,1,0).**

Sol. E-8) a) Un sistema generador de S+T se obtiene uniendo ambos sistemas generadores:

(1,1,0,0), (1, -1, 0, 0), (0,2,1,0) , (-1,1,1,0)

b) Para saber si este sistema generador es base, hay que ver si son independientes, y si no lo son, quedarse con tantos como indique el rango.

<u>1ª forma</u>: Escalonando la matriz se obtiene que el rango es 3 (por tanto no son independientes); las columnas pivotales son la 1ª, 2ª y 3ª y así una base de S+T sería

(1,1,0,0), (1, -1, 0, 0), (0,2,1,0)

<u>2ª forma</u>: Sin escalonar la matriz se ve que su 4ª columna es toda nula, así que el rango ya no es 4. Será 3 o menor. Pero se ve fácilmente que los 3 primeros vectores son independientes, así que el rango es 3 y los 3 primeros vectores forman base: **(1,1,0,0), (1, -1, 0, 0), (0,2,1,0)**

Sol. E-9) a) S∩T se obtiene resolviendo el sistema formado por las 4 ecuaciones. $\begin{cases} x+y-z-t=0 \\ 2x+2y-z-t=0 \\ x-y=0 \\ z-t=0 \end{cases}$

Se observa que el sistema es compatible determinado, y como es homogéneo, su solución única es (0,0,0,0). Por tanto **S∩T = { (0,0,0,0) }, es el subespacio cero.**

b) *<u>1ª forma</u>*: Siguiendo la sugerencia: Por **a)** tenemos que dim(S∩T)=0. También sabemos que:

- dim(S)=2, ya que está definido por 2 ecuaciones independientes en $\Re^4$ y por tanto tendría 4–2=2 parámetros, dimensión 2.
- dim(T)=2 por lo mismo.

Así, usando la fórmula dim(S)+ dim(T) = dim(S+T) + dim(S∩T), obtenemos que dim(S+T)=4.

Entonces S+T es un subespacio de dimensión 4 en $\Re^4$, así que sólo puede ser el total.

Concluimos por tanto que **S+T=**$\boldsymbol{\Re^4}$**.**

2ª forma: Pasamos S y T a paramétricas, resolviendo cada uno de los dos sistemas. Se obtiene lo siguiente:

S={ $(\alpha, -\alpha, \beta, -\beta)$ }, T={ $(\lambda, \lambda, \mu, \mu)$ }

De lo cual se calcula un sistema generador de cada uno:

S= <(1,-1,0,0), (0,0,1,-1)>, T= <(1,1,0,0), (0,0,1,1)>

y así la unión de ambos es un sistema generador de S+T :

S+T= <(1,-1,0,0), (0,0,1,-1), (1,1,0,0), (0,0,1,1)>

y se comprueba (p.ej. escalonando la matriz) que este conjunto tiene rango 4. Entonces S+T es un subespacio de dimensión 4 en $\Re^4$, así que sólo puede ser el total. Concluimos pues, que **S+T=**$\Re^4$.

Sol. E-10) Resolviendo el sistema obtenemos las implícitas: $(-3a-2b,\ 2a+b,\ a, b)$. Poniendo $(-3a-2b,\ 2a+b,\ a, b) = a\,(-3,2,1,0) + b\,(-2,1,0,1)$ se obtiene que un sistema generador es (-3,2,1,0) , (-2,1,0,1). Observamos que estos vectores son independientes (uno no es múltiplo del otro), por tanto **(-3,2,1,0), (-2,1,0,1) forman base y la dimensión del subespacio es 2.**

Sol. E-11) a) No, pues no son independientes (su determinante es nulo; o bien escalonando la matriz se ve que es de rango 2).

b) El subespacio {y=0} en $\Re^3$ es un plano; tiene dimensión 2 (pues está dado por 1 ecuación en $\Re^3$; 3–1=2). Así que los dos vectores serán base de este plano si son independientes. Y son independientes, porque uno no es múltiplo de otro. Por tanto **sí forman base.**

Sol. E-12) Tenemos 2 vectores; para formar una base de $\Re^4$ habrá que añadir otros 2, que sean independientes de los anteriores.

Probemos con vectores de la base canónica: por ejemplo si elegimos (0,0,1,0), (0,0,0,1) tendremos la familia **(2,3,0,1), (0,2,0,0), (1,0,0,0), (0,0,1,0)** que se ve claramente que es de rango 4 (la matriz ya está escalonada). Por tanto esta familia es base de $\Re^4$.

(Los vectores añadidos no tienen por qué ser de la base canónica, valdrían otros si el rango final es 4).

Sol. E-13) Habrá que quedarse con 3 vectores independientes. (Ojo, los 3 primeros no lo son). Para saber cuáles son, escalonamos la matriz y nos quedamos con las columnas pivotales, que son la 1ª, 2ª y 4ª. Por tanto una base será **(1,2,3) (4,5,6), (0,1,3) .**

Sol. E-14) *1ª forma*: Planteamos el sistema (-3,-8) = α (0,-1) + β (1,2) , cuya solución es $\alpha = 2$, $\beta = -3$. Así pues, las coordenadas de v en la base dada son **(2, –3).**

2ª forma: Hallamos la matriz de cambio de base *(ver ejercicio E-15),* y multiplicándola por v se obtiene $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ que son las coordenadas pedidas.

Sol. E-15) a) Basta poner los vectores de la base en columnas, $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

b) Es la matriz inversa de la anterior: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

Sol. E-16) a) La suma será directa si dim(S∩T)=0. Sabemos que tanto S como T tienen dimensión 2, entonces

$$\underset{2}{\dim S} + \underset{2}{\dim T} = \underset{4}{\dim(S+T)} + \underset{0}{\dim(S\cap T)}$$

vemos que el caso dim(S∩T)=0 sólo se da cuando dim(S+T)=4. Y esto ocurrirá en caso de que los vectores (1,2,0,0), (1,0,0,2), (0,0,2,1), (2,0,0,1) que generan S+T sean independientes.

En efecto lo son (la matriz que forman es de rango 4), así que dim(S+T)=4, y dim(S∩T)=0.

Por tanto **la suma es directa.**

b) La suma será directa si dim(S∩T)=0. Sabemos que tanto S como T tienen dimensión 2, entonces

$$\underset{2}{\dim S} + \underset{2}{\dim T} = \underset{4}{\dim(S+T)} + \underset{0}{\dim(S\cap T)}$$

vemos que el caso dim(S∩T)=0 sólo se da cuando dim(S+T)=4. Pero esto es imposible porque estamos en $\Re^3$, ningún subespacio puede tener dimensión 4. Por tanto dim(S+T)=4 no puede ser, y dim(S∩T)=0 tampoco. **La suma no es directa.**

*- También es posible, tanto en **a)** como en **b)**, calcular explícitamente la intersección y ver si es el subespacio cero o no (aunque lleva más trabajo).*

Sol. E-17) Añadimos vectores hasta formar una base de $\Re^3$: será necesario añadir 1 vector, que sea independiente de los anteriores. Por ejemplo (1,0,0) sirve, porque el rango de (1,2,3),(4,5,6), (1,0,0) es tres.

Así, **la base del suplementario son los vectores añadidos**, en este caso (1,0,0). Por tanto el suplementario encontrado es el espacio generado por este vector (en este caso se trata del eje x)

(Hay infinitas posibilidades más. De hecho cualquier recta no contenida en el subespacio sería un suplementario).