EXAMEN FINAL ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA 5/09/2015

PARTE 1

EJERCICIO 1 (2 PUNTOS) Despeja X de las siguientes ecuaciones reduciendo al máximo posible y suponiendo que las matrices que intervienen son todas cuadradas del mismo orden y poseen matriz inversa:

(a) $5XA + 2I - 6B = C$
(b) $A(X + B) = CX$

EJERCICIO 2 (4 PUNTOS) Discute y resuelve si es posible el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - y - z - 3t = 2 \\ x + 2y - 3z + t = 1 \\ 7x - y - 6z - 8t = 7 \\ 4x + 3y - 7z - t = 4 \end{cases}$$

EJERCICIO 3 (4 PUNTOS) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha & 0 \\ 2 & 4 & \alpha & 1 \\ 2 & 3 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Calcula el rango en función del parámetro (2 p)
(b) Para $\alpha = 2$ calcula la forma escalonada reducida de la matriz A (2 p)

PARTE 2

EJERCICIO 1 Sean S y T subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$generados por $S = \{(x, y, z, t)/x - y = 0\}$y $T = \{(1, 1, 2, 1), (2, 3, -1, 1)\}$

(a) Obtener una base del subespacio $S + T$ (2 p)
(b) Estudiar si la suma S+T es directa (0.5 p)
(c) Si la suma anterior no es directa, calcular una base del subespacio $S \cap T$ (2 p)

EJERCICIO 2 Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ $W = \{(\alpha, \alpha - \beta, \beta, \alpha + \beta\}$

(a) Determinar una base para $W^{\perp}$(1.5 p)
(b) Hallar una base ortonormal de $W^{\perp}$ (1.75p)
(c) Hallar la matriz de proyección (2.25 p)

PARTE 3

EJERCICIO 1 Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal con matriz asociada A en base canónica $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Cuál es la dimensión de V? y de W? (0.25 p)
(b) Clasifica en inyectiva, suprayectiva o biyectiva la aplicación teniendo en cuenta la matriz asociada y deduce las dimensiones de la Imagen y del Ker (sin calcular el Ker ni la imagen) (0.75)
(c) Calcular las ecuaciones de la aplicación (0.5)
(d) Calcular una base del Ker f (1p.)
(e) Calcular una base de la Im f (0.5p.)

EJERCICIO 2 Dada la aplicación

$$f: \quad R^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z) \to (x + y, y - z)$$

Además sea $S = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (-1, 1, 1)\}$ y $T = \{(-1, 1), (1, 2)\}$ bases de $\mathbb{R}^{\nvDash}$y $\mathbb{R}^2$respectivamente

(a) Hallar la matriz respecto a las bases canónicas (0.5 p)
(b) Hallar la matriz respecto a las bases S y T (1.75 p)

EJERCICIO 3 *(ENTREGAR EN UNA HOJA SEPARADA)* Un operador lineal definido en un espacio vectorial de dimensión tres está caracterizado por la matriz simétrica $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Calcular:

(a) Valores propios y vectores propios de f (0.75 p)
(b) Estudiar la Diagonalización de , así como calcular la matriz de f respecto de esta base de vectores propios. (Llamarla D). Relación entre las matrices A y D (1.75 p).
(c) Calcular las ecuaciones implícitas de los subespacios invariantes (1 p)
(d) Calcular A^{17}(0.75 p)
(e) Calcular la traza de la matriz A y ver que coincide con la de la matriz diagonal (0.5 p)

ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

EXAMEN FINAL 23 DE ENERO DE 2015

PARTE 1

EJERCICIO 1 (5 PUNTOS) Calcula la inversa de la siguiente matriz utilizando el método de Gauss

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2 (5 PUNTOS) Estudiar por el método de Gauss el siguiente sistema en función de los parámetros m y resolver para todos los casos.

$$\begin{cases} mx - y + z = 0 \\ x + 2y - mz = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

PARTE 2

EJERCICIO 1 Sean S y T subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$generados por $S = \{(1,0,1,1),(1,-1,-1,0),(0,1,2,1)\}$y $T = \{(x,y,z,t)/x - z - t = 0, y + z = 0\}$

(a) Obtener una base y dimensión de S (0.75 p)

(b) Obtener una base y dimensión de T (0.75 p)

(c) Obtener una base y la dimensión de $S + T$. ¿Están S y T en suma directa? (Demostrarlo sin calcular $S \cap T$) (1.75 p)

(d) Obtener una base y la dimensión de $S \cap T$ (1.75p.)

(f) Halla el complemento ortogonal a S y comprueba que cada uno de los vectores de la base $S^{\perp}$es ortogonal a cada uno de los vectores de la base S.(1.5 p.)

(g) Hallar una base ortonormal de $S^{\perp}$ (1.75p)

(h) Calcular la proyección del vector v=(1,1,1,-1) sobre $S^{\perp}$y sobre S (ayuda:utiliza la descomposición ortogonal del vector) (1.75p)

PARTE 3

EJERCICIO 1 Se considera la aplicación lineal

$f: \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$f(x,y,z) \longrightarrow (x+2z, -x-y-z, 2y-3z, x-z)$

(a) La matriz asociada a la aplicación lineal en base canónica (0.5p.)

(b) Base y dimensión del Ker f (1p.)

(c) Base y dimensión de la Im f (1p.)

(d) Explica en función de las dimensiones del Ker y de la Imagen si la aplicación es inyectiva o sobreyectiva (suprayectiva) (0.5 p.)

(e) Dada la base $B = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$y $B' = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$, hallar la matriz asociada a la aplicación en base B y B'. (1.5 p.)

(f) Dada la aplicación lineal (1.5 p.)

$g: \quad \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$g(x,y,z,t) \longrightarrow (x-t, y-z)$

Hallar la aplicación compuesta $h = g \circ f$ y escribir las ecuaciones de h.

EJERCICIO 2 *(ENTREGAR EN UNA HOJA SEPARADA)* Un operador lineal definido en un espacio vectorial de dimensión tres está caracterizado por la matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Estudiar la Diagonalización de f por semejanza ortogonal, así como calcular la matriz de f respecto de esta base de vectores propios. (Llamarla D). Estudiar la relación entre las matrices A y D (2.25 p).

(b) Calcular las ecuaciones implícitas de los subespacios invariantes (0.75 p)

(c) Calcular A^{17}(0.6 p)

(d) Calcular la traza de la matriz A y ver que coincide con la de la matriz diagonal (0.4 p)

ÁLGEBRA LINEAL

SEGUNDO PARCIAL 27 DE NOVIEMBRE de 2014

EJERCICIO 1. (1.5PUNTOS) Indicar si los siguientes subconjuntos son o no subespacios vectoriales de los espacios vectoriales que se especifican en cada apartado

(a) $W_1 = \{(x, y, z, t)\epsilon\mathbb{R}^4/x = 1\}$

(b)$W_2 = \{(x, y)\epsilon\mathbb{R}^2/x - 3y = 0\}$

EJERCICIO 2 (2.5 PUNTOS) En $\mathbb{R}^3$se consideran los siguientes subespacios $S_1 = \{(1, 0, -1), (1, -1, 0)\}$y $S_2 = \{(2, 1, 0), (-2, 0, 1)\}$. Hallar:

(a) Una base y la dimensión de $S_1 + S_2$. Escribir dicha base en paramétricas.

(b) Una base y la dimensión de $S_1 \cap S_2$

EJERCICIO 3. (1.5 PUNTOS) Dadas las bases $B_1 = \{(1, 0), (0, 1)\}$ y $B_2 = \{(2, 1), (-1, 3)\}$hallar las coordenadas en base B_2 del vector v=(14,7) utilizando la matriz de cambio de base.

EJERCICIO 4 (2 PUNTOS) Dado el vector v=(1,2,3).

(a) Hallar su vector simétrico respecto al plano generado por (1,0,1), (0,-2,0), (-1,0,-1)

(b) Hallar el área del triángulo definido por v y su simétrico

EJERCICIO 5 (2.5 PUNTOS) Dado el plano $T = \{(2a, b, b - a) : a, b\epsilon\mathbb{R}\}$

(a) Calcular la proyección ortogonal del vector v=(3,0,3) sobre el plano utilizando la matriz de proyección

(b) Calcular una base ortogonal del complemento ortogonal al subespacio T.

ÁLGEBRA LINEAL

PRIMER PARCIAL 30 de octubre de 2014

EJERCICIO 1. (2 PUNTOS)

(A) Demostrar la igualdad

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ x & x & b & c \\ x & x & x & c \\ x & x & x & x \end{vmatrix} = x(x-a)(x-b)(x-c)$$

(B) Demostrar sin desarrollar que el siguiente determinante es nulo

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

EJERCICIO 2 (2.5 PUNTOS) Hallar la forma escalonada reducida de la siguiente matriz y su rango

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 3. (2.5 PUNTOS) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

encontrar una matriz regular Q tal que QA=B

EJERCICIO 4 (3 PUNTOS) Estudiar por el método de Gauss el siguiente sistema en función de los parámetros a y b y resuelve en el caso en que el sistema sea compatible indeterminado.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ 3x - y - az = b \end{cases}$$