Algebra Lineal y Geometría - Prueba Extraordinaria de Septiembre 6-11-2014

Segunda Prueba

1. En R^3 se consideran los subespacios

$$U = \{(x_1 , x_2 , x_3) / x_1 - 2 x_2 + x_3 = 0 \ , \quad V=\{(3,-1,-1),(1,-1,1),(1,1,-3)\}$$

a) Calcular una base y la dimensión $U \cap V = 0 \quad y \quad U + V$ (2 p)

b) Calcular las ecuaciones cartesianas de $U \cap V = 0 \quad y \ parametricas \quad U + V$ (2 p)

2. Calcular el complemento ortogonal del plano engendrado por los vectores (1, 1,2) y (1, 2,3), le llamamos V (2 p)

b) Calcular la matriz de la proyección ortogonal en la base canónica (2)
c) Calcular la proyección ortogonal del vector (1, 1,7) sobre el plano V(2 p)

Tercera Prueba

4. Diagonalizar ortogonalmente la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (5 p)

5. Sea $f: R^2 \to R^3$ una aplicación lineal definida por f(x,y)=(x+y, - y , y-x) . Calcular respecto de las bases canónicas

a) la matriz asociada a la aplicación lineal en las bases canónicas (0.5 p)
b) La ecuación de la aplicación (0.5 p)
c) Una base del núcleo y dimensión del núcleo y sus ecuaciones implícitas (1.5)
d) Una base de la imagen, su dimensión y sus ecuaciones (1.5 p)
e) Calcular la matriz de la aplicación lineal anterior respecto de las bases B={(1,1),(2,3)}, B'={(1,1,0),(0,2,1),(3,0,2)} (1p)

EXAMEN 2° PARCIAL. ALGEBRA Y GEOMETRIA
Diciembre 2013. Solución

Se presenta para cada ejercicio un único procedimiento de resolución. En todos los casos hay métodos de resolución alternativos. El método presentado es el más simple de los estudiados.

1. Sabiendo que el conjunto de vectores $\{(1,2,3,0),(-3,1,5,0),(6,-2,-10,0),(-1,-1,4,5)\}$ es sistema generador del subespacio vectorial S de $\mathbb{R}^4$, determine:

a) Una base de S.

b) La dimensión de S.

SOLUCIÓN:

Colocando los vectores por columnas, una posible base de S es la formada por los correspondientes a las columnas pivotales. Identificaremos pués cuales son las columnas pivotales, mediante eliminación gaussiana.

$$\begin{bmatrix}1&-3&6&-1\\2&1&-2&-1\\3&5&-10&4\\0&0&0&5\end{bmatrix}\underset{F_{21}(-2)}{\sim}\begin{bmatrix}1&-3&6&-1\\0&7&-14&1\\3&5&-10&4\\0&0&0&5\end{bmatrix}\underset{F_{31}(-3)}{\sim}\begin{bmatrix}1&-3&6&-1\\0&7&-14&1\\0&14&-28&7\\0&0&0&5\end{bmatrix}\underset{F_{32}(-2)}{\sim}\begin{bmatrix}1&-3&6&-1\\0&7&-14&1\\0&0&0&5\\0&0&0&5\end{bmatrix}\underset{F_{43}(-1)}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix}1&-3&6&-1\\0&7&-14&1\\0&0&0&5\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Las columnas pivotales son la primera, la segunda y la cuarta, por tanto una posible base de S es

$$B=\{(1,2,3,0),(-3,1,5,0),(1,-1,4,5)\}$$

Si inicialmente ya nos hubiéramos percatado de que el tercer vector es múltiplo del segundo, entonces excluiríamos directamente ese tercer vector, y la eliminación gaussiana que se realizaría sería la siguiente:

$$\begin{bmatrix}1&-3&-1\\2&1&-1\\3&5&4\\0&0&5\end{bmatrix}\underset{F_{21}(-2)}{\sim}\begin{bmatrix}1&-3&-1\\0&7&1\\3&5&4\\0&0&5\end{bmatrix}\underset{F_{31}(-3)}{\sim}\begin{bmatrix}1&-3&-1\\0&7&1\\0&14&7\\0&0&5\end{bmatrix}\underset{F_{32}(-2)}{\sim}\begin{bmatrix}1&-3&-1\\0&7&1\\0&0&5\\0&0&5\end{bmatrix}\underset{F_{43}(-1)}{\sim}\begin{bmatrix}1&-3&-1\\0&7&1\\0&0&5\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Las tres columnas son pivotales, por tanto los tres vectores considerados (primero, segundo y cuarto de la lista original) forman una posible base de S.

$$B=\{(1,2,3,0),(-3,1,5,0),(1,-1,4,5)\}$$

La dimensión de S es el número de vectores de sus bases, por tanto es 3.

2. Considere las siguientes bases de $\mathbb{R}^2$: $B = \{(1,2),(2,-3)\}$ y $B' = \{(2,-1),(3,1)\}$

Sabiendo que el vector $\vec{v}$ tiene coordenadas (15, 10) en la base B, calcule sus coordenadas respecto de la base B'.

SOLUCIÓN:

Calculamos en primer lugar las coordenadas del vector $\vec{v}$ en la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

$$\vec{v} = 15\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + 10\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}35\\0\end{bmatrix}$$

Obtenemos $\vec{v} = (35, 0)$. Seguidamente expresamos este vector como combinación lineal de los vectores de la base B', puesto que los coeficientes encontrados serán las coordenadas de $\vec{v}$ respecto de esa base.

Las coordenadas se obtienen entonces resolviendo el sistema lineal con la siguiente matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 35\\ -1 & 1 & 0\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 35\\ -1 & 1 & 0\end{array}\right] \underset{F_{12}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 35\end{array}\right] \underset{F_{21}(2)}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0\\ 0 & 5 & 35\end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} c_2 = \frac{35}{5} = 7\\ -c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 7\end{cases}$$

$\boxed{c_1 = 7}$ $\boxed{c_2 = 7}$

Las coordenadas de $\vec{v}$ respecto de la base B' son $(7, 7)$.

3. Dados los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$U : \{ (x,y,z,t) \;/\; 2x + y = 0 \;;\; z = 0 \}$ $\qquad$ $V : \{ (x,y,z,t) \;/\; y - t = 0 \}$

a) Obtenga una base de $U \bigcap V$ (Si $U \bigcap V$ carece de base indíquelo explícitamente).

b) Obtenga una base de $U + V$ y justifique si la suma es o no suma directa.

c) Obtenga una base de $U^{\perp}$.

d) Obtenga la dimensión de $V^{\perp}$.

SOLUCIÓN:

a) Los vectores de la intersección son los que cumplen las ecuaciones de U y las ecuaciones de V a la vez, es decir, las soluciones del sistema lineal en el que se incluyen las ecuaciones de los dos subespacios.

Ecuaciones de $U \bigcap V$: $\begin{cases} 2x + y = 0\\ z = 0\\ y - t = 0\end{cases}$

(Nótese que hasta que no se realice la eliminación gaussiana no se sabrá si las ecuaciones son independientes o no).

Resolvemos el sistema mediante eliminación gaussiana de su matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0\end{array}\right] \underset{F_{23}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} z = 0\\ y = t\\ 2x + y = 0 \Rightarrow x = -y/2 = -t/2\end{cases}$$

Por tanto la solución general, es decir, los vectores de $U \bigcap V$, son los de la forma:

$\{(x,y,z,t)=(-t/2,t,0,t)\ \ \forall\ \ t\in\mathbb{R}\}$

Una posible base de $U\bigcap V$ es $\{(-1/2,1,0,1)\}$
Otra posible base, sin fracciones, es $\{(1,-2,0,-2)\}$

b) La unión de una base de U y de una base de V constituye un sistema generador del subespacio suma $U+V$.

Una vez conocido el sistema generador, para transformarlo en base sólo tenemos que quitar los vectores linealmente dependientes:

- Sistema generador de U

  $\begin{cases}2x+y=0\\ z=0\end{cases} \Rightarrow y=-2x\ ,\ z=0\ ,\ t=t$ (dos parámetros libres). Por tanto un s.g. posible (que además es base) es el siguiente:

  $\{(1,-2,0,0),(0,0,0,1)\}$

- Sistema generador de V

  $\{\,y-t=0 \Rightarrow x=x\ ,\ y=t\ ,\ z=z\ ,\ t=t$ (tres parámetros libres). Por tanto un s.g. posible (que además es base) es el siguiente:

  $\{(1,0,0,0),(0,1,0,1),(0,0,1,0)\}$

Sistema generador de $U+V$:

$\{(1,0,0,0),(0,1,0,1),(0,0,1,0),(1,-2,0,0),(0,0,0,1)\}$

La base la forman los vectores correspondientes a las columnas pivotales, que reconoceremos mediante la eliminación gaussiana.

$$\begin{bmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&-2&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1\end{bmatrix}\underset{F_{42}(-1)}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&-2&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&2&1\end{bmatrix}$$

Los columnas pivotales son las cuatro primeras, por tanto una base de $U+V$ la forman los cuatro primeros vectores.
Una posible base de $U+V$ es entonces $\{(1,0,0,0),(0,1,0,1),(0,0,1,0),(1,-2,0,0)\}$

Por otra parte, al quedar demostrado que el subespacio $U+V$ de $\mathbb{R}^4$ es de dimensión 4 (por tener cuatro vectores base), se tiene que $U+V=\mathbb{R}^4$, por tanto podríamos tomar como base de $U+V$ la base canónica de $\mathbb{R}^4$, $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$

c) Obtenga una base de $U^\perp$.

Una posible base de $U^\perp$ la forman los coeficientes de sus ecuaciones implícitas, por tanto:

Ec. implícitas: $\begin{cases}2x+y=0\\ z=0\end{cases} \Rightarrow$ Base $=\{(2,1,0,0),(0,0,1,0)\}$

d) Obtenga la dimensión de $V^\perp$.

V tiene dimensión 3 (una ecuación implícita, 4 variables $-$ una ecuación $=$ dimensión 3 ; además ya vimos que su base tiene tres vectores); por tanto $\dim V^\perp = 4-\dim V = 4-3=1$

4. a) Calcule la ecuación o ecuaciones impícitas del subespacio $F =< (1,2,0,0), (-3,2,8,0), (-1,0,1,1) >$ de $\mathbb{R}^4$.

b) Calcule una base ortonormal de F.

SOLUCIÓN:

a) Los vectores $(x, y, z, t) \in F$ son los que hacen compatible el siguiente sistema lineal:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & x \\ 2 & 2 & 0 & y \\ 0 & 8 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right]$$

Resolviéndolo mediante eliminación gaussiana obtenemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & x \\ 2 & 2 & 0 & y \\ 0 & 8 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right] \underset{F_{21}(-2)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & x \\ 0 & 8 & 2 & y-2x \\ 0 & 8 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right] \underset{F_{32}(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & x \\ 0 & 8 & 2 & y-2x \\ 0 & 0 & -1 & z-y+2x \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right] \underset{F_{43}(1)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & x \\ 0 & 8 & 2 & y-2x \\ 0 & 0 & -1 & z-y+2x \\ 0 & 0 & 0 & z-y+2x+t \end{array}\right]$$

Ha quedado completada la eliminación gaussiana y vemos que el sistema es compatible si y sólo si $2x - y + z + t = 0$. Por tanto F tiene una única ecuación implícita que es la ecuación anterior.

b) Calcule una base ortonormal de F.

El método más sencillo de obtener una base ortogonal de F consiste en ir obteniendo a partir de la ec. implícita sucesivos vectores que cumplan la ecuación y que vayan siendo cada uno ortogonal al anterior, hasta obtener los tres que formen la base ortogonal. Para pasar de base ortogonal a base ortonormal basta con dividir cada vector por su norma.

Podemos tomar por ejemplo como primer vector: $\vec{v}_1 = (0, 0, -1, 1)$ pues cumple la ecuación y es muy sencillo. Seguidamente si tomamos $\vec{v}_2 = (1, 2, 0, 0)$ tenemos un vector también sencillo, que cumple la ecuación, y que es directamente ortogonal al anterior.

Para obtener $\vec{v}_3$ tendremos tres ecuaciones: $\begin{cases} 2x - y + z + t = 0 \\ -z + t = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$

La primera ecuación es la de F, la segunda es la condición de ser ortogonal a $\vec{v}_1$ y la tercera es la condición de ser ortogonal a $\vec{v}_2$.

Realizando operaciones elementales por filas en la matriz ampliada del sistema, nos queda el sistema, más simple, siguiente:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{F_{13}(-2)}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -5y + z + t = 0 \\ -z + t = 0 \end{cases}$$

Tomando t como parámetro se tiene que las soluciones tienen la forma: $z = t$, $y = \frac{z+t}{5} = \frac{2t}{5}$,

$x = -2y = -\frac{4t}{5}$, por tanto, vectorialmente, $(-\frac{4t}{5}, \frac{2t}{5}, t, t)$.
Para $t = 5$ tenemos el vector $\vec{v}_3 = (-4, 2, 5, 5)$.

La base ortogonal encontrada es $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, y la base ortonormal:

$$\{\frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,-1,1), \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0,0), \frac{1}{\sqrt{16+4+25+25}}(-4,2,5,5)\} =$$

$$\{\frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,-1,1), \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0,0), \frac{1}{\sqrt{70}}(-4,2,5,5)\}$$

5. a) Los vectores $\vec{a}_1 = (1, -1, 0)$ y $\vec{a}_2 = (1, 0, 1)$ forman una base de un subespacio bidimensional W de $\mathbb{R}^3$. Encuentre el vector de W más cercano a $\vec{v} = (0, 2, 0)$.
b) Obtenga la distancia de $\vec{v}$ a W.

SOLUCIÓN:

En este problema se debe realizar la descomposición ortogonal siguiente: $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, donde $\vec{v}_1$ es la proyección sobre W y $\vec{v}_2$ la proyección sobre $W^{\perp}$. $\vec{v}_1$ es el vector pedido en el apartado a), y la norma de $\vec{v}_2$ es la longitud pedida en el apartado b).

Ya que $\vec{v}_1$ se calcula como una proyección sobre un subespacio de dimensión 2, y $\vec{v}_2$ como una proyección sobre un subespacio de dimensión 1, es más sencillo calcular en primer lugar $\vec{v}_2$ y seguidamente obtener $\vec{v}_1$ como la diferencia $\vec{v} - \vec{v}_2$.

$\vec{v}_2$ es la proyección sobre la recta $W^{\perp}$, cuyo vector director llamaremos $\vec{n}$.

Un vector con la dirección de $\vec{n}$, perpendicular al plano W, se puede obtener mediante el producto vectorial $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, 1)$$

Tomamos $\vec{n} = (-1, -1, 1)$ y aplicamos la fórmula: $\vec{v}_2 = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \, \vec{n}$

$$\vec{v}_2 = \frac{(0,2,0)(-1,-1,1)}{3} \, (-1,-1,1) = -\frac{2}{3} \, (-1,-1,1) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$$

$$\vec{v}_1 = (0,2,0) - (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) = (-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3})$$

Éste es el vector de W más cercano a $\vec{v}$.

La distancia de $\vec{v}$ a W es la norma de $\vec{v}_2$,

$$\text{dist} = \| (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}) \| = \frac{2}{3} \, \| (1,1,-1) \| = \frac{2}{3} \, \sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Prueba de Algebra 7-9-2013
Primera prueba

1.a) Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -4 & 2 & 1 & 12 & 4 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

Calcular su forma escalonada reducida y el rango (2 p)

b) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -3 & 9 & -5 \\ 6 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ .Calcular la factorizacion LU (1.5 p)

c)Dado el sistema

$$\begin{aligned} x + 3y - a\,z &= 4 \\ -a\,x + y + a\,z &= 0 \\ -x + 2\,a\,y &= a + 2 \\ 2x - y - 2\,z &= 0 \end{aligned}$$

a)Discutirlo según los valores de a (1.5 p)

b) Resolverlo cuando sea compatible (1 p)

---

2. a)) Sea A_{3x3} una matriz 3X3 tal que det(A) =7 .Calcular det(A^3) y det(3 A) ,det(A^{-1}) (1.5 p)

b) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix}$.calcular el valor de a para que A^2 sea la matriz nula (1 p)

c.) Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.Calcular la matriz X que verifica A X+B=C (1.5 p)

Segunda Prueba

Sean los subespcios vectoriales de R^4 sobre R: $V_1 = \{(\alpha, -\beta, -\alpha+\beta, \beta) / \forall \alpha, \beta \in R\}$,

$V_2 = \{(\gamma+\delta, \gamma, \gamma-\delta, -\gamma) / \forall \gamma, \delta \in R\}$ .Se pide

a) Calcular dimensión de V_1 y dar una base (1 p)

b) Calcular dimensión V_2 y dar una base. Calcular las ecuaciones implícitas del subespacio V_2 (1.5 p)

b) Calcular dim ($V_1 \cap V_2$) (1 p) indicando una base y dimensión y ecuaciones (2.5 p)

d) ¿Son V_1 y V_2 espacios suplementarios .Razona la respuesta ¿ (1 p)

4. Sea V el subespacio de R^4 generado por V_1 = (1 ,1,1,1) , V_2 =(1 ,-1,1,-1) . Calcular la proyección sobre V del vector u= (2, 1, 1,0) (2.5 p)

b) Encontrar la descomposición ortogonal de u (1.5 p)

Tercera Prueba

5. Sea la aplicación lineal

$$\begin{aligned} f: \quad & R^3 \longrightarrow R^3 \\ f(x,y,z) \quad & \longrightarrow (-11x - 10y + 5z, 4y, -15x - 10y + 9z) \end{aligned}$$

Algebra Lineal y Geometría. Prueba final. 1-2-2012

Primera prueba

Nota: En todas las pruebas se exigirá todo razonado y justificado, no se calificara poner solo los resultados

1.a) Estudiar la compatibilidad del sistema según los valores del parámetro a (1.5 p)

$$a^2x + a\,y + z = 1$$
$$x + a\,y + z = a$$
$$x + ay + a^2z = 1$$

b) Calcular por Gauss-Jordán la inversa de la matriz (1 p)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Calcular el valor del determinante utilizando las propiedades de los determinantes (1 p)

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix}$$

2.a) Mediante operaciones elementales, determinar el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro real a (1p)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & a \\ 6 & 4+a \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \ , \ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

b) Calcular la matriz X en la ecuación matricial (1 p)

$$A\,X\,B = C \text{ Siendo}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Factorizar en la forma L U la matriz (2 p)

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

d) Dada la matriz $J = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \end{vmatrix}$. Calcular la forma escalonada reducida por filas y la matriz de paso P. Calcular el rango (2.5 p)

Segunda prueba

3. Sea S el subespacio vectorial generado por el sistema ⟨(1,0,2,1),(1,1,0,1)⟩.

a) Calcular las ecuaciones implícitas del subespacio S (1.5 p)

b) ¿ El vector (1,2,−2,0)∈S? (0.75 p)

c) Calcula una base del conjunto T={x∈ R^4 | x es ortogonal a todos los vectores de S}.(2 p)

d) Calcula una base ortonormal de S. (1.25 p)

4. Sean en R^4 los subespacios V y W , $V = \{(a, b, a-b+c, c\}\ , a, b, c \in R\}$ $W = \{\, (x,y,z,t)\,\}\ x-2y+z=0, x-y=0\,\}$ .Calcular

a) Dimensión de V y una base (0.75 p)

b) Dimensión W y una base (0.75 p)

c) Dimensión (V+W) y una base (1 p)

d) Dimensión (V∪W), una base y sus ecuaciones implícitas (2 p)

Tercera prueba

5. Sea la aplicación lineal $f: R^3 \to R^2$ definida por $f(e_1) = (1,2,0), f(e_2) = (-3,0,0)$, $f(e_3) = (-2,1,0)$. Donde $\{e_1, e_2, e_3\}$es la base canonica de R^3. Calcular

a) La matriz A de f respecto a las bases canónicas (0.25 p)

b) Ecuaciones analíticas de la aplicación lineal (0.25 p)

c) Calcular las ecuaciones implícitas de Kerf, la dimensión y dar una base (1p)

Algebra Lineal y Geometría . Primera prueba. 3-11-2011

1. a) Discutir el sistema según los valores del parámetro k (1.5 p)

$$2y + k\,z = k$$
$$(k-2)x + y + 3\,z = 0$$
$$(k-1)y = 1-k$$

b) Resolver el sistema para el caso de que para alguno de los valores de k el sistema sea compatible indeterminado (0.75 p)

2. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Calcular una matriz H equivalente a la A en la forma escalonada reducida (1 p)

b) Calcular una matriz P tal que PA=H (1.25 p)

3. Factorizar en la forma L.U las matrices (2 p)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

5. Sean A y B matrices regulares de orden n, entonces (1 p)

$(A\,B)^{-1}$ Puede no existir

$(A\,B)^{-1} = A^{-1}\,B^{-1}$

$(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$

$(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$

6. Sea A una matriz invertible. Si $A^2 = A, entonces\ (1\,p)$

a) $(A^{-1})^2 = A^{-1}$

b) Se verifica $|A^{-1}| = |A|$

c) $|A^{-1}| = 2A$

7 .a)Reducir la expresion $(B.A)^T + 2A^T.B - (B.A^T)^T - A.B$ siendo A una matriz simetrica (0.75 p)

b) Sea A una matriz cuadrada de orden 9, tal que sus determinante es igual a 3. Calcular Det (2 A) (0.5 p)

c) Calcular el determinante (1.25 p)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Prueba Extraordinaria de Septiembre de Algebra Lineal y Geometría 1-9-2011

Tercera prueba

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{pmatrix}$

a) Calcular sus valores y vectores propios (0.75 p)

b) Calcular la matriz de paso P que permite Diagonalizar la matriz A (1.25 p)

c) Expresar la relación de semejanza entre A y D (0.75 p)

c) Comprobar que su determinante y su traza coinciden con los de su expresión diagonal (0.75 p)

d) Calcular los subespacios invariantes (1.5 p)

e) Si la matriz es diagonalizable calcular A^{12} (1 p)

---

2. Se considera la aplicación $f: R^4 \to R^4 \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) \to (y_1, y_2, y_3, y_4)$ en donde

$$y_1 = x_1 + x_2$$
$$y_2 = x_1 + x_3$$
$$y_3 = x_3 + x_{42}$$
$$y_4 = x_4 + x_1$$

a) Ecuación matricial de la aplicación (0.5 p)

b) Calcular unas bases del subespacio núcleo e imagen (1 p)

b) Calcular las ecuaciones paramétricas e implícitas del subespacio núcleo e imagen (1.5 p)

b) Comprobar que los subespacios Núcleo e Imagen son subespacios complementarios (1 p)

Segunda prueba

3. En el espacio euclídeo usual R^4 se consideran los subespacios vectoriales

$W_1 = \{(x, y, z, t) \in R^4 :$ x-y=0 , z + t=0$\}$ y $W_2 = L\{(1,1,-2,2), (1,0,-1,0)\}$

Calcular

a) Las ecuaciones del subespacio ortogonal de W_1 y una base ortonormal de $W_1^{\perp}$ (2 .5 p)

b) Las ecuaciones del complemento ortogonal $W_2^{\perp}$ y una base ortogonal para $W_2^{\perp}$ (2 p)

4. En R^4 se considera el subespacios vectorial L $=\{(x, -x+y, x+y, y) \ \forall x, y \in R\}$ y S$=\{(z-t, 0, z, t) \ \forall z, t \in R\}$

a) Calcular una base de L y S y su dimensión (1.5 p)

b) Obtener una base del subspacio L+S y $L \cup S$ y su dimensión (2.5 p)

c) Calcular las ecuaciones del subespacio $L \cup S$ (1 .5 p)

Primera prueba

5. a) Calcular el valor del determinante, utilizando las propiedades de los determinantes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 3 & 7 & 9 \\ 8 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1 .5 \text{ p})$$

Algebra Lineal. Primera prueba. 28-10-2010

1. Calcular aplicando las propiedades de las matrices, $A.(C.B)^{-1}+A^{-1}(C.B^{-1})^{-1}-(A.B^{-1}+A^{-1}B+C)C^{-1}$ (1 p)

b) Calcular por triangulación el valor del determinante (1 p)

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

---

2. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

a) Analizar si las matrices A y B son equivalentes (**1** p)

b) Analizar si son equivalentes por filas (**1.5** p)

c) Calcular una matriz P tal que PA=B (**1.5** p)

---

3. Discutir y resolver, según los valores reales del parámetro k, el sistema (2 p)

$$\begin{aligned} x-2y+3z&=1 \\ 2x+ky+6z&=6 \\ -x+3y+(k-3)z&=0 \end{aligned}$$

---

4. Factorizar en la forma L.U la matriz (**2** p)

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

---

5. Hallar las matrices X e Y que verifican el sistema

$$\begin{aligned} AX+BY&=C \\ AX&=Y \end{aligned}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

---

b. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & a & b \end{bmatrix}$. Calcular su rango en función de los parámetros a y b (1 .5 p)

6. Hallar la factorización LU de la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & -6 \\ -1 & 4 & -4 & 3 \\ 5 & -8 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.5 \text{ p})$$

7. Encontrar las matrices A y B que satisfacen el sistema

$$A.\,H = B + I$$

$$B.\,K = A$$

Siendo H y K las matrices $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $K = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e I la matriz unidad (1. 25 p)

b) Utilizando solamente matrices elementales, calcular la matriz inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 6 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad (0.75 \text{ p})$$

8. a) Sabiendo que A y B son dos matrices de orden 2 tales que $|A| = -2$ y $|B| = 4$, calcula $|AB^t|$, $|A^t|$, $|B^{-1}|$, $|A^{-1}B|$ y $|3A|$ (2 p)

b) Sean las matrices A , B $\in M_{n\,X1}$. Decir cuáles de las siguientes cuestiones son ciertas y cuales no .Razonar la respuesta brevemente (1.5 p)

No se puede realizar el producto $A\ B^T$

Se verifica que $A\,B^T = A^T\,B$

Se verifica que $A^T\,B = B^T\,A$

c) Sea el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & \lambda \\ 0 & \alpha & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.5 \text{ p})$$

Razonar cuales de las siguientes cuestiones son ciertas

Si $\lambda=1$ el sistemas es compatible indeterminado

Si $\alpha=0$ entonces el sistema es compatible determinado

Si $\lambda=0$ o $\lambda=\alpha$ el sistema es compatible indeterminado

NOTA IMPORTANTE: Del ejercicio número 8, el apartado 8.a) obligatorio

De los apartados 8.b) y 8.c) se elegirá uno de los dos