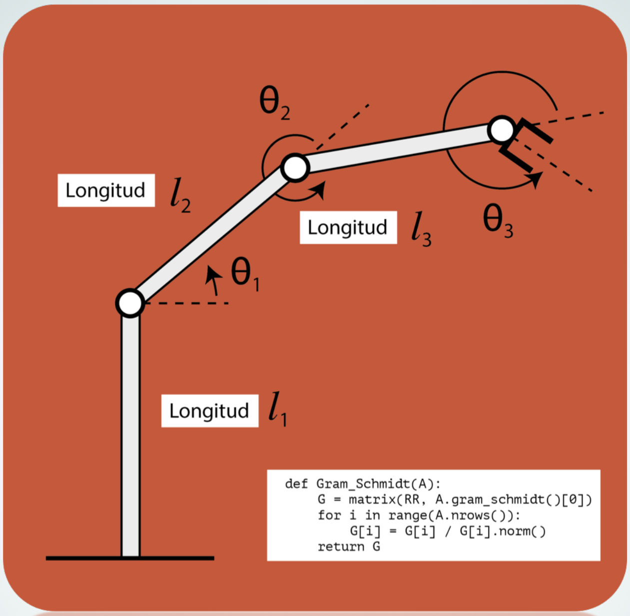
Álgebra y Geometría

Tema 1. Sistemas de Ecuaciones Lineales, Matrices y Determinantes



Jaime Gutiérrez Gutiérrez
Ángel Barón Caldera
Ana Isabel Gómez Pérez

Departamento de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación

Tema 1 Sistemas de ecuaciones lineales, matrices y determinantes

1.1. Sistemas de ecuaciones lineales

Una parte significativa de esta materia está ligada o requiere la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.
Comenzamos ilustrando esta disciplina con un ejemplo puramente recreativo.

Ejemplo 1.1. *La edad de Bernardo es el triple de la edad de Alicia, pero dentro de 10 años su edad sólo será el doble de la de Alicia. ¿Cuáles son las edades de Bernardo y Alicia?* [1]
Si a las edades de Alicia y Bernardo expresadas en años las llamamos respectivamente a *y* b*, entonces estos números deben verificar las dos relaciones siguientes:*

$$b = 3a, \quad b + 10 = 2(a + 10).$$

Es decir, a *y* b *verifican simultáneamente el sistema de ecuaciones:*

$$\begin{cases} 3a - b &= 0 \\ 2a - b &= -10 \end{cases}$$

Las variables a y b intervienen en **forma lineal** en estas ecuaciones, porque sólo aparecen multiplicadas por algunos coeficientes y se suman los resultados (no hay expresiones como a^2, $\sqrt{b}, \sin(a)$ o $\log b$ en las ecuaciones), por lo que decimos que el sistema anterior es un *sistema de ecuaciones lineales.* Este sistema tiene sólo dos ecuaciones y dos incógnitas, y resulta de sencilla solución. La primera ecuación nos da una expresión de b en función de a, que al ser sustituida en la segunda nos conduce a

$$2a - 3a = -10 \Rightarrow a = 10.$$

Sabemos entonces que Alicia tiene 10 años, y concluimos rápidamete que Bernardo tiene 30.
Diremos que la pareja $(10, 30)$ es solución del sistema.

Pero, también, los sistemas de ecuaciones lineales aparecen en muchas problemas de ingeniería, tales como

- la determinación del flujo de la circulación sobre una red vial;
- el estudio de circuitos eléctricos (Leyes de Kirchoff);
- el análisis de los esfuerzos a los que está sometida una estructura;
- el cálculo de los gastos necesarios para la fabricación de bienes y/o el suministro de servicios;

[1] Alicia y Bernardo son los nombres utilizados en criptografía para designar respectivamente al emisor y receptor de un mensaje.

- la codificación y decodificación de señales;
- el ordenamiento de una lista de datos según su importancia (el buscador de google);
- la evolución de precios de conjuntos de bienes o acciones;
- ecuaciones cinemáticas de un robot;
- muchos de los problemas físicos que están modelados por funciones no lineales, en la práctica se linealizan.
- y... podríamos continuar.

Hemos mencionado ya un buen número de problemas de ingeniería (analizaremos más adelante algunos de ellos en detalle) para comenzar a justificar nuestro interés en los sistemas de ecuaciones lineales.

1.1.1. Primeras definiciones

Una *ecuación lineal* es de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_m = b$$

siendo $a_1, a_2, \ldots, a_m$ escalares en un cuerpo de números $\mathbb{K}$, que se denominan *coeficientes* y $x_1, x_2, \ldots, x_m$ las *incógnitas*. Al escalar b se le llama *término independiente*.

Así un *sistema lineal* de n ecuaciones con m incógnitas se expresará de la forma

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m & = & b_n \end{array} \right.$$

Diremos que el sistema es $n \times m$, donde el primer número indican siempre la cantidad de ecuaciones y el segundo el de incógnitas.
Una solución del sistema es una sucesión de m números o m-tupla $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ tales que si se sustituye $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, $\ldots$, $x_m = \alpha_m$ se verifican simultaneamente las n ecuaciones.

Ejemplo 1.2. *Consideramos el siguiente sistema* 2×3 :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 1 \\ x - y + 2z & = & 0 \end{array} \right.$$

La terna $(2, 0, -1)$ *es solución del sistema, puesto que satisface las dos ecuaciones, también lo es la* $(-1, 1, 1)$*, pero no la terna* $(1, -1, 1)$*, puesto que no satisface la segunda.*

Circuítos Eléctricos

En una red eléctrica, a menudo es necesario encontrar la corriente (intensidad) en amperios (A) que fluye en varias partes de la red. Estas redes generalmente contienen resistencias que retardan la corriente. La resistencia se mide en ohmios (Ω). Además, la corriente se incrementa en varios puntos por fuentes de tensión (por ejemplo, una batería). El voltaje de estas fuentes se mide en voltios (V) y supondremos que estas fuentes de voltaje no tienen resistencia.

El flujo de corriente se rige por los siguientes principios.

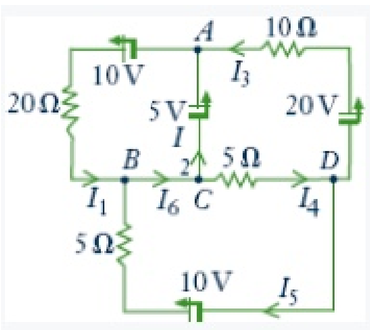
- **Ley de Ohm.** *(En honor a Georg Simon Ohm, 1789-1854)*

  La corriente I y la caída de voltaje V a través de una resistencia R están relacionadas por la ecuación $V = RI$.

- **Leyes de Kirchoff.** *(Debe su nombre a Gustav Robert Kirchhoff, 1824-1887)*

  1. Es un principio de conservación, que asegura que no se genera ni se destruye carga en los nodos, por lo tanto lo que entra en cada nodo debe ser igual a lo que sale. Es así que la suma de las corrientes en las mallas que confluyen en un nodo dado debe ser igual a cero.
  2. En una malla cerrada, la suma de todas las caídas de voltaje es igual al voltaje total suministrado. Es decir, la suma algebraica de las diferencias de voltaje en una malla es igual a cero.

Ilustramos estos principios con el siguiente circuito:



La primera ley de Kirchoff:

- En el nodo **A:** $I_1 = I_2 + I_3$
- En el nodo **B:** $I_6 = I_1 + I_5$
- En el nodo **C:** $I_6 = I_2 + I_4$
- En el nodo **D:** $I_4 = I_5 + I_3$

La segunda ley de Kirchoff:

- Malla superior izquierda: $20I_1 = 10 + 5$
- Malla superior derecha: $10I_3 + 5I_4 = 20 - 5$
- Malla inferior: $5I_4 + 5I_5 = 10$

Se trata de encontrar las intensidades, que satisfacen el siguiente sistema 7×6 de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \\ I_1 + I_5 - I_6 &= 0 \\ I_2 + I_4 - I_6 &= 0 \\ I_3 - I_4 + I_5 &= 0 \\ 20 I_1 &= 15 \\ 10 I_3 + 5 I_4 &= 15 \\ 5 I_4 + 5 I_5 &= 10 \end{aligned}\right.$$

La tupla $\left(\frac{3}{4}, \quad -\frac{1}{20}, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{7}{5}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{27}{20} \right)$ es solución del sistema. El hecho de que I_2 sea negativo significa, por supuesto, que esta corriente está en la dirección opuesta, con un magnitud de $\frac{1}{20}$ amperios.

Circulación sobre una red vial

En esta sección mostraremos un modelo para el estudio del tránsito que conduce a la formulación de un sistema de ecuaciones lineales.

Las leyes de Kirchoff del apartado anterior para circuitos és exactamente el mismo principio que aplicaremos en este ejemplo relativo al tránsito: lo que entra en un nodo es lo mismo que lo que sale. Se trata en realidad de un principio de conservación muy general, aplicable a redes de muy diversa naturaleza. Se satisface, por ejemplo, para los vehículos en una red vial y para la masa de fluido en una red de cañerías.

El mapa que aparece en la figura 1.1 muestra algunas de las calles de Santander allá por el año primo 3001. El sentido de circulación en cada una de ellas está indicado por las flechas.

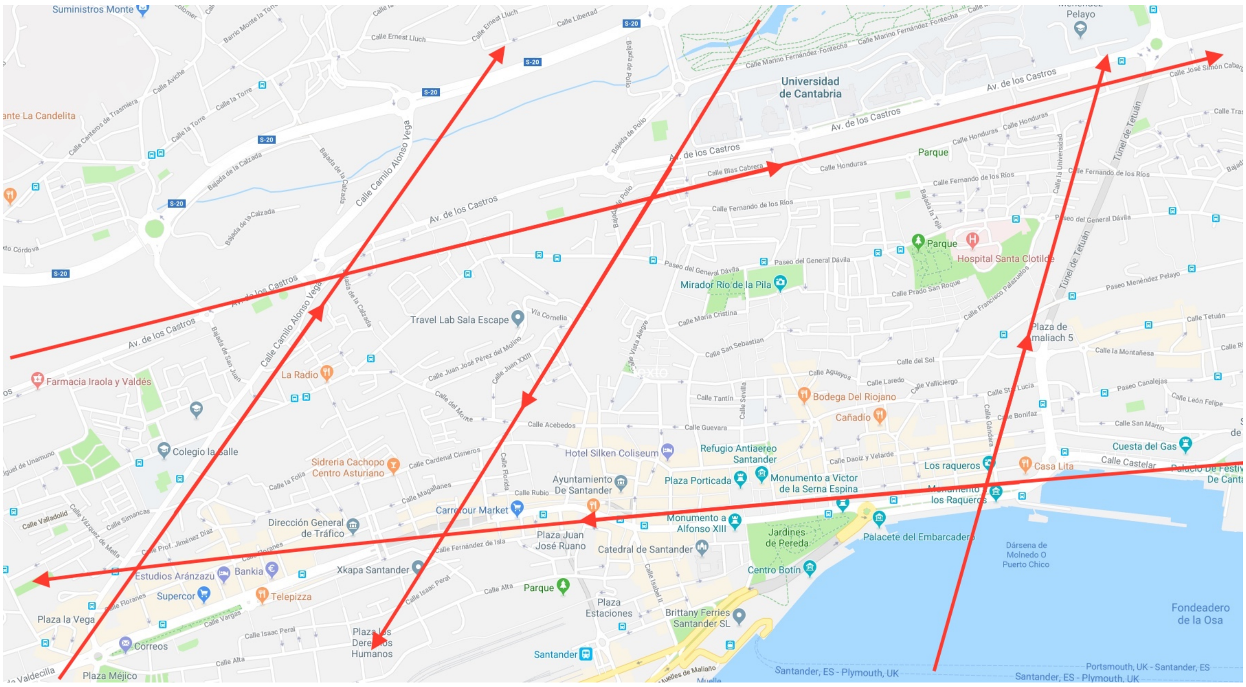


Figura 1.1: Calles del centro Santander en el año 3001

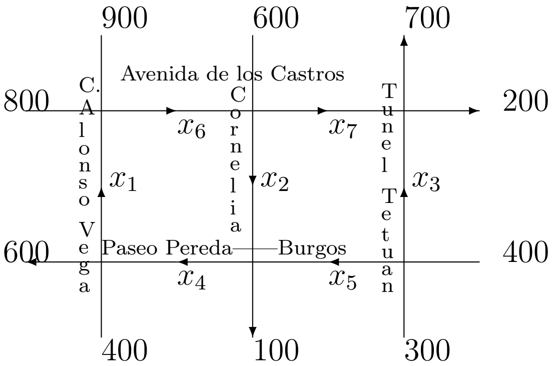


Figura 1.2: Flujo de tránsito en el centro de Santander en el año 3001

La figura 1.2 indica el flujo de tránsito que entra o sale a cada calle, en unidades de vehículos por hora. Supondremos que los números mostrados representan el flujo de tránsito promedio a la hora de mayor circulación.

Supongamos ahora, que algunas obras dificultarán la circulación en la calle Paseo Pereda-Burgos entre Via Cornelia y Camilo Alonso Vega. ¿Es posible cortar completamente el tráfico allí y atender la demanda que plantea la circulación de vehículos en la hora punta? Si no es posible, ¿qué medida es conveniente adoptar para minimizar el tráfico por esa calle?

Las variables x_i que representan la cantidad de vehículos por hora que circularán por cada una de las calles en la parte de la ciudad que estamos considerando:

Variable	Vehículos por hora que circulan por
x_1	Camilo Alonso Vega desde Paseo Pereda-Burgos hacia Avenida de los Castros
x_2	Via Cornelia desde Avenida de los Castros hacia Paseo Pereda-Burgos
x_3	Tunel Tetuan desde Paseo Pereda-Burgos hacia Avenida de los Castros
x_4	Paseo Pereda-Burgos desde Via Cornelia hacia Camilo Alonso Vega
x_5	Paseo Pereda-Burgos desde Via Tunel Tetuan hacia Via Cornelia
x_6	Avenida de los Castros desde C. Alonso Vega hacia Via Cornelia
x_7	Avenida de los Castros desde Via Cornelia hacia Túnel Tetuan

En cada intersección, el tráfico de entrada debe ser igual al de salida, de modo que las circulaciones en cada manzana deben satisfacer ecuaciones que reflejan esta propiedad. Por ejemplo, a la esquina de Paseo Pereda-Burgos y Alonso Vega llegan cada hora x_4 vehículos por Paseo Pereda-Burgos, 400 por Alonso Vega, y salen x_1 vehículos por Alonso Vega y 600 por Paseo Pereda-Burgos. La ecuación que corrresponde a esta intersección es entonces

$$-x_1 + x_4 - 600 + 400 = 0 \Rightarrow -x_1 + x_4 = 200.$$

Razonando en forma similar para todas las intersecciones concluimos que los valores de las siete circulaciones x_i deben satisfacer el sistema

$$\left\{\begin{aligned} -x_1 + x_4 &= 200 \\ x_2 - x_4 + x_5 &= 100 \\ x_3 + x_5 &= 700 \\ x_1 - x_6 &= 100 \\ x_2 - x_6 + x_7 &= 600 \\ x_3 + x_7 &= 900 \end{aligned}\right.$$

formado por las ecuaciones de las seis intersecciones que aparecen en el plano de la figura 1.2. Las soluciones de este sistema representan las posibles maneras de ordenar el flujo de vehículos en estas calles. Si no estamos dispuestos a cambiar el sentido de circulación en ninguna calle, entonces tendremos que considerar sólo aquellas soluciones en que las seis variables x_i son mayores o iguales que cero.

Tenemos un sistema 6×7 de números reales. Comprobamos que la 7-tupla:

$$(\alpha + 100, \alpha - \beta + 600, -\beta + 900, \alpha + 300, \beta - 200, \alpha, \beta)$$

es solución, es decir, satisface las 6 ecuaciones de arriba para cualquier valor real de α, β, (parámetros o variables libres $x_6 = \alpha$ y $x_7 = \beta$). Por ejemplo, para $\alpha = 0$ y $\beta = 300$, tenemos la solución:

$$(100, 300, 600, 300, 100, 0, 300)$$

Pospondremos el análisis de este ejemplo hasta tener algunas herramientas que nos permitan trabajar ordenadamente.

Redes, grafos y álgebra lineal

Los dos ejemplos que hemos mostrado tienen que ver con redes: una red vial y un circuito eléctrico. No es casual el énfasis en problemas de redes en esta introducción. Sistemas complejos con diversas partes interconectadas entre sí (redes) aparecen en muchas áreas de la ingeniería y el álgebra lineal es una herramienta indispensable en su consideración. Las complejas redes de nuestra sociedad -la Internet, redes viales, redes cualesquiera de distribución, redes genéticas- son una fuente de interés.

Todas las redes admiten la siguiente descripción: consisten en un conjunto de cosas a unir o relacionar (nodos), algunos de los cuales están interconectados entre sí (por aristas). Los nodos pueden ser uniones en una estructura, computadoras, elementos de un conjunto, esquinas de la ciudad, etcétera. Y las aristas pueden representar barras, cables, relaciones de pertenencia, posibles llamadas telefónicas, rutas, etcétera. Este cuadro tan general se presta a una formulación aún más general, abstracta, que englobe todas las posibilidades sin aludir directamente a ninguna: ¡una teoría matemática! Es este caso, la teoría matemática correspondiente es la *teoría de grafos*.

Reacciones químicas

Cuando se produce una reacción química, varias moléculas se combinan para producir nuevas moléculas. Por ejemplo, cuando las moléculas de hidrógeno H_2 y oxígeno O_2 se combinan, el resultado es agua H_2O. Expresamos esto como

$$H_2 + O_2 \implies H_2O$$

Los átomos individuales no se crean ni se destruyen, por lo que la cantidad de átomos de hidrógeno y oxígeno en la reacción debe ser igual al número que sale (en forma de agua). En este caso, la reacción se dice que está equilibrada. Notar que cada molécula de hidrógeno H_2 consta de dos átomos, al igual que cada molécula de oxígeno O_2, mientras que una molécula de agua H_2O consta de dos átomos de hidrógeno y un átomo de oxígeno. En la reacción anterior, esto requiere que dos veces más moléculas de hidrógeno entren en la reacción; expresamos esto como sigue:

$$2H_2 + O_2 \implies 2H_2O$$

Esto ahora está equilibrado porque hay 4 átomos de hidrógeno y 2 átomos de oxígeno en cada lado de la reacción.

Ejemplo 1.3. *Equilibrar la siguiente reacción para quemar octano* C_8H_{18} *en oxígeno* O_2*:*

$$C_8H_{18} + O_2 \implies CO_2 + H_2O$$

donde el CO_2 *representa el dióxido de carbono. Debemos encontrar enteros positivos* x, y, z *y* t *tales que*

$$xC_8H_{18} + yO_2 \implies zCO_2 + tH_2O$$

Al igualar el número de átomos de carbono, hidrógeno y oxígeno en cada lado se obtiene: $8x = z, 18x = 2t$ *y,* $2y = 2z + t$*, respectivamente. Eso mismo escrito como un sistema lineal:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} 8x - z &=& 0 \\ 18x - 2t &=& 0 \\ 2y - 2z - t &=& 0 \end{array}\right.$$

Usando la teoría de más adelante, encontraremos todas las soluciones. En particular, la más pequeña positiva es $(2, 25, 16, 18)$*, y la reacción equilibrada es:*

$$2C_8H_{18} + 25O_2 \implies 16CO_2 + 18H_2O$$

Los conjuntos numéricos. El cuerpo $\mathbb{K}$

Es importante recordar que los coeficientes, y términos independientes del sistema son números, por lo que debemos tener presente cuál es el conjunto numérico sobre el que estamos trabajando. El siguiente ejemplo ilustra esta necesidad.
Nos planteamos resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x - y &=& 0 \\ 2x + y &=& 2 \end{array}\right.$$

Sumando ambas ecuaciones, obtenemos $4x = 2$, de donde concluimos que

$$x = 1/2$$

Por lo tanto, $\{x = 1/2, y = 1\}$, o equivalentemente $(1/2, 1)$, es la única solución del sistema.

Observemos que el sencillo sistema de nuestro ejemplo no tiene soluciones cuyas componentes sean números enteros $\mathbb{Z}$, aunque sus coeficientes son enteros. Esto es así porque al resolver los sistemas de ecuaciones lineales es necesario realizar sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, y algunas de estas operaciones no son siempre posibles dentro del conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros. Trabajaremos entonces en un conjunto numérico donde todas estas operaciones sean posibles, lo que hace necesario especificar que el conjunto de números tenga estructura de cuerpo, que está denotado por $\mathbb{K}$. Por ejemplo, el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales. Observemos que la solución del sistema anterior requiere la consideración de números racionales. También son cuerpos el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, y el de los complejos $\mathbb{C}$.

También pueden considerarse cuerpos finitos. El cuerpo finito $\mathbb{Z}_2$ tiene solo dos elementos 0 y 1 y las operaciones en él se rigen de la manera siguiente:

$$0 + 0 = 0 \qquad 0 \times 1 = 0 \qquad 1 + 1 = 0 \qquad 1 \times 1 = 1$$

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

El cuerpo $\mathbb{Z}_2$ es utilizado para modelizar varias ramas de la ciencia: electricidad, electrónica, informática, etc., donde el 0 representa intensidad nula o el boaleano *Falso* y el 1 representa intensidad positiva o booleano *Verdadero*, etc. Ver los ejercicios sobre codificación de la información.

O también, el cuerpo finito $\mathbb{Z}_3$ con tres elementos 0, 1 y 2 (como el conjunto de símbolos del código morse), cuyas operaciones están determinadas por las siguientes tablas:

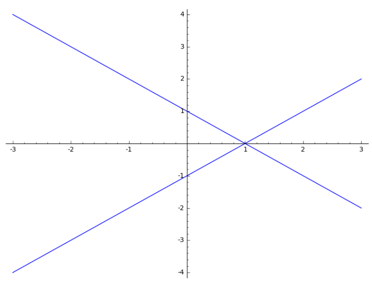
$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\times$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Todas las operaciones que haremos sobre los sistemas de ecuaciones estarán justificadas por las propiedades que tienen las operaciones de suma y producto en un conjunto con estructura de cuerpo.
En este curso consideraremos fundamentalmente números reales, pero tendremos cuidado de presentar algunos ejemplos que nos lleven a trabajar sobre el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos, o en los cuerpos discretos $\mathbb{Z}_2$ y $\mathbb{Z}_3$, o, más generalmente, en $\mathbb{Z}_p$, para un primo p. Por lo común, desarrollaremos todo el estudio sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ cualquiera, sin hacer referencia a ninguno en particular.

Ejemplo 1.4. *Ahora, discutiremos tres sencillos sistemas 2×2 en el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$. De hecho, se trata de analizar las posibles posiciones de dos rectas en el plano.*

1. *El sistema*
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y &=& 1 \\ x-y &=& 1 \end{array} \right.$$
tiene una única solución $(1,0)$. Es evidente que este par de números es una solución del sistema. Además, es la única, porque si sumamos las dos ecuaciones del sistema obtenemos $2x = 2$, lo que implica $x = 1$. Y al restar la segunda de la primera nos encontramos con $2y = 0$, que sólo puede ser satisfecha por $y = 0$.

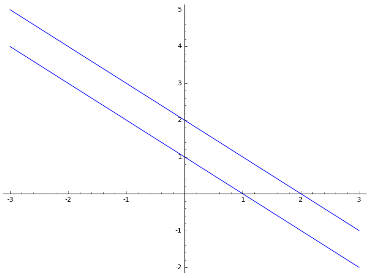


Las dos rectas se cortan en un punto, es decir, son rectas secantes. El punto representa la solución del sistema.

2. *El sistema lineal mostrado a continuación carece de soluciones.*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 1 \\ x+y &=& 2 \end{array}\right.$$

Puesto que si una pareja de números (x_0, y_0) *verifica la primera ecuación, es decir* $x_0 + y_0 = 1$*, no puede ser que* $x_0 + y_0 = 2$.

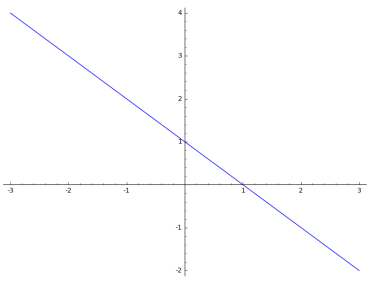


Las rectas representadas por las ecuaciones no se cortan, son rectas paralelas.

3. *Pero el sistema*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 1 \\ 2x+2y &=& 2 \end{array}\right.$$

admite infinitas soluciones. Todas las parejas $(\alpha, 1-\alpha)$*, con* $\alpha \in \mathbb{R}$*, satisfacen ambas ecuaciones.*



Las dos ecuaciones representan de hecho una única recta; sus infinitos puntos constituyen el conjunto de soluciones del sistema.

Este ejemplo 1.4 muestra que un sistema lineal puede tener una única solución, ninguna o muchas.

Atendiendo a sus soluciones los sistemas lineales se clasifican como:

Compatibles determinados si tienen una única solución.

Compatibles indeterminados si tienen más de una solución; infinitas soluciones en cuerpos infinitos.

Incompatibles si no tienen ninguna solución.

Ahora nos centramos en estudiar cuándo un sistema lineal tiene alguna solución y en ese caso, cómo calcularla.

Ejemplo 1.5. *El ejemplo más sencillo de un sistema lineal es el* 1×1

$$ax = b, \tag{1.1}$$

donde a *y* b *son dos números (elementos de algún cuerpo* $\mathbb{K}$*) cualesquiera. En pocos renglones podemos discutir con total generalidad cómo es el conjunto solución.*

- *Si* $a \neq 0$ *entonces el sistema tiene una única solución, independientemente del valor de* b*. Sólo tenemos que multiplicar ambos lados de la ecuación (1.1) por el inverso* a^{-1} *del número* a *para concluir que, si* x *es una solución, entonces* $x = a^{-1}b$*. Este número es la única solución de la ecuación.*
- *Si* $a = 0$ *tendremos*

$$ax = 0x = 0,$$

independientemente del valor de x*. Debemos distinguir entonces dos casos:*

  - *si* $b \neq 0$ *entonces, para cualquier* x *tendremos* $0x \neq b$*. Por lo tanto no hay solución del sistema;*
  - *si* $b = 0$ *entonces la igualdad en (1.1) siempre se satisface, y cualquier* x *es solución del sistema. En este caso, el sistema tiene varias soluciones* [2]*.*

Aunque sencillo, este problema ilustra las disitintas situaciones que nos encontraremos: problemas de compatibilidad o incompatibilidad, inexistencia o multiplicidad de soluciones, etc.

Nuestra tarea al estudiarlos será encontrar y describir la solución de estos sistemas en el siguiente sentido: dado un sistema de ecuaciones llamaremos **conjunto solución** o **solución general** del sistema al conjunto de todas las soluciones. *Resolver un sistema* es determinar su conjunto solución.

Ejemplo 1.6. *El conjunto solución de cada uno de los sistemas del ejemplo 1.4 son, respectivamente,*

$$\{(1, 0)\}, \quad \emptyset \text{ (conjunto vacío)}, \quad \{(\alpha, 1 - \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Una estructura algebraica que constituye una herramienta fundamental en diversas ramas de las matemáticas son los Espacios Vectoriales. Por su sencillez y amplitud se utiliza con diversos tipos de objetos y será analizada con detalle en el siguiente tema. Introducimos aquí $\mathbb{K}^m$ que ayudará en la manipulación y comprensión de la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales.

1.1.2. Sistemas homogéneos. El espacio vectorial $\mathbb{K}^m$

Un sistema lineal es *homogéneo* cuando los términos independientes de todas sus ecuaciones son iguales a 0, esto es, cuando en el sistema (S) del apartado 1.1.1 se tiene $b_i = 0\ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Un ejemplo de sistema homogéneo aparece en el apartado *Reacciones químicas.* Obviamente, cada sistema lineal homogéneo siempre tiene la solución $(0, 0, \ldots, 0)$. Pero además tiene otra propiedad, que no es compartida por sistemas lineales generales, esa es:

[2] En realidad tiene tantas como elementos tenga el cuerpo $\mathbb{K}$ sobre el que estamos trabajando, porque cualquier número en el cuerpo es solución. Si el cuerpo es infinito -este es el caso para, por ejemplo, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$-, entonces la ecuación tiene infinitas soluciones. Si el cuerpo es finito -por ejemplo para los $\mathbb{Z}_p$ con p un número primo- la solución no es única, pero hay un número finito de ellas.

cualquier combinación lineal de una pareja de soluciones es solución. Las líneas siguientes ilustran y aclaran dicha propiedad.
Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = & 0 \\ x_1 + x_2 & = & 0 \\ 2x_1 + 2x_2 & = & 0 \end{cases}$$

La 5-tupla $s_1 : (1, -1, 1, -1, 0)$ es solución del sistema (basta hacer $x_1 = 1$, $x_2 = -1, \cdots$ y comprobar que se satisfacen las tres ecuaciones del mismo). Otra solución es $s_2 : (0, 0, -1, 0, 1)$. Es muy fácil comprobar que, por ejemplo, la **combinación lineal** $3s_1 - 5s_2$ es solución del sistema, teniendo en cuenta que:

$$3s_1 - 5s_2 = 3(1, -1, 1, -1, 0) - 5(0, 0, -1, 0, 1) = (3, -3, 8, -3, -5)$$

En varias ramas de las matemáticas aparecen elementos donde se realizan *combinaciones lineales*. Estas operaciones particularmente simples se generalizan entre los elementos, llamados vectores, de lo que supone una nueva estructura algebraica, la de espacio vectorial.

Definición 1.1. *En el conjunto $\mathbb{K}^m$ de todas las m-uplas de elementos en $\mathbb{K}$ se definen las operaciones:*

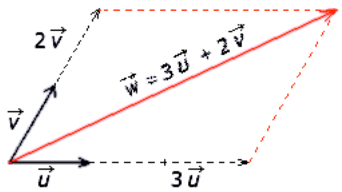
$$(x_1, \ldots, x_m) + (y_1, \ldots, y_m) = (x_1 + y_1, \ldots, x_m + y_m)$$

$$a \cdot (x_1, \ldots, x_m) = (ax_1, \ldots, ax_m)$$

Tales operaciones satisfacen las propiedades siguientes:

- $(u + v) + w = u + (v + w)$*;* $u + v = v + u$*;*
- $u + \mathbf{0} = u$*, donde* $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$
- *Para cada u en $\mathbb{K}^m$ existe w en $\mathbb{K}^m$ tal que $u + w = \mathbf{0}$; u y w se dicen opuestos entre sí y es habitual escribir $w = -u$ o, equivalentemente, $u = -w$.*
- $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$*;* $(a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$*;*
- $a \cdot (b \cdot u) = (ab) \cdot u$*;* $1 \cdot u = u$*.*

(siendo u, v, w elementos cualesquiera de $\mathbb{K}^m$ y a, b elementos cualesquiera de $\mathbb{K}$; 1 denota el elemento neutro del producto en $\mathbb{K}$).
Lo anterior se expresa diciendo que $\mathbb{K}^m$ es un $\mathbb{K}$ – ***espacio vectorial****.*
Los elementos de $\mathbb{K}^m$ son denominados ***vectores*** *y los elementos de $\mathbb{K}$* ***escalares****.*

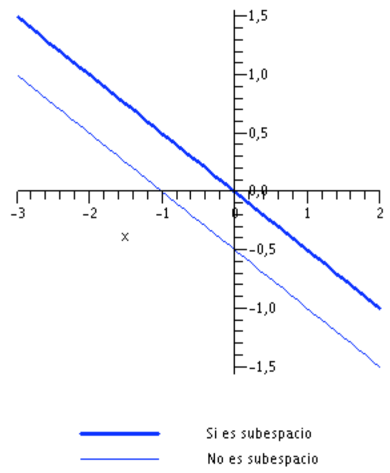


Operaciones con vectores

Definición 1.2. *Un subconjunto no vacío U de $\mathbb{K}^m$ es un subespacio vectorial si para todos a_1 y a_2 en $\mathbb{K}$ y para todos u_1 y u_2 en U se tiene:*

$$a_1u_1 + a_2u_2 \in U$$

Ejemplo 1.7. *El conjunto de los vectores* (x, y) *en* $\mathbb{R}^2$ *verificando* $x + 2y = 0$*, es decir, el conjunto solución del sistema* $x + 2y = 0$*, es un subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^2$ *como* $\mathbb{R}$*–espacio vectorial. No es subespacio vectorial el conjunto de los vectores solución* (x, y) *del sistema* $x + 2y = 1$*.*



No todas los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ son subespacios

De hecho, no es difícil comprobar lo siguiente:

Proposición 1.1. *El conjunto de los vectores solución de un sistema homogéneo* $n \times m$ *es un subespacio vectorial de* $\mathbb{K}^m$*.*

El siguiente concepto permitirá establecer a continuación la definición de *subespacio generado por una familia de vectores.*

Combinación lineal. Sean $u, u_1, \ldots, u_r$ vectores de $\mathbb{K}^m$. Se dice que u es una *combinación lineal* de los vectores $u_1, \ldots, u_r$ si existen escalares $a_1, \ldots, a_r$ en $\mathbb{K}$ tal que

$$u = a_1u_1 + a_1u_2 + \ldots + a_ru_r$$

Subespacio generado por una familia de vectores. Sea $S = \{u_1, \ldots, u_r\}$ una familia de vectores de $\mathbb{K}^m$. Se define el *subespacio generado por* S, que se denota $\langle S \rangle$, como el subconjunto de $\mathbb{K}^m$ formado por todos aquellos vectores de $\mathbb{K}^m$ que son combinación lineal de los vectores $u_1, \ldots, u_m$. Esto es,

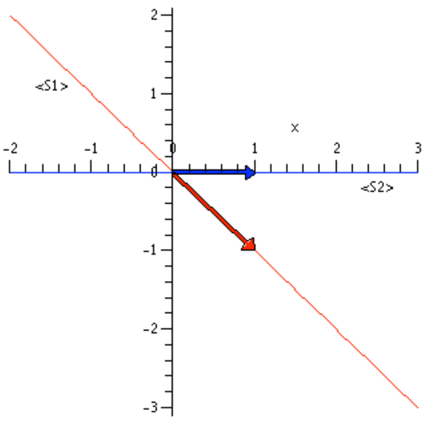
$$\langle S \rangle = \{a_1u_1 + a_1u_2 + \ldots + a_ru_r \, : \, a_1 \in \mathbb{K}, \cdots, a_r \in \mathbb{K}\}$$

Ejemplo 1.8. *En el* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial* $\mathbb{R}^2$*, si* $S_1 = \{(1, -1)\}$*, el subespacio* $\langle S_1 \rangle$ *representa la bisectriz del primer y tercer cuadrante. Para* $S_2 = \{(1, 0)\}$*,* $\langle S_2 \rangle$ *representa el eje de abscisas; si* $S_3 = \{(1, 0), (0, 1)\}$*,* $\langle S_3 \rangle = \mathbb{R}^2$ *y si* $S_4 = \{(1, -1), (1, 0)\}$*, entonces* $\langle S_4 \rangle = \mathbb{R}^2$*.*

De las afirmaciones anteriores, las que resultan menos inmediatas son $\langle S_3 \rangle = \mathbb{R}^2$ *y* $\langle S_4 \rangle = \mathbb{R}^2$*, pues pasa por ver que todo vector de* $\mathbb{R}^2$ *es combinación lineal de los vectores de* S_3 *y de* S_4 *respectivamente. Para probar esto, vamos a ir por pasos:*

1. *Caso* S_3*:*

    a*) Un vector genérico de* $\mathbb{R}^2$ *se puede expresar como* (a, b)*.*



Combinaciones lineales de elementos de $\mathbb{R}^2$

b) *Puesto que* $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$, *podemos asegurar que todo vector de* $\mathbb{R}^2$ *es combinación lineal de los vectores de* S_3.

2. *Caso* S_4:

a) *El vector* $(1, 0)$ *pertenece al subespacio generado por* S_4 *porque podemos encontrar escalares* a_1, a_2 *tales que*

$$(1, 0) = a_1(1, -1) + a_2(1, 0)$$

Basta hacer $a_1 = 0$ *y* $a_2 = 1$.

b) *El vector* $(0, 1)$ *pertenece al subespacio generado por* S_4 *porque podemos encontrar escalares* b_1, b_2 *tales que*

$$(0, 1) = b_1(1, -1) + b_2(1, 0)$$

Basta hacer $b_1 = -1$ *y* $b_2 = 1$.

c) *Teniendo en cuenta todo lo anterior, un vector genérico* (a, b) *de* $\mathbb{R}^2$ *se expresa:*

$$\begin{array}{rcl} (a, b) & = & a(1, 0) + b(0, 1) \\ & = & a(0 \cdot (1, -1) + 1 \cdot (1, 0)) + b((-1) \cdot (1, -1) + 1 \cdot (1, 0)) \\ & = & (a \cdot 0 + b \cdot (-1))(1, -1) + (a \cdot 1 + b \cdot 1)(1, 0) \\ & = & (-b)(1, -1) + (a + b)(1, 0) \end{array}$$

d) *Por tanto, para cada vector* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, *existen escalares* $c_1 = -b$ *y* $c_2 = a + b$ *tales que* $(a, b) = c_1(1, -1) + c_2 = (1, 0)$. *Esto significa que todo vector de* $\mathbb{R}^2$ *pertenece al subespacio generado por* S_4.

e) *Adelantándonos un poco a lo que se verá más adelante, podemos decir que a la conclusión anterior también podríamos haber llegado planteando y resolviendo la 'ecuación' siguiente:* $(a, b) = c_1(1, -1) + c_2 = (1, 0)$, *que expresada como sistema lineal se escribe:*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} c_1 + c_2 & = & a \\ -c_1 & = & b \end{array} \right.$$

donde las incógnitas son c_1 *y* c_2 *y los términos independientes son* a *y* b.

El ejemplo 1.8 permite observar que un mismo espacio vectorial, como es el caso de $\mathbb{R}^2$ de dicho ejemplo, puede ser generado por conjuntos de vectores distintos. Si allí hubiéramos considerado el conjunto S_5 resultante de añadir el vector $(1,1)$ a S_4, $\langle S_5\rangle = \mathbb{R}^2$. Si de S_4 extraemos algún vector, no se genera todo $\mathbb{R}^2$. Esto sirve como introducción al resultado recogido a continuación, de gran importancia en el estudio del Tema 2 ESPACIOS VECTORIALES.

Teorema 1.1. *Dado un subespacio vectorial U de $\mathbb{K}^m$ existe un entero $r \leq m$ y un conjunto $S = \{u_1, \ldots, u_r\}$ tal que $U = \langle S\rangle$. El entero más pequeño con esta propiedad, se le denomina la* ***dimensión o rango*** *de U y al conjunto de vectores $\{u_1, \ldots, u_r\}$ base de U.*

Las situaciones recogidas en el siguiente ejemplo ahondan en estos importantes conceptos:

Ejemplo 1.9. *Con la nueva terminología, lo visto en el ejemplo 1.8 permite decir que S_3 y S_4 son bases de $\mathbb{R}^2$ y, por tanto, que $\mathbb{R}^2$ es de dimensión 2. Como S_i es base de $\langle S_i\rangle$ con $i = 1, 2$, estos subespacios tienen dimensión o rango 1.*

- *Una base del subespacio vectorial U de $\mathbb{R}^2$ de los vectores solución del sistema $x+2y = 0$, es $\{(-2, 1)\}$.*
  En efecto, si (α, β) verifica que $\alpha + 2\beta = 0$, entonces $\alpha = -2\beta$, es decir $(\alpha, \beta) = (-2\beta, \beta) = \beta(-2, 1)$.
  Análogamente, si escribimos: $(\alpha, y) = (\alpha, -\frac{\alpha}{2}) = \alpha(1, -\frac{1}{2})$, podemos decir que $\{(1, -\frac{1}{2})\}$ es una base de U. También lo sería $(-4, 2)$.
  Por lo tanto, U es un subespacio vectorial de rango o dimensión 1.

- *Una base del $\mathbb{K}$ - espacio vectorial $\mathbb{K}^3$ es $\{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 0, 1), e_3 = (0, 0, 1)\}$. Más generalmente, una base de $\mathbb{K}^m$ es $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_m\}$, donde*

$$e_i = \overbrace{(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)}^{\text{1 en lugar i)}} \quad \forall\, i,$$

  denominada la **base canónica** *y, por lo tanto la dimensión de $\mathbb{K}^m$ es m. Pero, también*

$$v_i = \overbrace{(0, \ldots, 0, i, 0, \ldots, 0)}^{i\text{ en lugar i)}} \quad \forall\, i, \text{ es otra base de } \mathbb{K}^m.$$

- *Consideremos el sistema lineal siguiente:*

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = & 0 \\ x_1 + x_2 & = & 0 \\ 2x_1 + 2x_2 & = & 0 \end{array}\right. \tag{1.2}$$

  Observar que dicho sistema puede reescribirse como

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_3 + x_4 + x_5 & = & 0 \\ x_1 + x_2 & = & 0 \end{array}\right. \tag{1.3}$$

  Al decir 'reescribir' queremos decir que toda solución del sistema (1.2) es solución de (1.3) y recíprocamente. Eso significa que el conjunto solución en ambos casos es el mismo o, dicho de otra manera, que los sistemas son equivalentes. A partir de aquí trabajamos con (1.3) por ser más sencillo.

Por tanto, una tupla $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ *que sea solución de (1.3) verifica las dos relaciones siguientes y, recíprocamente, si las verifica, es solución del sistema:*

$$\begin{array}{rcl} \alpha_3 & = & -\alpha_4 - \alpha_5 \\ \alpha_1 & = & -\alpha_2 \end{array}$$

Así,

$$\begin{array}{rcl} (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) & = & (-\alpha_2, \alpha_2, -\alpha_4 - \alpha_5, \alpha_4, \alpha_5) \\ & = & \alpha_2(-1, 1, 0, 0, 0) + \alpha_4(0, 0, -1, 1, 0) + \alpha_5(0, 0, -1, 0, 1) \end{array}$$

El conjunto $\mathcal{B}_1 = \{(-1, 1, 0, 0, 0), (0, 0, -1, 1, 0), (0, 0, -1, 0, 1)\}$ *es una base del subespacio solución pues cada solución es combinación lineal de esos vectores y no hay otro conjunto con dos elementos con tal propiedad. La dimensión del subespacio solución es 3.*

También $\mathcal{B}_2 = \{(1, -1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, -1, 0), (0, 0, 1, 0, -1)\}$ *es base. Por tanto cada solución* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ *del sistema de ecuaciones es combinación lineal de* $\mathcal{B}_2$*. Eso significa que existen números* a, b *y* c *verificando:*

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = a(1, -1, 0, 0, 0) + b(0, 0, 1, -1, 0) + c(0, 0, 1, 0, -1)$$

En particular, para la solución del sistema $(5, 5, 1, 2, -3)$ *se tiene que:*

$$(5, 5, 1, 2, -3) = 5(1, -1, 0, 0, 0) - 2(0, 0, 1, -1, 0) + 3(0, 0, 1, 0, -1)$$

Otra base es $\mathcal{B}_3 = \{(2, -2, 0, 0, 0), (0, 0, 1, -1, 0), (0, 0, 0, -1, 1)\}$ *y tenemos:*

$$(5, 5, 1, 2, -3) = \frac{2}{5}(2, -2, 0, 0, 0) + (0, 0, 1, -1, 0) - 3(0, 0, 0, -1, 1)$$

1.1.3. Eliminación Gaussiana

El objetivo es presentar un método sistemático para la resolución de sistemas lineales de cualquier tamaño. La idea del método es muy simple: ir reduciendo en cada paso el problema a un problema que tiene una ecuación menos y una incógnita menos. Este método es conocido como **método de triangulación**, **método de eliminación de Gauss** o **método de eliminación de gaussiana**. Los dos últimos nombres aluden a que en cada paso vamos eliminando una o más incógnitas, y son un reconocimiento a quien introdujo el método: el matemático Carl Friederich Gauss (1777-1855)[3].

Dos sistemas son ***sistemas equivalentes*** si tienen las mismas soluciones.

Para ello se realizarán sobre el sistema inicial una serie de operaciones “sencillas”, que llamaremos *operaciones elementales* con el fin de transformarlo en otro sistema equivalente más simple.
Una situación ideal sería poder transformar un sistema en otro sistema triangular porque su resolución es inmediata, resolviéndolo de “abajo hacia arriba”, como muestra el ejemplo dado a continuación en el que el sistema ya es triangular:

[3] Gauss fue uno de los grandes científicos de toda la historia. Una breve biografía de Gauss y referencias para lecturas posteriores pueden encontrarse en el sitio web `http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/`

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+2z+3t & = & -1 \\ y+z+t & = & -1 \\ 2z+4t & = & -2 \\ -t & = & 1 \end{array}\right. \begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\qquad\quad x=1 \\ \qquad\qquad\quad y=-1 \\ \qquad z=1 \\ \Rightarrow t=-1 \end{array}$$

Las operaciones elementales que vamos a definir sobre un sistema lineal son:

I) Permutar dos ecuaciones entre sí.

II) Multiplicar a una ecuación por un escalar no nulo.

III) Sumar a una ecuación otra ecuación multiplicada por un escalar no nulo.

Se puede comprobar que estas operaciones no alteran el conjunto de soluciones del sistema inicial, es decir, a partir de ellas siempre obtenemos un sistema equivalente a él.

Para mayor comodidad en el desarrollo del método de eliminación gaussiana, vamos a emplear la notación matricial. En ese sentido, observar que el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nm}x_m & = & b_n \end{array}\right.$$

define dos matrices

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad (A|b)=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} & b_n \end{array}\right)$$

llamadas, respectivamente, **matriz de coeficientes** y **matriz ampliada**. Notar que la matriz A tiene exactamente n filas y m columnas.

Ampliaremos en el siguiente tema la teoría sobre matrices. De momento indicar que sus elementos de denotan como a_{ij}, donde i indica la fila y j la columna en la que se encuentra el elemento. Al conjunto de matrices de n filas y m columnas lo representaremos por $\mathcal{M}_{n\times m}$

Además las denotaremos con letras mayúsculas de la forma siguiente

$$A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}}=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} \\ \ldots & \ldots & & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{columna1} & \text{columna j} & \text{columna m} \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{fila 1} \\ \\ \\ \leftarrow \text{fila i} \\ \\ \leftarrow \text{fila n} \end{array} \quad \text{donde } a_{ij}\in\mathbb{K}\ \forall i,j$$

Observar que las operaciones elementales definidas sobre las ecuaciones del sistema se heredan de forma natural a las filas de las matrices asociadas a él. Están definidas las siguientes operaciones elementales por filas:

I) Permutar dos filas entre sí.

II) Multiplicar a una fila por un escalar no nulo.

III) Sumar a una fila otra fila multiplicada por un escalar no nulo.

Dos matrices son equivalentes por filas si se puede transformar una en la otra mediante operaciones elementales por filas.

El método de *eliminación Gaussiana* consiste básicamente en transformar las matrices asociadas a un sistema en otras *escalonadas* donde el primer elemento no nulo, empezando por la izquierda, de cada fila (*pivote*) está a la derecha del pivote de la fila anterior (más adelante formalizaremos con más rigor el concepto de matriz escalonada y matriz reducida por filas). Si existen filas nulas, se escriben en la parte inferior de la matriz. Para ello:

1. Tomamos uno de los elementos de la primera columna de $(A|b)$, $a_{i1} \neq 0$, que llamamos *pivote*. Intercambiamos la fila i (donde está el pivote) con la primera fila de $(A|b)$.

2. Multiplicamos esta primera fila por escalares adecuados de forma que se anulen todos los elementos de la primera columna situados por debajo del primer elemento de la diagonal.

3. Repetimos los pasos anteriores en la segunda columna, buscando el nuevo pivote entre los elementos no nulos por debajo de la diagonal principal. Se repite este proceso sobre todas las columnas hasta la $(i-1)$-ésima.

Ejemplo 1.10. *Discute y resuelve en su caso el sistema* $\left\{\begin{array}{rcr} x+y+2z+3t &=& -1 \\ -x+2y+3z+4t &=& -4 \\ 2x+3y+5z+7t &=& -3 \\ y+z &=& 0 \end{array}\right.$

Resolución: Aplicamos el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} \boxed{1} & 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & -4 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Hemos obtenido un sistema triangular, equivalente al inicial, que resolveremos de “abajo hacia arriba”.

$$\left\{\begin{array}{rcrlllll} x+y+2z+3t &=& -1 & & & & & x=1 \\ y+z+t &=& -1 & & & & y=-1 & \\ 2z+4t &=& -2 & & & z=1 & & \\ -t &=& 1 & \Rightarrow t=-1 & & & & \end{array}\right.$$

Sage ofrece métodos para resolver sistemas de ecuaciones $Ax=b$ sobre un determinado cuerpo $\mathbb{K}$. La solución para el sistema anterior:

Código Sage 1.1: Resolucion Sistema

```
#Variables de entrada
A=matrix([[1,1,2,3],[-1,2,3,4],[2,3,5,7],[0,1,1,0]]);
b=vector([-1,-4,-3,0]);
x=A.solve_right(b)
#La solucion es el vector x=(1,-1,1,-1)
```

Evaluar en SageMathCell

Nota: Existen versiones *right* and *left* para algunas órdenes de Sage. El hecho está relacionado con cómo se definen A y b, se verá en detalle en el tema de matrices.

Ejemplo 1.11. *Discute y resuelve en su caso el sistema* $\left\{\begin{array}{lcl} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 & = & 5 \\ x_1+x_2 & = & 2 \\ 2x_1+2x_2 & = & 4 \end{array}\right.$

Resolución: Aplicamos el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Se obtiene el sistema equivalente $\left\{\begin{array}{lcl} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 & = & 5 \\ x_3+x_4+x_5 & = & 3 \end{array}\right.$

Las ecuaciones resultantes que definen el sistema se dice que están dadas en *forma implícita*. El sistema obtenido es, evidentemente, compatible e indeterminado. Podemos reescribirlo y resolverlo de "abajo a arriba":

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_2+x_3 & = & 5-x_1-x_4-x_5 \\ x_3 & = & 3-x_4-x_5 \end{array}\right. \begin{array}{l} \Longrightarrow \quad x_2 = 2-x_1 \\ \Longrightarrow \quad x_3 = 3-x_4-x_5 \end{array}$$

Cuando las soluciones se expresan dependiendo de ciertos *parámetros*, se les denomina soluciones o ecuaciones en *forma paramétrica*. En nuestro caso x_1, x_4 y x_5 actuarían como parámetros. Y, el conjunto de soluciones del sistema se expresaría como:

$$S_1 = \{(x_1, 2-x_1, 3-x_4-x_5, x_4, x_5) \;:\; x_1, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\}$$

Por otro lado, hemos *despejado* las variables x_2 y x_3 en función de los parámetros x_1, x_4 y x_5; pero podríamos haber despejado x_2 y x_4 en función de los x_1, x_3 y x_5 o también x_1 y x_5 en función de los x_2, x_3 y x_4. La única combinación que no podemos despejar es x_1 y x_2 en función de x_3, x_4 y x_5. Por ejemplo, si despejamos x_1 y x_3 en función de x_2, x_4 y x_5:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_3 & = & 5-x_2-x_4-x_5 \\ x_3 & = & 3-x_4-x_5 \end{array}\right. \begin{array}{l} \Longrightarrow \quad x_1 = 2-x_2 \\ \Longrightarrow \quad x_3 = 3-x_4-x_5 \end{array}$$

Entonces, el conjunto de soluciones del sistema se expresa:

$$S_2 = \{(2-x_2, x_2, 3-x_4-x_5, x_4, x_5) \;:\; x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\}$$

Obviamente los conjuntos S_1 y S_2 son iguales, simplemente estamos representado el conjunto de soluciones del sistema de dos formas distintas.

Algunos autores denotan los parámetros por otro tipo de letra, en lugar de x_2, x_4 y x_5. Si utilizasen, por ejemplo, a, b y c, entonces el conjunto de soluciones queda así:

$$\begin{aligned} S_2 &= \{(2-a, a, 3-b-c, b, c) \ : \ \ a, b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(2,0,3,0,0) + (a, -a, b+c, -b, -c) \ : \ a, b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(2,0,3,0,0) + a(1,-1,0,0,0) + b(0,0,1,-1,0) + c(0,0,1,0,-1) \ : \ a, b, c \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Las expresiones anteriores muestran la relación que existe entre el conjunto S_2 de soluciones del sistema a resolver y el conjunto de soluciones del sistema homogéneo asociado:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = & 0 \\ x_1 + x_2 & = & 0 \\ 2x_1 + 2x_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

Como puede observarse: **La solución general del sistema no homogéneo viene dado por una solución particular, más la solución general del sistema homogéneo asociado.**

Como se ilustra en el Ejercicio 1.9, otra base del subespacio vectorial de arriba es $\mathcal{B}_3 = \{(2,-2,0,0,0), (0,0,1,-1,0), (0,0,0,-1,1)\}$ y otra solución particular del sistema es $(1,1,2,0,1)$, luego el conjunto de soluciones del sistema es:

$$S_2 = \{(1,1,2,0,1) + a(2,-2,0,0,0) + b(0,0,1,-1,0) + c(0,0,-1,0,1) \ : \ a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

Este importante resultado es consecuencia del Teorema de Rouché-Frobenius, que detallaremos en el siguiente apartado.

Código Sage 1.2: Resolución sistema no determinado

```
#Variables de entrada
A=matrix([[1,1,1,1,1] ,[1,1,0,0,0] ,[2,2,0,0,0]]);
b=vector([5,2,4]);
A.solve_right (b); #----------------->Solucion particular
A.transpose().kernel(); #------------>Solucion del sistema
   homogeneo

# La solucion general es la combinacion de ambas soluciones
# a(1,-1 ,0 ,0,0) +b(0,0,1,0,-1)+c(0,0,0,1,-1)+(2,0,3,0,0)= (a
   +2,-a,b+3,c,-b-c)
# cualesquiera a,b, c racionales
```

Evaluar en SageMathCell

1.1.4. Compatibilidad de los sistemas lineales. Teorema de Rouché-Frobenius. Teorema del rango

Definición 1.3. Una matriz $A \in M_{nxm}(\mathbb{K})$ se dice ***escalonada por filas*** si:

I) Sus filas nulas, si existen, son las filas inferiores.

II) El primer elemento no nulo de cada fila, empezando por la izquierda, llamado *pivote*, está a la derecha del pivote de la fila superior.

Ejemplo 1.12.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}}_{\textit{matrices escalonadas}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\textit{matrices no escalonadas}}$$

Definición 1.4. Una matriz $A \in M_{nxm}(\mathbb{K})$ se dice ***reducida por filas*** si es escalonada, con los pivotes iguales a uno y el resto de los elementos de las columnas de los pivotes son nulos.

Ejemplo 1.13. Son matrices reducidas por filas las siguientes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Proposición 1.2. Toda matriz es equivalente a otra escalonada (no de forma única). Toda matriz es equivalente a otra reducida por filas (de forma única).

Definición 1.5. Se llama ***rango*** de una matriz $A \in M_{nxm}(\mathbb{K})$ al número de filas no nulas que tiene cualquier matriz escalonada equivalente a A.

Ejemplo 1.14. *Consideramos las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -6 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & -1 & 8 \\ 3 & 8 & 7 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

y hallamos a continuación una matriz escalonada y una matriz reducida por filas equivalentes a cada una de ellas.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1+F_3]{-3F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_2+F_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 \end{pmatrix}}_{\textit{escalonada}}$$

$$\xrightarrow[-2F_3+F_1]{5F_3+F_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{\textit{reducida}}$$

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & -1 & 8 \\ 3 & 8 & 7 & 0 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{-2F_1+F_4 \\ -3F_1+F_5}]{\substack{-F_1+F_2 \\ -2F_1+F_3}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{2F_2+F_4 \\ F_2+F_5}]{F_2+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3\leftrightarrow F_4}\begin{pmatrix}1&3&2&-1&4\\0&1&-1&2&-1\\0&0&-1&5&-2\\0&0&0&\boxed{5}&-2\\0&0&0&5&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{-F_4+F_5}\underbrace{\begin{pmatrix}1&3&2&-1&4\\0&1&-1&2&-1\\0&0&-1&5&-2\\0&0&0&\boxed{5}&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}}_{escalonada}\xrightarrow[F_4/5]{-F_3}\begin{pmatrix}1&3&2&-1&4\\0&1&-1&2&-1\\0&0&1&-5&2\\0&0&0&\boxed{1}&-2/5\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_4+F_1]{\substack{5F_4+F_3\\-2F_4+F_2}}\begin{pmatrix}1&3&2&0&18/5\\0&1&-1&0&-1/5\\0&0&\boxed{1}&0&0\\0&0&0&1&-2/5\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{F_3+F_2\\2F_3+F_1}}\begin{pmatrix}1&3&0&0&18/5\\0&\boxed{1}&0&0&-1/5\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&-2/5\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-3F_2+F_1}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&0&18/5\\0&1&0&0&-1/5\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&-2/5\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}}_{reducida}$$

En el ejemplo anterior rango$(A) = 3$ y rango$(B) = 4$.

Código Sage 1.3: Calculando la matriz reducida (I)

```
#Variables de entrada
A=matrix(ZZ,[[1,0,2,-1],[3,1,1,0],[-1,1,-6,2]]);
show("A=",A.echelon_form());
show("A=",A.rref());
B=matrix(QQ,[[1,3,2,-1,4],[1,4,1,1,3],[2,5,5,1,7],[2,4,5,-
   1,8],[3,8,7,0,11]]);
show("B=",B.echelon_form());
show("B=",B.rref());
```

Evaluar en SageMathCell

Nota: En general, usando código Sage se recomienda utilizar el método rref() para obtener la matriz reducida. El método echelon_form retorna diferentes resultados dependiendo del conjunto de coeficientes sobre el que está definida la matriz. Ver el siguiente ejemplo.

Código Sage 1.4: Calculando la matriz reducida (II)

```
#Variables de entrada
A=matrix(ZZ,[[1,0,3,1,2],[-1,3,0,-
   1,1],[2,1,7,2,5],[4,2,14,0,6]]) ;
B=matrix(QQ,[[1,0,3,1,2],[-1,3,0,-
   1,1],[2,1,7,2,5],[4,2,14,0,6]]) ;
show("A=",A. echelon_form ()) ;
show("A=",A. rref ()) ;
show("B=",B. echelon_form ()) ;
show("B=",B. rref ()) ;
```

Evaluar en SageMathCell

Teorema 1.2. ***Rouché-Fröbenius*** *Es condición necesaria y suficiente para que un sistema lineal sea compatible que rango*(A) = *rango*$([A|b])$. *Además es compatible determinado si rango*(A) = *n*º *de incógnitas.*

Observación: Todo sistema homogéneo es compatible. Además, si es determinado la única solución es la nula $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$.
Observación: Si el sistema es compatible con rango(A) = rango$(A|b) = r$, se obtendrá un sistema, equivalente al inicial, de orden $r \times n$.

Si $r = n$ el sistema tendrá solución única.

Si $r < n$ las soluciones del sistema dependerán de varios parámetros, concretamente

$$\text{n}^{\underline{\text{o}}} \text{ de parámetros} = n - r$$

Se despejarán r incógnitas en función de las $n - r$ restantes, quedando un sistema equivalente al inicial, de forma que la matriz de coeficientes será de orden $r \times r$ y rango r. $\boxed{\text{La columna de términos independientes depende de las } n-r \text{ restantes incógnitas}}$.

Ejercicio 1.1.1. *Discute y resuelve en su caso los sistemas*

$$(a)\quad \left\{ \begin{array}{rcr} x + 2z &=& -1 \\ 3x + y + z &=& 0 \\ -x + y - 6z &=& 2 \end{array} \right. \qquad (b)\quad \left\{ \begin{array}{rcr} x + 3y + 2z - t &=& 4 \\ x + 4y + z + t &=& 3 \\ 2x + 5y + 5z + t &=& 7 \\ 2x + 4y + 5z - t &=& 8 \\ 3x + 8y + 7z &=& 11 \end{array} \right.$$

Resolución: Tener en cuenta que sus matrices asociadas son las del ejemplo 1.14.

Teorema 1.3. *La solución general del sistema no homogéneo viene dado por una solución particular, más la solución general del sistema homogéneo asociado.*

Ejemplo 1.15. *Aquí hallamos las soluciones de los siguientes sistemas, expresándolas tanto en forma implícita como en forma paramétrica.*

$$\text{(a)}\quad \left\{ \begin{array}{lcr} x + y + z &=& 3 \\ 2x + y - z &=& 1 \\ x - 2z &=& -2 \end{array} \right. \qquad \text{(b)}\quad \left\{ \begin{array}{lcl} x + y + z + t &=& 1 \\ x - y - z + t &=& 1 \\ 2x + 2t &=& 2 \\ 2y + 2z &=& 0 \end{array} \right.$$

– Para el sistema (a):

$$A = \left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow[-F_1+F_3]{-2F_1+F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & -3 & -5 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{-F_2+F_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Como Rango(A)=2=Rango(A|b)$\neq$ nº incógnitas $\Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

Solución en forma de ecuaciones implícitas: $\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ y + 3z = 5 \end{array} \right.$

Solución en ecuaciones paramétricas: $\left\{ \begin{array}{l} x = -2 + 2z \\ y = 5 - 3z \end{array} \right.$

Observar que se cumple que: nº de parámetros = nº incógnitas - rango(A).

– Para el sistema (b):

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-2F_1+F_4]{\substack{-F_1+F_2 \\ -2F_1+F_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-2} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{-F_2+F_3 \\ F_2+F_4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Como Rango(B) = Rango(B|b) ≠ nº incógnitas, entonces el sistema es compatible indeterminado (SCI).

Solución en ecuaciones implícitas: $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ y+z=0 \end{cases}$

Solución en ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x=1-t \\ y=-z \end{cases}$

Observar que se cumple que: nº de parámetros = nº incógnitas - rango(B).

Código Sage 1.5: implementación Rouche-Frobenius

```
 #Variables de entrada
 #Variables de entrada
B=matrix([[1,1,1,1],[1,-1,-1,1],[2,0,0,2],[0,2,2,0]]);
b=vector([1,1,2,0]);
Bb=B.augment(b); #-----> Matriz Aumentada B|b
if Bb.rank()==B.rank():
    if B.ncols() ==B.rank():
        print("Compatible Determinado")
    else:
        n=B.ncols()-B.rank()
        print("Compatible indeterminado, {0} parametros".format(
   n))
else:
    print("No Compatible")
# La salida es "Compatible indeterminado, 2 parametros="
```

Evaluar en SageMathCell

Ejemplo 1.16. *Resolvemos el sistema dado a continuación, definido sobre* $\mathbb{Z}_2$.

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_4+x_5=1 \\ x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+x_3+x_5=1 \\ x_2+x_3+x_5=1 \end{cases}$$

La matriz ampliada del sistema es

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

La llevaremos a una forma escalonada. Comenzamos por sumar la primera fila a la tercera:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ahora sumaremos la segunda a la tercera y la cuarta:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Para obtener la forma reducida intercambiamos las filas tercera y cuarta:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Este sistema es incompatible, puesto que el rango de la matriz del sistema es 3 y el de la ampliada es 4.

A lo largo de este tema se ha hablado de rango de un subespacio vectorial y de rango de una matriz. Ambos conceptos son coincidentes cuando observamos que el rango por filas (respectivamente por columnas) de una matriz coincide con el rango del espacio vectorial generado por las filas de la matriz (respectivamente por las columnas). Ese resultado es conocido como **teorema del rango**, que enunciamos a continuación.

Teorema 1.4. Sea $A = (a_{ij}) \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$. Consideramos el subespacio vectorial S de $\mathbb{K}^m$ generado por los n vectores fila de la matriz A y el subespacio T de $\mathbb{K}^n$ generado por los m vectores columna de la matriz A, se tiene que,

$$rango(A) = \dim(S) = \dim(T)$$

Ejemplo 1.17. *Sea $A \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$, donde*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

En este caso,

$$S = \langle (-1,\,0,\,0,\,1)\,,(1,\,-2,\,0,\,0)\,,(-1,\,1,\,1,\,2)\rangle$$

y

$$T = \langle (-1,\,1,\,-1)\,,(0,\,-2,\,1)\,,(0,\,0,\,1)\,,(1,\,0,\,2)\rangle$$

La forma reducida de la matriz A es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$*, por lo tanto una base de S es*
$\{(1,\,0,\,0,\,-1)\,,\left(0,\,1,\,0,\,-\frac{1}{2}\right),\left(0,\,0,\,1,\,\frac{3}{2}\right)\}$
Por otro lado, la forma reducida de la matriz traspuesta de A,

$$A^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y, por lo tanto, una base de T es $\{(1,\,0,\,0)\,,(0,\,1,\,0)\,,(0,\,0,\,1)\}$

> El teorema del rango permite pues, determinar bases de subespacios de vectores de $\mathbb{K}^m$ sin más que reducir matrices cuyas filas sean los vectores del conjunto generador del subespacio.

1.1.5. Debilidad del método de eliminación de Gauss. Sistemas mal condicionados

Elección práctica del pivote: En lo dicho anteriormente sobre la eliminación Gaussiana, la única restricción sobre los pivotes es que no sean nulos. Sin embargo en ciertas ocasiones hay que tener cuidado en su elección porque los errores de redondeo pueden tener efectos desastrosos cuando aparecen divisiones por pivotes muy pequeños o cuando el pivote es pequeño comparado con algunos elementos de su columna y por lo tanto se produce una inestabilidad numérica en el método de eliminación Gaussiana.

En el siguiente ejemplo se muestra la inestabilidad numérica del algoritmo de eliminación Gaussiana, consecuencia de la división por un pivote pequeño.

Ejemplo 1.18. *Consideremos el sistema:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2^{-20}x+y & = & 1 \\ x+y & = & 2 \end{array}\right.$$

• Aplicando el método de Gauss directamente:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2^{-20} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{-2^{20}F_1+F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 2^{-20} & 1 & 1 \\ 0 & 1-2^{20} & 2-2^{20} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2^{-20} & 1 & 1 \\ 0 & -2^{20} & -2^{20} \end{array}\right)$$

luego tenemos el sistema triangular $\left\{\begin{array}{rcl} 2^{-20}x+y & = & 1 \\ -2^{20}y & = & -2^{20} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 1 \end{array}\right.$

que no es, evidentemente, solución del sistema.
• Permutando filas tomemos ahora como pivote a 1

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2^{-20} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2^{-20} & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2^{-20}F_1+F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-2^{-20} & 1-2^{-19} \end{array}\right) \sim$$

$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ queda el sistema triangular $\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 2 \\ y & = & 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & 1 \end{array}\right.$

que es la solución única del sistema.

El siguiente ejemplo muestra la inestabilidad numérica del algoritmo de eliminación Gaussiana, cuando el pivote es "pequeño" comparado con algunos elementos de su columna.

Ejemplo 1.19. *Consideremos el sistema*

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0,03x+58,9y & = & 59,2 \\ 5,31x-6{,}1y & = & 47 \end{array}\right.$$

• Aplicando el método de Gauss directamente, con redondeo a tres dígitos:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0{,}03 & 58{,}9 & 59{,}2 \\ 5{,}31 & -6{,}1 & 47 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{5{,}31}{0{,}03}F_1+F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 0{,}03 & 58{,}9 & 59{,}2 \\ 0 & -10400 & -10500 \end{array}\right)$$

luego tenemos el sistema triangular $\left\{\begin{array}{rcr} 0{,}03x+58{,}9y & = & 59{,}2 \\ -10400y & = & -10500 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcr} x & = & -10 \\ y & = & 1{,}01 \end{array}\right.$

que, evidentemente, no es solución del sistema.
• Permutamos filas y tomamos ahora como pivote a 5,31

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0{,}03 & 58{,}9 & 59{,}2 \\ 5{,}31 & -6{,}1 & 47 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 5{,}31 & -6{,}1 & 47 \\ 0{,}03 & 58{,}9 & 59{,}2 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{0{,}03}{5{,}31}F_1+F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 5{,}31 & -6{,}1 & 47 \\ 0 & 58{,}9 & 58{,}9 \end{array}\right)$$

luego tenemos el sistema triangular $\left\{\begin{array}{rcr} 5{,}31x-6{,}1y & = & 47 \\ 58{,}9y & = & 58{,}9 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcr} x & = & 10 \\ y & = & 1 \end{array}\right.$

que es la solución exacta del sistema, como se puede comprobar trivialmente.

Para tratar de evitar tales dificultades, se introduce en el método de Gauss una estrategia que consiste en seleccionar el pivote de acuerdo con unos ciertos criterios.

Un método es el de *pivoteo máximo por columna* o *pivoteo parcial* : Seleccionamos como pivote el primer elemento, distinto de cero, de la columna j-ésima a partir de la fila j-ésima (por debajo de la diagonal principal) tal que sea el de mayor valor absoluto. Se intercambian las filas y se continúa con la eliminación Gaussiana. Se denomina *pivoteo parcial.*

Existen otras técnicas de elección de pivotes como por ejemplo el *pivoteo escalado de fila.*

Sistemas mal condicionados Puede ocurrir que un pequeño cambio en los datos de un sistema produzca un cambio grande en la solución de este sistema. Un sistema se dice *bien condicionado* si "pequeños" cambios en los datos producen un cambio "pequeño" en la solución. El buen o mal condicionamiento es intrínseco al sistema y no depende del algoritmo empleado para resolverlo.

En los siguientes ejemplos un pequeño cambio en los datos ocasiona un cambio grande en la solución y son ejemplos de sistemas mal condicionados.

Ejemplo 1.20. *Consideremos los sistemas*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 2 \\ 10{,}05\,x+10y & = & 21 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 2 \\ 10{,}1\,x+10y & = & 21 \end{array}\right.$$

donde hemos provocado una pequeña perturbación en la matriz de coeficientes.

Trivialmente, la solución exacta del primer sistema es $x = 20; y = -18$
Trivialmente, la solución exacta del segundo sistema es $x = 10; y = -8$

Variación relativa del valor del coeficiente alterado: $\dfrac{|10{,}05 - 10{,}1|}{10{,}05} = 0,00497 \sim 0,5\,\%$

Variación relativa de la solución en la incógnita x es: $\dfrac{20 - 10}{20} = 0,5 = 50\,\%$

Variación relativa de la solución en la incógnita y es: $\dfrac{|-18-(-8)\,|}{|\,-18|} = 0{,}555 \sim 56\,\%$

Ejemplo 1.21. *Consideremos los sistemas*

$$\left\{\begin{array}{lcl} 4,1x + 2,8y & = & \boxed{4{,}10} \\ 9,7x + 6,6y & = & 9,7 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} 4,1x + 2,8y & = & \boxed{4{,}11} \\ 9,7x + 6,6y & = & 9,7 \end{array}\right.$$

.
donde hemos provocado una pequeña perturbación en el término independiente.

Trivialmente la solución exacta del primer sistema es $x = 1; y = 0$
Trivialmente la solución exacta del segundo sistema es $x = 0,34; y = 0,97$

Variación relativa del valor del término independiente es: $\dfrac{4{,}1 - 4{,}11}{4{,}1} = 0,0024 \sim 0,2\,\%$

Variación relativa de la solución en la incógnita x es: $\dfrac{1 - 0{,}34}{1} = 0,66 \sim 66\,\%$.

Veremos en el tema de matrices el concepto de *número de condición* de una matriz A , que mide la sensibilidad de la solución de un sistema lineal de matriz asociada A , respecto a variaciones en la matriz de coeficientes y/o los términos independientes.

1.2. Matrices

En el tema anterior a todo sistema de ecuaciones lineales le asociamos una **matriz**, es decir, una “caja”de números ordenados por filas (horizontalmente) y por columnas (verticalmente) que se escriben enmarcados entre paréntesis. En próximos temas también le asociaremos una matriz a cierto tipo de aplicaciones. El objetivo de este nuevo tema es profundizar en este importante concepto. Bajo ciertas condiciones, que iremos estudiando, se pueden definir algunas operaciones con matrices, tales como la suma (suma de aplicaciones), el producto (composición de aplicaciones), el cálculo de la matriz inversa (aplicaciones biyectivas), etc. que dotan al conjunto de las matrices de una estructura algebraica que las convierte en una herramienta imprescindible en el estudio en muchas ramas de la ciencia: economía, psicología, física, informática, estadística, etc.

1.2.1. Primeras definiciones y ejemplos

Definición 1.6. Una matriz de orden n x m sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es una familia de n vectores de $\mathbb{K}^m$. Al conjunto de todas las matrices de orden n x m con elementos en el cuerpo $\mathbb{K}$ se le denota $M_{nxm}(\mathbb{K})$.

El vector i-ésimo se dice fila i-ésima de la matriz. La componente j-ésima del vector i-ésimo se dice término (i, j) de la matriz.

Queda claro que el orden $n \times m$ de una matriz indica su «tamaño» , donde n nos indica el número de filas de la matriz y m el número de sus columnas.

Notación: Las matrices las denotaremos con letras mayúsculas de la forma siguiente

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & & \dots\dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} \\ \dots & \dots & & \dots\dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{fila 1} \\ \\ \\ \leftarrow \text{fila i} \\ \\ \leftarrow \text{fila n} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{columna1} & \text{columna j} & \text{columna m} \end{array} & \end{array} \qquad \text{donde } a_{ij} \in \mathbb{K}\ \forall\, i, j$$

Algunos tipos de matrices, atendiendo al orden:

Matriz rectangular Si $m \neq n$.

Matriz cuadrada Si $m = n$. $M_n(\mathbb{K})$ es el conjunto de matrices cuadradas de orden n.

Matriz o vector fila Cuando $A = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1m}) \in M_{1\text{x}m}(\mathbb{K})$.

Matriz o vector columna Cuando $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ .. \\ .. \\ a_{1n} \end{pmatrix} \in M_{n\text{x}1}(\mathbb{K})$.

Matriz diagonal Cuando $A \in M_n(\mathbb{K})$ y $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$.

Diagonal principal Está formada por los elementos a_{ii} .

Matriz escalar Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ es diagonal y todos los elementos de la diagonal son iguales.

Matriz identidad o unidad Es la matriz escalar cuyos elementos son 1. Se denota I_n .

Matriz triangular superior Cuando $A \in M_n(\mathbb{K})$ y $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$.

Matriz triangular inferior Cuando $A \in M_n(\mathbb{K})$ y $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$.

Matriz nula Cuando $A \in M_{nxm}(\mathbb{K})$ y $a_{ij} = 0$ para todo i , j.

Matriz opuesta Si $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} \in M_{nxm}(\mathbb{K})$ su opuesta es $-A = (-a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} \in M_{nxm}(\mathbb{K})$.

Matriz transpuesta Dada $A \in M_{nxm}(\mathbb{K})$ se llama transpuesta de A y se denota A^t a aquella matriz cuyas filas son las columnas de A (y por tanto sus columnas son las filas de A). Notar que $A^t \in M_{mxn}(\mathbb{K})$.

Matriz simétrica $A \in M_n(\mathbb{K})$ es simétrica si $A = A^t$.

Matriz antisimétrica $A \in M_n(\mathbb{K})$ es antisimétrica si $A = -A^t$.

Ejemplo 1.22.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz nula de orden 3 x 2 . $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ son opuestas.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es diagonal ; $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es escalar y $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la identidad I_3

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ es triangular inferior y $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ triangular superior.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ son matrices traspuestas. Se denotan A y A^t.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ es simétrica. Observar que toda matriz simétrica debe ser cuadrada.

$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ es antisimétrica. Toda matriz antisimétrica tiene diagonal principal nula.

Ejercicio 1.2.1. *Pon más ejemplos de cada una de las matrices descritas anteriormente.*

Ejercicio 1.2.2. *Construye las siguientes matrices:*

a) $A \in M_4(\mathbb{R})$ *tal que* $a_{ij} = |i - j|$

b) $B \in M_{4\times3}(\mathbb{R})$ *tal que* $b_{ij} = \text{máx}\{i, j\}$.

Existen diversas formas de construir un objeto tipo matriz en Sage. Algunos cuerpos implementados son ZZ (enteros), QQ (racionales), RR (reales) y CC (complejos).

Código Sage 1.6: Declaración e inicialización de matrices (I)

```
#Definicion estandard (Cuerpo, numero de filas, numero de
  columnas, elementos)
A=matrix(QQ,2,3,[[1,2,3],[4,5,6]]);

#Definiciones acortadas
B= matrix(QQ,[[1,2,3],[4,5,6]]); # Estructura se infiere de la
   estructura de los elementos
C= matrix(QQ, 2,[1,2,3,4,5,6]); # Se define el numero de filas

#Definir sin especificar cuerpo, se elige segun los elementos.
   Metodo parent para ver el tipo
```

```
A=matrix(2,3,[[1,2,3],[4,5,6]]);
print(A.parent());
#Full MatrixSpace of 2 by 3 dense matrices over Integer Ring
B=matrix(2,3,[[2,2/3,3],[4,5,6]]);
print(B.parent());
#Full MatrixSpace of 2 by 3 dense matrices over Rational Field
C=matrix(2,3,[[2,sin(3.3),3],[4,5,6]]);
print(C.parent());
#Full MatrixSpace of 2 by 3 dense matrices over Real Field with
   53 bits of precision
```

Evaluar en SageMathCell

También es posible definir las matrices mediante una función como muestra el siguiente ejemplo:

Código Sage 1.7: Declaración e inicialización de matrices (II)

```
 #Dos alternativas
#Funcion lambda
 A=matrix(RR,3,3,lambda i,j:abs((i+1)-(j+1)));
show(A);
#Definir funcion auxiliar
def Maximo(i,j):
    return max(i,j)
B=matrix(RR,4,3,lambda i,j:Maximo(i+1,j+1));
show(B);
```

Evaluar en SageMathCell

Nota: En Sage los índices comienzan en cero, por ejemplo el elemento a_{11} de una matriz es A[0,0]. Esto es común en muchos lenguajes de programación.

1.2.2. Igualdad de matrices

Sean $A, B \in M_{nxm}(\mathbb{K})$, entonces $A = B$ si $a_{ij} = b_{ij}\ \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \forall\, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

1.2.3. Suma de matrices

Dadas $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} \in M_{nxm}(\mathbb{K})$, $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} \in M_{nxm}(\mathbb{K})$ se define la suma como

$$A + B = (c_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} \in M_{nxm}(\mathbb{K}) \text{ tal que } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Por tanto sólo se pueden sumar matrices cuando sean del mismo orden y se suman «elemento a elemento».

Propiedades de la suma de matrices

Asociativa , Conmutativa, Elemento neutro (matriz nula) y opuesto (matriz opuesta).

1.2.4. Producto de una matriz por un escalar

Dados $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} \in M_{nxm}(\mathbb{K})$, y $\lambda \in \mathbb{K}$ se define el producto

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}) \in M_{nxm}(\mathbb{K})$$

Propiedades del producto de una matriz por un escalar

Asociativa respecto del producto por escalares:

$$\forall \lambda, \beta \in \mathbb{K} \text{ y } \forall A \in M_{nxm}(\mathbb{K}) \text{ se tiene que } \; (\lambda\beta)A = \lambda(\beta A)$$

Conmutativa: $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ y $\forall A \in M_{nxm}(\mathbb{K})$ se tiene que $\lambda A = A\lambda$
Distributiva respecto de la suma de matrices:

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \text{ y } \forall A\,, B \in M_{nxm}(\mathbb{K}) \text{ se tiene que } \; \lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$$

Distributiva respecto de la suma de escalares:

$$\forall \lambda, \beta \in \mathbb{K} \text{ y } \forall A \in M_{nxm}(\mathbb{K}) \text{ se tiene que } \; (\lambda+\beta)A = \lambda A + \beta A$$

Teorema 1.5. El conjunto $(M_{nxm}(\mathbb{K}), +, \cdot_\lambda)$ es un espacio vectorial de dimensión $n \,\mathrm{x}\, m$

Ejemplo 1.23. *Resolver el sistema matricial* $\left\{\begin{array}{ll} A+2B & = I_2 \\ 2A+B & = 0 \end{array}\right.$
Se resuelve , por ejemplo, por reducción como un sistema numérico "normal"

$\left\{\begin{array}{ll} A+2B & = I_2 \\ 2A+B & = 0 \end{array}\right. \left| \begin{array}{c} -2 \\ \end{array}\right| \left\{\begin{array}{rr} -2A-4B = & -2I_2 \\ 2A+B = & 0 \end{array}\right. \overset{+}{\Rightarrow} -3B = -2I_2 \Rightarrow B = \dfrac{2}{3}I_2$. Despejando de la segunda ecuación $A = \dfrac{-B}{2}$.

Basta sustituir ahora y se tiene $B = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}$

1.2.5. Producto de matrices

Dadas $A \in M_{nxm}(\mathbb{K})$, $B \in M_{mxp}(\mathbb{K})$ se define el producto como

$$A.B = (c_{ij}) \in M_{nxp}(\mathbb{K}) \text{ donde } c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \; j \in \{1, \ldots, p\}$$

Observar que para poder multiplicar dos matrices el número de columnas de la primera matriz debe coincidir con el número de filas de la segunda matriz. Además la matriz producto tiene el mismo número de filas que la primera matriz y el mismo número de columnas que la segunda.

Ejemplo 1.24. *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ *calcular:*

$\bullet A{*}B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 3} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 2 & 1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 3\cdot 3 \\ 4\cdot 1 + 5\cdot(-1) + 6\cdot 2 & 4\cdot 0 + 5\cdot 1 + 6\cdot 3 \end{pmatrix}_{2\times 2} =$
$= \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 23 \end{pmatrix}_{2\times 2}$

$$\bullet B*A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 2} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+0\cdot 4 & 1\cdot 2+0\cdot 5 & 1\cdot 3+0\cdot 6 \\ -1\cdot 1+1\cdot 4 & -1\cdot 2+1\cdot 5 & -1\cdot 3+1\cdot 6 \\ 2\cdot 1+3\cdot 4 & 2\cdot 2+3\cdot 5 & 2\cdot 3+3\cdot 6 \end{pmatrix}_{3\times 3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 14 & 19 & 24 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Observamos que el producto de matrices no es conmutativo.

Propiedades del producto de matrices

Asociativa; Distributiva respecto a la suma de matrices.

Teorema 1.6. El conjunto $(M_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ es un anillo unitario no conmutativo con divisores de cero.

Observación: El producto de matrices *no es conmutativo*. Esto conlleva que ciertas operaciones y resultados habituales en el cuerpo de los números reales no se trasladen al producto de matrices.

Ejercicio 1.2.3. Demuestra que las siguientes igualdades no son ciertas en $M_n(\mathbb{R})$.

a) Si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ entonces $(A \pm B)^2 = A^2 + B^2 \pm 2AB$

b) Si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ entonces $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

c) Si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $AB = 0$ entonces $A = 0$ *ó* $B = 0$ (Divisores de cero)

d) Si $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $AB = AC$ entonces $B = C$

Ejemplo 1.25. *Sean* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Se tiene que $A * B = A * C = \begin{pmatrix} 10 & 13 \\ 10 & 13 \end{pmatrix} \not\Rightarrow B = C$

Además también $A * D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Definición 1.7. (Matriz inversible) Una $A \in M_n(\mathbb{K})$ se dice *inversible* o *regular* si existe otra matriz , que denotamos $A^{-1} \in M_n(\mathbb{K})$, verificando que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$. A^{-1} se llama matriz inversa de A.

Observar que una condición necesaria para que una matriz admita inversa es que sea cuadrada, pero no es condición suficiente. Es decir no todas las matrices cuadradas admiten inversa. Más adelanta caracterizaremos las matrices inversibles a través de su rango y/o su determinante.

Propiedades de la matriz inversa Sean $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ matrices inversibles, entonces:

a) A^{-1} es única y $(A^{-1})^{-1} = A$

b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

c) $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} A^{-1}$ para $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$

d) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Potencia n-ésima de una matriz

Definición 1.8. Dada $A \in M_n(\mathbb{K})$, se llama potencia n-ésima de A al producto de A por sí misma, n veces. Es decir $A^n = \underbrace{A \cdot A \dots A}_{\text{n veces}}$.

Por convenio de define $A^0 = I_n$ y se tiene que $A^{-n} = (A^{-1})^n$.

Matriz idempotente $A \in M_n(\mathbb{K})$ es idempotente si $A^2 = A$.

Matriz periódica de periodo n es aquella matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ tal que $A^{n+1} = A$ (n es el menor entero que verifica la igualdad).

Matriz nilpotente de índice n es aquella matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ tal que $A^n = 0$ (n es el menor entero que verifica la igualdad).

Matriz involutiva $A \in M_n(\mathbb{K})$ es involutiva si $A^2 = I_n$.

Matriz ortogonal $A \in M_n(\mathbb{K})$ es ortogonal si $AA^t = I_n = A^tA$.

Ejemplo 1.26. $A = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ es idempotente porque $A^2 = A$

$A = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ es nilpotente de índice 2 porque $A^2 = 0$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ es involutiva porque $A^2 = I_3$

$A = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es ortogonal porque $A * A^t = I_3 = A^t * A$

1.2.6. Propiedades de la transpuesta de una matriz

Sean $A \in M_{nxm}(\mathbb{K})$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, se cumple que:

a) $(A^t)^t = A$

b) $(\lambda A)^t = \lambda A^t$

c) $(A + B)^t = A^t + B^t$ siendo $B \in M_{nxm}(\mathbb{K})$

d) $(AB)^t = B^tA^t$ siendo $B \in M_{mxp}(\mathbb{K})$

e) AA^t y A^tA son matrices simétricas

f) Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ entonces $A + A^t$ es una matriz simétrica y $A - A^t$ es antisimétrica.

g) Toda $A \in M_n(\mathbb{K})$ se puede expresar como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

Demostración. Para demostrar que una matriz es simétrica , se debe calcular su traspuesta y comprobar que coincide con la matriz.

e) $(A\,A^t)^t \stackrel{d}{=} (A^t)^t\,A^t \stackrel{a}{=} AA^t \Rightarrow AA^t$ coincide con su traspuesta luego es simétrica.

f) $(A + A^t)^t \stackrel{c}{=} A^t + (A^t)^t \stackrel{a}{=} A^t + A = A + A^t \Rightarrow A + A^t$ es simétrica.

$(A - A^t)^t \stackrel{c}{=} A^t - (A^t)^t \stackrel{a}{=} A^t - A = -(A + A^t) \Rightarrow A - A^t$ es antisimétrica.

g) Evidentemente $A = \frac{1}{2}\underbrace{(A + A^t)}_{\textit{simétrica}} + \frac{1}{2}\underbrace{(A - A^t)}_{\textit{antisimétrica}}$

Código Sage 1.8: Operaciones con matrices

```
 #Variables de entrada
A=matrix(QQ,2,[1,2,1,2]);
B=matrix(QQ,2,[2,3,4,5]);
show("A+B=",A+B);
show("A*B=",A*B);
show("B*A=",B*A);
show(B^-1);#Inversa de la matriz B
show(B.transpose()); #Transpuesta de la matriz B
```

Evaluar en SageMathCell

Nota: Sage está orientado a objetos, lo que implica a efectos prácticos que todas las matrices son objetos y tienen métodos asociados. Cualquier método aplicado a un objeto puede ser llamado mediante ".". Algunos métodos ofrecen la opción de ser llamados como operadores para ser más próximos al lenguaje matemático.

1.2.7. Matrices y operaciones elementales

Se denominan *transformaciones* u *operaciones elementales* por filas sobre una matriz A a:

I) Permutar dos filas entre sí.

II) Multiplicar una fila por un escalar.

III) Sumar a una fila otra fila multiplicada por un escalar.

Análogamente se pueden definir operaciones elementales por columnas sobre A.

Definición 1.9. Llamamos matriz $E_{ij} \in M_n(\mathbb{K})$ a la matriz que tiene todos sus términos nulos, salvo el (i, j) que es 1_K .

Ejemplo 1.27. *En $M_3(\mathbb{R})$ la matriz* $E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Definición 1.10. ***Matrices elementales*** Sean $1 \leq i, j \leq n$, se dice matriz elemental

de tipo I a $P_{ij} = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$.

de tipo II a $P_i(\lambda) = I_n - E_{ii} + \lambda E_{ii}$ donde $\lambda \in \mathbb{K} \smallsetminus \{0\}$

de tipo III a $P_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ donde $\lambda \in \mathbb{K} \smallsetminus \{0\}$ $i \neq j$.

Ejemplo 1.28. **Tipo I** En $M_3(\mathbb{R})$ la matriz $P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Es decir P_{ij} resulta de permutar en la matriz identidad la fila i con la fila j

Tipo II En $M_3(\mathbb{R})$ la matriz $P_2(-3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $P_1(5) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Es decir en la diagonal de la matriz identidad se reemplaza , en el lugar indicado por el subíndice, el uno por el escalar correspondiente.

Tipo III En $M_3(\mathbb{R})$ la matriz $P_{23}(-5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $P_{12}(7) = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Es decir en la matriz identidad se escribe el escalar λ en la posición (i, j).

Ejemplo 1.29. ¿ Qué ocurre al multiplicar $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ por las matrices anteriores?

Tipo I

$P_{23} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ permuta las filas 2ª y 3ª de A

$P_{12} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ permuta las filas 1ª y 2ª de A

Tipo II

$P_2(-3) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -12 & -15 & -18 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ la 2ª fila se multiplica por -3.

$P_1(5) \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ la 1ª fila se multiplica por 5.

Tipo III

$P_{23}(-5) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -31 & -35 & -39 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ a la 2ª fila se ha sumado la 3ª multiplicada por -5

$P_{12}(7) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 37 & 45 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ a la 1ª fila se le ha sumado la 2ª multiplicada por 7

Este comportamiento se generaliza en la siguiente

Proposición 1.3. Sea una matriz A sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces:

i) $P_{ij}\,A$ es la matriz que resulta de permutar en A las filas i, j.

ii) $P_i(\lambda)A$ es la matriz que resulta de multiplicar en A la fila i por λ.

iii) $P_{ij}(\lambda)A$ es la matriz que resulta de sumar en A a la fila i la fila j multiplicada por λ.

Observación: Las operaciones AP_{ij} , $AP_i(\lambda)$ y $AP_{ij}(\lambda)$ actúan de forma similar sobre las columnas de A

Proposición 1.4. Las matrices elementales son inversibles o regulares. Concretamente:

i) $P_{ij}P_{ij} = I_n$

ii) $P_i(\lambda)P_i(1/\lambda) = I_n$

iii) $P_{ij}(\lambda)P_{ij}(-\lambda) = I_n$

Observación : Mediante operaciones elementales, transformaremos una matriz en otras *equivalentes* a ella de tipo triangular, diagonal, escalonada, de la forma $[I_r, 0]$, etc. y lo aplicaremos a la resolución de sistemas lineales.

Definición 1.11. Matrices equivalentes Dos matrices $A, B \in M_{nxm}(\mathbb{K})$ son equivalentes si existen matrices regulares P y Q tales que $B = PAQ$. Se denota $A \sim B$.

Si partiendo de una matriz A llegamos, efectuando un número finito de operaciones elementales, a otra matriz B entonces ambas matrices son equivalentes.

Observación: El método consistente en transformar, mediante operaciones elementales, una matriz en otra equivalente de forma escalonada , tal que los elementos por debajo de los pivotes de la diagonal principal sean ceros, se conoce como *método de Gauss*. Utilizaremos este método para calcular el rango de una matriz, calcular, si existe, A^{-1}, cálculo de determinantes, resolución de sistemas lineales, etc.

Proposición 1.5. a) Dos matrices equivalentes tienen el mismo rango.
b) Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$. Rango(A) = n $\Leftrightarrow$ existe A^{-1}.

Cálculo de la matriz inversa mediante operaciones elementales
Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$ regular. Si mediante operaciones elementales por filas transformamos la matriz A en la matriz I_n , se tendrá que repitiendo las mismas operaciones sobre I_n , esta se transformará en A^{-1}.
Los cálculos se efectuan simultáneamente, orlando A ,por la derecha, con la matriz I_n:

$$(A|I_n) \sim (I_n|A^{-1})$$

Ejemplo 1.30. *Calcula, si existe, la matriz inversa de* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -6 \end{pmatrix}$

$$(A|I_n) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[P_{31}(1)]{P_{21}(-3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{P_{32}(-1)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[P_{13}(-2)]{P_{23}(5)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 17 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & 1 \end{array}\right) = (I_n|A^{-1})$$

Se puede comprobar que $A * A^{-1} = I_3$

Ejercicio 1.2.4. *Calcula, si existe, la matriz inversa de* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Código Sage 1.9: Orlardo una matriz en Sage por filas y por columnas

```
#Variables de entrada
A=matrix(QQ,2,[[1,2],[4,5]]);
B=identity_matrix(2);
show(A.augment(B));
show(A.stack(B));
#Calculo de la matriz inversa utilizando la matriz reducida
C=(A.augment(B)).rref();
show(C);
show(A*C.matrix_from_columns([2,3]));
```

Evaluar en SageMathCell

1.2.8. Expresión matricial de un sistema lineal

Vimos que un sistema lineal de n ecuaciones con m incógnitas se escribe de la forma.

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m & = & b_n \end{array} \right.$$

Este sistema se puede expresar en forma matricial como

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}}_{\text{matriz de coeficientes}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_{\text{incógnitas}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{\substack{\text{términos} \\ \text{independientes}}} \Leftrightarrow AX = b$$

Notación: Llamamos *matriz ampliada* del sistema a $A' = (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} & b_n \end{array}\right)$

Si el sistema es compatible determinado , su solución se podrá calcular como $X = A^{-1}b$.

Pequeña introducción al concepto de *Condición de una matriz*

Vimos en el tema de sistemas, que pequeñas variaciones en los coeficientes o en los términos independientes del sistema pueden producir grandes variaciones en las soluciones del sistema. Se dice que están mal condicionados. Para ampliar formalmente el concepto anterior y sin entrar en profundidad en el tema, debemos introducir los siguientes conceptos y resultados.

Norma matricial Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ se definen la siguientes *normas matriciales*:

- $\| A \|_2 = \max\limits_{\|X\|_2=1} \| AX \|_2$ norma euclídea
- $\| A \|_1 = \max\limits_{1\leq j\leq n} \sum\limits_{i=1}^{n} | a_{ij} |$ elementos de las columnas de A
- $\| A \|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} | a_{ij} |$ elementos de las filas de A

Ejemplo 1.31. *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$*, se calculan las normas matriciales de la siguiente forma:*

- $\| A \|_1 = \max\{2, 4\} = 4$
- $\| A \|_\infty = \max\{3, 3\} = 3$
- $\| A \|_2 = \sqrt{10}$. Esto se demostrará en temas posteriores.

Definición 1.12. Se llama número de *condición* de una matriz inversible A al número

$$cond(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\|$$

Si $cond(A) \approx 1$, diremos que A está *bien condicionada* o lo que es lo mismo que el sistema, cuya matriz de coeficientes es A, está bien condicionado.

Así, bajo ciertas hipótesis se puede resumir que: si la matriz A está bien condicionada, es decir, si $cond(A) \approx 1$, entonces cambios "pequeños" en A y b producen cambios "pequeños" en la solución del sistema, es decir el sistema está bien condicionado.

El número de condición de una matriz A, mide la sensibilidad de la solución de un sistema lineal de ecuaciones de matriz A respecto a variaciones en la matriz de coeficientes y/o los términos independientes.

Observación: Las matrices ortogonales, que veremos en temas posteriores, son muy bien condicionadas para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

1.2.9. Factorización L U

Partimos de una matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ y calculamos matrices L (triangular inferior) , U (triangular superior) y P (matriz de permutación) tal que $PA = LU$.
Hay que hacer notar que la factorización LU , si existe, no es única.

Descomposición LU sin intercambio de filas y $|A| \neq 0$

Aplicando el algoritmo de Gauss reducimos la matriz A a otra matriz equivalente escalonada por filas. Esta matriz es U.

Además sabemos que existirán matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tales que

$$E_1 E_2 \ldots E_k A = U \Rightarrow A = E_k^{-1} E_{k-1}^{-1} \ldots E_1^{-1} U \text{ . Basta tomar } L = E_k^{-1} E_{k-1}^{-1} \ldots E_1^{-1}$$

.

Nota: En la práctica la matriz L se obtiene de la siguiente forma:

• Los elementos de su diagonal principal son unos.

• Los elementos situados por debajo de la diagonal principal son los opuestos de los multiplicadores utilizados en la eliminación Gaussiana para calcular U .

Ejemplo 1.32. *Hallar la factorización LU de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & -6 \\ 4 & 6 & -11 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -3 \\ 2 & 3 & -6 \\ 4 & 6 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow[P_{21}(-2)]{P_{31}(-4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{32}(-2)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U}$$

por tanto $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (2) & 1 & 0 \\ (4) & (2) & 1 \end{pmatrix}$. Se puede comprobar que $LU = A$

Observar que se tendría $P_{32}(-2)P_{31}(-4)P_{21}(-2)A = U \Rightarrow A = \underbrace{P_{21}(2)P_{31}(4)P_{32}(2)}_{L}\, U$

Ejercicio 1.2.5. *Halla la descomposición LU de la matriz* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 10 \\ -1 & -3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

Descomposición LU con intercambio de filas y $|A| \neq 0$

Si permutamos dos filas, se genera una matriz elemental de permutación P que resulta de hacer esa permutación sobre la matriz identidad. El efecto sobre L es la permutación de los multiplicadores. Entonces $PA = LU \Rightarrow A = P^{-1}LU$.

Ejemplo 1.33. *Halla la factorización LU de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -4 & -12 & 11 \\ 3 & 14 & -16 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 6 & -4 \\ -4 & -12 & 11 \\ 3 & 14 & -16 \end{pmatrix} \xrightarrow[P_{21}(2)]{P_{31}(-3/2)} \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ (-2) & 0 & 3 \\ (3/2) & 5 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{23}} \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ (3/2) & 5 & -10 \\ (-2) & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

◇ Observar que escribimos los opuestos de los multiplicadores por debajo de la diagonal principal, (entre paréntesis), en lugar de los ceros que resultan de los cálculos para ayudarnos a la hora de permutarles.

Así tenemos $U = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

P resulta de intercambiar en la matriz identidad las filas 2ª y 3ª, igual que en la eliminación por Gauss. Entonces $PA = LU$.

Ejemplo 1.34. *Hallar la factorización LU de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & -7 & 6 \\ 5 & 25 & -15 & -3 \\ 6 & -12 & -6 & 22 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & -7 & 6 \\ 5 & 25 & -15 & -3 \\ 6 & -12 & -6 & 22 \end{pmatrix} \xrightarrow[P_{41}(-6)]{\substack{P_{21}(-4)\\ P_{31}(-5)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ (4) & \boxed{-3} & 1 & 2 \\ (5) & 15 & -5 & -8 \\ (6) & -24 & 6 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow[P_{42}(-8)]{P_{32}(5)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ (4) & -3 & 1 & 2 \\ (5) & (-5) & 0 & 2 \\ (6) & (8) & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{43}}$$

$$\xrightarrow{P_{43}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ (4) & -3 & 1 & 2 \\ (6) & (8) & -2 & 0 \\ (5) & (-5) & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Observar que hemos ido guardando los opuestos de los multiplicadores en las matrices de trabajo, escribiéndolos entre paréntesis.

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 1 & 0 \\ 5 & -5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Código Sage 1.10: Ejemplo Factorización LU

```
#Variables de entrada
A=matrix(QQ,4,[[1,2,-2,1],[4,5,-7,6],[5,25,-15,-3],[6,-12,-
   6,22]]);
P,L,U=A.LU();
show(P*L*U);
```

Evaluar en SageMathCell

Nota: El comando $A.LU()$ devuelve tres matrices P, L y U tales que P es una matriz permutación, L una matriz triangular inferior y U una matriz triangular superior tales que $A = PLU$. La factorización LU no es única, aunque Sage siempre devuelve la misma.

1.2.10. Resolución de sistemas aplicando Factorización LU

En este apartado ilustramos una de las aplicaciones notables de la factorización LU de una matriz inversible A, la cuál permite resolver sistemas del tipo $Ax = b$, para la misma matriz A pero para distintos b muy eficientemente, en términos de complejidad computacional.

Vimos que si $A \in M_n(\mathbb{K})$ es inversible, entonces existe una matriz de permutación P tal que $PA = LU$. En este caso, sustituyendo en el sistema (1) se tiene: $Ax = b \Rightarrow PAx = Pb \Rightarrow LUx = Pb$. Para resolver el sistema, hay que hacer:

1. Resolver L y = Pb
2. Resolver U x = y

donde ambos sistemas resultantes son triangulares.

Ejemplo 1.35. *Resuelve los sistemas siguientes*

$$(a)\ \left\{\begin{array}{rr} x_1 - 3x_3 = & -2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 = & -1 \\ 4x_1 + 6x_2 - 11x_3 = & -1 \end{array}\right. \qquad (b)\ \left\{\begin{array}{rr} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = & 2 \\ -4x_1 - 12x_2 + 11x_3 = & -5 \\ 3x_1 + 14x_2 - 16x_3 = & 1 \end{array}\right.$$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -3 \\ 2 & 3 & -6 \\ 4 & 6 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow[P_{21}(-2)]{P_{31}(-4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{32}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U \text{ y } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Planteamos $Ly = b \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rrl} y_1 = & -2 & \\ 2y_1 + y_2 = & -1 & \Rightarrow y_2 = 3 \\ 4y_1 + 2y_2 + y_3 = & -1 & \Rightarrow y_3 = 1 \end{array}\right.$

Planteamos $Ux = y \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rrl} x_1 - 3x_3 = & -2 & \Rightarrow x_1 = 1 \\ 3x_2 = & 3 & \Rightarrow x_2 = 1 \\ x_3 = & 1 & \end{array}\right.$

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & -2 \\ -4 & -12 & 11 \\ 3 & 14 & -16 \end{pmatrix} \xrightarrow[P_{21}(4)]{P_{31}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ (-4) & 0 & 3 \\ (3) & 5 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ (3) & 5 & -10 \\ (-4) & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

entonces $U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Planteamos $Ly = Pb \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rrl} y_1 = & 2 & \\ 3y_1 + y_2 = & 1 & \Rightarrow y_2 = -5 \\ -4y_1 + y_3 = & -5 & \Rightarrow y_3 = 3 \end{array}\right.$

Planteamos $Ux = y \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rrl} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = & 2 & \Rightarrow x_1 = 1 \\ 5x_2 - 10x_3 = & -5 & \Rightarrow x_2 = 1 \\ 3x_3 = & 3 & \Rightarrow x_3 = 1 \end{array}\right.$

1.3. Determinantes

Una de las propiedades fundamentales de este concepto es que determina la unicidad de la solución de un sistema de ecuaciones lineales.

Definición 1.13. *Dada* $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$ *le asociaremos un único número llamado* determinante *y que denotaremos como* $|A|$ *o* $det(A)$.

Una definición rigurosa de $|A|$ es

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

donde S_n es el grupo de las permutaciones de $\{1, 2, \dots, n\}$ y $\varepsilon(\sigma)$, signatura de σ es 1 ó -1 según que la permutación σ sea par o impar.

En la expresión anterior los sumandos son todos los posibles productos de n factores que se pueden formar con los elementos de A de forma que en cada producto existe uno y sólo un factor de cada fila de A y uno y sólo un factor de cada columna de A. El signo de dichos sumandos es $+$ ó $-$ según que las permutaciones que indican los órdenes de las filas y de las columnas sean de la misma o distinta paridad.

Matrices de orden 2

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Matrices de orden 3

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Matrices de orden superior a tres Desarrollo por adjuntos de una fila de A.

Necesitamos previamente definir el concepto de *adjunto de un elemento.*

Definición 1.14. Dada $A \in M_n(\mathbb{K})$, se llama *adjunto del elemento a_{ij}* al determinante que resulta de suprimir la fila i y la columna j de A, multiplicado por $(-1)^{i+j}$. Se representa por A_{ij}.

Proposición 1.6. *Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$ entonces se cumple que*

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \quad \text{siendo } i \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ cualquiera.}$$

Observar que cuantos más ceros haya en una fila de A ,más sencilla será la operación anterior. Análogamente se podría desarrollar por columnas.

Ejemplo 1.36. *Calcula el valor del determinante de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 10 \\ -1 & -3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ 2 & 1 & 4 & 10 \\ -1 & -3 & 7 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 10 \\ -3 & 7 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 10 \\ -1 & 7 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 10 \\ -1 & -3 & 5 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & 7 \end{vmatrix}$$

lógicamente hemos elegido aquella fila con cuyos elementos es más sencillo operar. Se reduce ahora a calcular cuatro determinantes de orden tres, que se hará mediante la regla gráfica y se deja como ejercicio.

Parece lógico, que antes de desarrollar por el método anterior, se opere sobre la matriz para intentar que aparezcan el mayor número posible de ceros en alguna de las filas, sin que se altere el valor del determinante. Para ello es necesario conocer las siguientes

Propiedades de los determinantes

1. Si una fila de A es nula, entonces $|A| = 0$.
2. Si hay filas de A iguales o proporcionales, entonces $|A| = 0$.
3. Si una fila de A es combinación lineal de otras filas, entonces $|A| = 0$.
4. Si se permutan dos filas de A, entonces su determinante cambia de signo.
5. Si se multiplica una fila por un escalar, entonces el determinante de A queda multiplicado por dicho escalar.
6. Si a una fila se le suma otra fila multiplicada por un escalar el determinante no varía.
7. $|A| = |A^t|$
8. $|\lambda A| = \lambda^n |A|$
9. $|AB| = |A||B|$
10. $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$
11. Si A es triangular $\Rightarrow |A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

Las propiedades anteriores siguen siendo válidas si cambiamos la palabra fila por columna.

Cálculo de A^{-1} por determinantes

Dada $A \in M_n(\mathbb{K})$ se llama *matriz adjunta de A* a la matriz que resulta de sustituir cada uno de los elementos por sus respectivos adjuntos. La denotaremos A^d.

Proposición 1.7. Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$ inversible, entonces $A^{-1} = \dfrac{(A^d)^t}{|A|}$

Observación : Se deduce de la expresión anterior que para que exista A^{-1} tiene que verificarse que $|A| \neq 0$

Ejemplo 1.37. *Calcula, si existe, la inversa de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

Primero calculamos $|A| = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} \overset{\substack{P_{31}(-1) \\ P_{21}(-4)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -4 & -7 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow$ existe A^{-1}

$$\text{Ahora } A^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -8 & 22 & -13 \\ 2 & -7 & 4 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}^t =$$
$$\begin{pmatrix} 8/3 & -2/3 & 1 \\ -22/3 & 7/3 & -2 \\ 13/3 & -4/3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.38. *Calcula, si existe, la inversa de las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicación de determinantes a la resolución de sistemas lineales

1.- Regla de Cramer

Si el sistema lineal $AX = b$ es compatible determinado entonces

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & .. & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & .. & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & .. & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & .. & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & .. & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \qquad i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Ejemplo 1.39. *Discute y resuelve en su caso, el sistema* $\left\{ \begin{array}{rcl} ax + y + z & = & 1 \\ x + ay + z & = & a \\ x + y + az & = & a^2 \end{array} \right.$

Resolución: Es un sistema que depende del parámetro a , así que calculamos el rango de las matrices mediante determinantes. El mayor determinante posible es el de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \overset{\substack{P_{13}(1) \\ P_{12}(1)}}{=} \begin{vmatrix} a+2 & a+2 & a+2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a+2)(a-1)^2 = 0 \begin{array}{l} \nearrow \ a = 1 \\ \searrow \ a = -2 \end{array}$$

- **Si** $\mathbf{a \neq 1, a \neq -2} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow$ rango$(A) = 3 =$rango$(A|b) =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ SCD

- **Si** $\mathbf{a = 1} \Rightarrow (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$ rango(A) =rango$(A|b) = 1 \Rightarrow$ SCI

• **Si a = −2** $\Rightarrow (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \overset{P_{12}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \overset{\substack{P_{21}(2) \\ P_{31(-1)}}}{\sim}$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{array}\right) \overset{P_{32(1)}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow \text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A|b) = 3 \Rightarrow \text{SI}$

Solución del sistema en caso de compatibilidad

• **Si a ≠ 1, a ≠ −2** es compatible determinado, lo resolvemos por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1-a \\ a^2 & 1-a^2 & a-a^2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1-a \\ 1-a^2 & a-a^2 \end{vmatrix}}{|A|} = -\frac{(a^2-1)(a-1)}{(a+2)(a-1)^2} =$$

$$= -\frac{a+1}{a+2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a-1 & 1-a & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{(a-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{(a-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & a^2+1 & a \end{vmatrix}}{|A|} =$$

$$= \frac{(a-1)^2}{(a+2)(a-1)^2} = \frac{1}{a+2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a-1 & 1 & 1 \\ 1-a & a & a \\ 0 & 1 & a^2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{(a-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & a & a \\ 0 & 1 & a^2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{(a-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & a+1 \\ 0 & 1 & a^2 \end{vmatrix}}{|A|} =$$

$$= \frac{(a-1)(a+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a^2 \end{vmatrix}}{|A|} \frac{(a-1)^2(a+1)^2}{(a+2)(a-1)^2} = \frac{(a+1)^2}{a+2}$$

• **Si a = 1** , vimos anteriormente que el sistema inicial es equivalente a $x+y+z=1 \Rightarrow z = 1-x-y$, así el conjunto de soluciones es $\mathbb{S} = \{(x, y, 1-x-y)/x, y \in \mathbb{R}\}$.

Ejemplo 1.40. *Discute y resuelve en su caso, el sistema* $\left\{\begin{array}{rcl} x+ay+z & = & 2 \\ x+y+z & = & b \\ 2x+3y+z & = & 1 \end{array}\right.$

Utilizando los mismos conceptos del ejemplo anterior, es posible resolver el sistema anterior utilizando Sage, mediante la funcionalidad que ofrece de operar sobre variables simbólicas.

Código Sage 1.11: Declaración de matriz de coeficientes A y matriz ampliada AB

```
#Variables de entrada
var (a ,b);
A=matrix([[1,a,1],[1,-1,1],[2,-3,1]]);
B=A.augment(vector([2,b,1]));
```

Evaluar en SageMathCell

Calculamos el determinante de la matriz A, que es el de mayor rango posible.

Código Sage 1.12: Cálculo del determinante de A

```
det_A=A.determinant();print(det_A);
# Nos devuelve la ecuacion a+1
solve(det_A,a); # Resuelve la ecuacion a+1=0
```

Si $a \neq -1$, el rango de A es máximo y el sistema compatible determinado, con solución

$$x = -\frac{(b-1)(a+3)(b-5)}{a+1}, y = \frac{-b-2}{a+1}, z = \frac{(2b-1)(a+3)(b-3)}{a+1}$$

Código Sage 1.13: Solución del sistema compatible determinado

```
show(B.rref())
```

Si $a = -1$ entonces se puede sustituir el valor de a en las matrices anteriores:

Código Sage 1.14: Caso $a - 1$

```
A1=A.subs(a=-1); B1=B.subs(a=-1);A1;B1
```

La función minors(3) nos permite ver todos los posibles determinantes del orden 3. Se puede comprobar B2 es una de estas submatrices.

Código Sage 1.15: Función minors()

```
#Mostrar todos los posibles determinantes de orden 3
show(B1.minors(3));
# Devuelve lista [0,b-2,b-2,-2b+4]
sol=solve(B1.minors(3),b);
# Valor de b que cumple todas las ecuaciones anteriores
B2=B1.matrix_from_columns([1,2,3]);B2.det();
```

Para que que el rango de B no sea máximo, es necesario que todos los minors sean 0, en este caso se cumple si b=2. Entonces el rango de B1 es 2 y el sistema es compatible indeterminado y se puede resolver por el método explicado en el primer tema.

Código Sage 1.16: Solución general del sistema

```
print(B1.subs(sol).rank()) ;
print(A1.solve_right(vector([2,2,1]))) ;#--->Solucion particular
print(A1.transpose().kernel()); #----->Solucion del sistema
   homogeneo
# La solucion general es  a(1,1/2 ,-1/2) +(5,3,0)= (a+2,-a,b+3,c
   ,-b-c) # cualesquiera a racional
```

Evaluar en SageMathCell

Por último si $b \neq 2$ y $a = -1$, el sistema es incompatible, dado que el rango de la matriz ampliada es 3 y el de la matriz de coeficientes es 2.

Determinante de Vandermonde

Definición 1.15. *Sean* $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ *. La* matriz de Vandermonde *se define como*

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

.

Calculemos el determinate de las matrices de Vandermonde hasta el orden tres:

$|V(a_1)| = 1$

$|V(a_1, a_2)| = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$

$|V(a_1, a_2, a_3)| = \begin{vmatrix} \boxed{1} & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix} \overset{\substack{P_{31}(-1) \\ P_{21}(-1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 \\ 0 & a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1^2 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 0 & 1 & a_2 + a_1 \\ 0 & 1 & a_3 + a_1 \end{vmatrix} =$
$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)$

Esta factorización de los determinantes anteriores se generaliza con la siguiente proposición

Proposición 1.8. $|V(a_1, a_2, \dots, a_n)| = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$

Observación 1: Como el determinante de una matriz coincide con el determinante de su matriz adjunta , la proposición anterior es cierta para matrices del tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Observación 2: Si los valores $a_i \neq a_j$ para $i \neq j$ entonces el determinante de Vandermonde $|V(a_1, a_2, \dots, a_n)| \neq 0$.

Ejemplo 1.41. *Calcula el determinante de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \\ 1 & e & e^2 & e^3 & e^4 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \\ 1 & e & e^2 & e^3 & e^4 \end{vmatrix} = (e-d)(e-c)(e-b)(e-a)(d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b-a)$$

Ejemplo 1.42. *Calcula el determinante de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 4 & 9 & 16 & \cdots & n^2 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & \cdots & n^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & 2^{n-1} & 3^{n-1} & 4^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & \cdots & n^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 & \cdots & n^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & 2^{n-1} & 3^{n-1} & 4^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix} = (n-1)!\,(n-2)!\,\dots\,3!\,2!\,1!$$

1.4. Ejercicios propuestos

1. Sea $\mathcal{S}$ un sistema de n ecuaciones lineales con m incógnitas. Sea $\mathcal{S}'$ un sistema formado por n' ecuaciones de $\mathcal{S}$, (n' < n). Razonar si son ciertas las afirmaciones siguientes:

   a) Si $\mathcal{S}$ es compatible determinado, $\mathcal{S}$' es compatible determinado.

   b) Si $\mathcal{S}$ es incompatible, $\mathcal{S}$' es también incompatible.

   c) Si $\mathcal{S}$' es compatible indeterminado, $\mathcal{S}$ también lo es.

   d) Si $\mathcal{S}'$ es incompatible, $\mathcal{S}$ es también incompatible.

   e) La suma de dos soluciones de $\mathcal{S}$ es también solución del sistema.

2. Sean los sistemas $AX = b$, $AY = 0$, con $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ ambos compatibles. Demostrar que $AY = 0$ tiene solución única $Y = 0$ sí y sólo si $AX = b$ es un sistema compatible determinado.

3. En una curso hay 70 alumnos matriculados. En el último examen de Álgebra y Geometría han aprobado 39 alumnos, el 70 % de las chicas y el 50 % de los chicos. ¿Cuántos chicos y cuántas chicas hay en el curso?

4. Encontrar en cada caso la reacción química equilibrada:

   a)
   $$CH_4 + O_2 \Longrightarrow CO_2 + H_2O$$
   Esta es la quema de metano CH_4.

   b)
   $$NH_3 + CuO \Longrightarrow N_2 + Cu + H_2O$$
   Aquí NH_3 es amoníaco, CuO es óxido de cobre, Cu es cobre y N_2 es nitrógeno.

   c)
   $$CO_2 + H_2O \Longrightarrow C_6H_{12}O_6 + O_2$$
   Esto se llama reacción de fotosíntesis $C_6H_{12}O_6$ es glucosa.

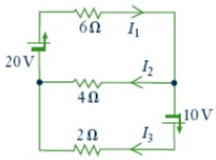
5. Discutir y resolver, en su caso, los siguientes sistemas sobre el cuerpo indicado.

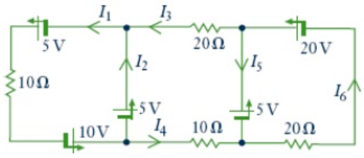
$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{lcl} x+y+z+t &=& 0 \\ x-y-z+t &=& 0 \\ -x-y+z+t &=& 0 \\ x-3y+5z+9t &=& 0 \end{array} \right. \text{ en } \mathbb{Q} \qquad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{lcl} x-y+z &=& 3 \\ 5x+2y-z &=& 5 \\ -3x-4y+3z &=& 1 \end{array} \right. \text{ en } \mathbb{Z}_5$$

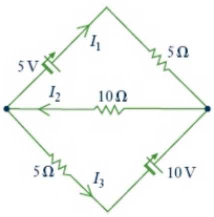
$$\text{(c)} \left\{ \begin{array}{lcr} x_1+x_2-x_3-2x_4 &=& 1 \\ 2x_1+7x_2+3x_3-19x_4+5x_5 &=& -8 \\ x_1+3x_2+x_3-8x_4+2x_5 &=& -3 \\ x_1-2x_2-4x_3+7x_4-3x_5 &=& 7 \end{array} \right. \qquad \text{(d)} \left\{ \begin{array}{lcl} (1+i)x+2z &=& 2 \\ -y-2iz &=& 2 \\ x+(1-2i)z &=& i \end{array} \right.$$

$$\text{(e)} \left\{ \begin{array}{lcr} x_1+x_2-x_3-2x_4 &=& 1 \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4+x_5 &=& 0 \\ 2x_1+3x_2+2x_3-3x_4+x_5 &=& 1 \\ x_2+4x_3+x_4+x_5 &=& -1 \end{array} \right.$$

6. Encontrar la corriente en los 3 circuitos siguientes:







7. Dada $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{6x6}$ el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ ¿tiene solución única $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^6$?

8. Estudiar y resolver el sistema $\left\{ \begin{array}{lcl} x_k + x_{k+1} & = & 0 \\ x_n + x_1 & = & 0 \end{array} \right.$ para $k = 1, 2, 3, 4$

9. Expresar en formar matricial y resolver el sistema de ecuaciones en el cuerpo que se indica. Verificar las soluciones halladas.

   a) En $\mathbb{Z}_2$.

   b) En $\mathbb{Z}_3$.

   c) En $\mathbb{R}$.

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & & & + & z & = & 1, \\ & & y & + & z & = & 0, \\ x & + & y & + & z & = & 0, \end{array} \right.$$

10. En los distintos casos que se presentan a continuación, y sabiendo que se trabaja en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^6$, sustituir los $\cdots$ por los valores que permiten obtener las igualdades señaladas.

    a) $(-1, 4, 2, 0, 0, 1) + 3(1, 0, 0, -2, -1, 1) + (-1)(0, 0, 0, 1, 0, 0) =$
    $(\cdots, \cdots, \cdots, \cdots, \cdots, \cdots)$

    b) $\cdots(-1, 4, 2, 0, 0, 0) + 3(1, 0, 0, \cdots, 4, 4) = (0, \cdots, \cdots, 15, \cdots, \cdots)$

    c) $0(\cdots, \cdots, \cdots, \cdots, \cdots, \cdots) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

    d) $(x, y, z, t, r, s) + (\cdots, \cdots, \cdots, \cdots, \cdots, \cdots) = (x, y, z, t, r, s)$

11. En los distintos casos que se presentan a continuación, y sabiendo que se trabaja en el $\mathbb{Z}_5$-espacio vectorial $\mathbb{Z}_5^6$, sustituir los $\cdots$ por los valores que permiten obtener las igualdades señaladas.

a) $(-1,4,2,0,0,1)+3(1,0,0,-2,-1,1)+(-1)(0,0,0,1,0,0)=$
$(\cdots,\cdots,\cdots,\cdots,\cdots,\cdots)$

b) $\cdots(-1,4,2,0,0,0)+3(1,0,0,\cdots,4,4)=(0,\cdots,\cdots,15,\cdots,\cdots)$

c) $0(\cdots,\cdots,\cdots,\cdots,\cdots,\cdots)=(0,0,0,0,0,0)$.

d) $(x,y,z,t,r,s)+(\cdots,\cdots,\cdots,\cdots,\cdots,\cdots)=(x,y,z,t,r,s)$

12. Se consideran los siguientes vectores del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$:

$$v_1=(1,1,-1,0), v_2=(1,2,0,1), v_3=(1,0,1,2)$$

$$w_1=(3,1,1,4), w_2=(2,3,-4,-2), w_3=(0,-1,-1,-1)$$

a) Escribir tres combinaciones lineales distintas de los vectores w_1, w_2, w_3 (que denotaremos por u_1, u_2 y u_3).

b) Expresar w_1, w_2 y w_3 como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3.

c) Expresar los vectores u_1, u_2 y u_3 dados en el primer apartado como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3.

d) ¿Es verdadera o falsa la siguiente afirmación?: "Si $v=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ es combinación lineal de w_1, w_2 y w_3, entonces v es combinación lineal de v_1, v_2 y v_3.

13. Un procedimiento para proteger información al transmitirla es agregar cierta *redundancia*. A continuación mostramos una manera de hacer esto. Supongamos que tenemos que transmitir una secuencia (x_1,x_2,x_3,x_4) formada por ceros y unos. La codificamos entonces como una secuencia de siete números, definidos por las fórmulas

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_2+x_3+x_4,\\
y_2 &= x_1+x_2+x_3,\\
y_3 &= x_1+x_3+x_4,\\
y_4 &= x_1+x_3,\\
y_5 &= x_1+x_2+x_3+x_4,\\
y_6 &= x_2+x_3,\\
y_7 &= x_3+x_4.
\end{aligned}$$

La aritmética que se emplea es la de $\mathbb{Z}_2$.

a) Expresar en forma matricial estas reglas de codificación.

b) Hallar todas las 7-uplas de ceros y unos que pueden obtenerse por este procedimiento.

c) Si la lista codificada es $(1,1,0,0,1,1,0)$, ¿cuál es la lista que se codificó?

14. Un productor de té comercializa cinco mezclas (M1, ..., M5) de tres tipos diferentes de té (T1, T2, T3). La composición de 50 grs. de cada mezcla está dada por la siguiente tabla.

$$\begin{array}{c} \\ M1\\ M2\\ M3\\ M4\\ M5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} T1 & T2 & T3 \end{array}\\ \begin{pmatrix} 10 & 20 & 20\\ 15 & 10 & 25\\ 12 & 16 & 22\\ 5 & 30 & 15\\ 20 & 12 & 18 \end{pmatrix}\end{array}$$

¿Cuáles de las mezclas M3,M4 y M5 pueden ser obtenidas de las mezclas M1 y M2?

15. En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se considera el conjunto

$$U = \{\alpha(1,1,1,1) + \beta(1,1,-1,-1) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Completa cada una de las frases siguientes.

a) U es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores ....

b) U es un subespacio porque si $u_1, u_2 \in U$, entonces ....

c) U es el subespacio generado por ....

d) El vector $u = (1,1,0,0)$ pertenece a U porque ....

e) El vector $u = (1,1,-1,0)$ no pertenece a U porque ....

Responde a cada una de las cuestiones siguientes:

a) Si S es un subespacio de $\mathbb{R}^4$ tal que $(1,1,1,1) \in S$ y $(1,1,-1,-1) \in S$, ¿es cierto que $U \subset S$?

b) Si $W = \{\gamma(1,1,1,1) + \delta(2,2,2,2) : \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}$, ¿es cierto que $W \subset U$?

c) Si $T = \{\gamma(1,1,0,0) + \delta(0,0,1,1) + \epsilon(-1,-1,3,3) : \gamma, \delta, \epsilon \in \mathbb{R}\}$, ¿es cierto que $T = U$?

16. Estudiar y resolver el sistema $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x_1}{a_1} = \dfrac{x_2}{a_2} = \cdots = \dfrac{x_5}{a_5} \qquad a_i \neq 0 \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_5 = s \end{array} \right.$

17. En el $\mathbb{Z}_2$-espacio vectorial $\mathbb{Z}_2^4$ define un subespacio U generado por tres vectores, tal que $W = \{\gamma(1,1,1,1) + \delta(1,1,0,0) : \gamma, \delta \in \mathbb{Z}_2\}$ sea un subespacio de U.

18. Resolver en $\mathbb{R}$ el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 + x_6 & = & 1 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_6 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 5x_5 + 3x_6 & = & 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 + 3x_6 & = & 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 9x_5 + 3x_6 & = & -1 \end{array} \right.$$

19. Se considera el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$. Determina en cada caso los valores de x y de y, si es posible, para que:

a) $(3,2,x,y) \in \big\langle\{(1,4,-5,2),(1,2,3,1)\}\big\rangle$.

b) $(x, x+1, y, y+1) \in \big\langle\{(1,3,0,2)\}\big\rangle$.

c) $(x, x-1, y, y+1) \in \big\langle\{(1,3,0,2)\}\big\rangle$.

20. Se considera el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $V = \mathbb{R}^4$. ¿Cuáles de los siguientes subespacios de V tienen dimensión 2?

a) $T_1 = \big\langle\{(1,1,1,0),(-1,2,3,-1)\}\big\rangle$

b) $T_2 = \big\langle\{(1,1,0,1),(-1,2,3,0),(0,-3,-3,-1)\}\big\rangle$

c) $T_3 = \{(x,y,z,t) \in V \ : \ 2x - y = 0,\ z + 2t = 0\}$

d) $T_4 = \{(x,y,z,t) \in V \ : \ 2x - y + z + 2t = 0\}$

21. Discutir, y resolver, los siguientes sistemas según los valores de a y b.

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+y+z+t & = & 1 \\ -ax+y+z+t & = & 2 \\ x-ay+z+t & = & 3 \\ x+y+z-at & = & 5 \\ x+y-az+t & = & 4 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcc} x+2y+z & = & 1 \\ 2x+y+3z & = & -4 \\ x-y+(a+2)z & = & -3a-5 \\ 4x+2y+(a+6)z & = & -3a^2-8 \end{array}\right.$$

22. Sea $A \in M_{3\times4}(\mathbb{R})$, donde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Encontrar bases de los subespacios vectoriales generados por las filas S y las columnas T de la matriz A:

$$S = \langle (-1,\, 0,\, 0,\, 1)\,, (1,\, -2,\, 0,\, 0)\,, (-1,\, 1,\, 1,\, 2) \rangle$$

$$T = \langle (-1,\, 1,\, -1)\,, (0,\, -2,\, 1)\,, (0,\, 0,\, 1)\,, (1,\, 0,\, 2) \rangle$$

23. Resuelve los sistemas siguientes y comprueba que están mal condicionados

(a) $\left\{\begin{array}{lcl} x+2y & = & 10 \\ 1{,}1\,x+2y & = & 10,4 \end{array}\right.$ (b) $\left\{\begin{array}{lcl} x+2y & = & 10 \\ 1{,}05\,x+2y & = & 10,4 \end{array}\right.$

Solución: (a) $x = 4$; $y = 3$

Solución: (b) $x = 8$; $y = 1$

24. Resuelve los sistemas siguientes y comprueba que están mal condicionados

(a) $\left\{\begin{array}{lcl} 2x+4y+5z & = & 220 \\ 6x+9y+8z & = & 490 \\ 4,1\,x+5y+3z & = & 274 \end{array}\right.$ (b) $\left\{\begin{array}{lcl} 2x+4y+5z & = & 220 \\ 6x+9y+8z & = & 490 \\ 4,2\,x+5y+3z & = & 274 \end{array}\right.$

Solución: (a) $x = 40$; $y = 10$; $z = 20$

Solución: (b) $x = 20$; $y = 31{,}53$; $z = 10{,}76$

25. Resuelve el sistema matricial $\left\{\begin{array}{lc} X+AY = & 0 \\ X^t+Y^tB = & I \end{array}\right.$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

26. Halla las matrices A y B que verifiquen: $\left\{\begin{array}{l} A+B=C \\ A+A^t=0 \\ B-B^t=0 \end{array}\right.$ siendo $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

27. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ halla X tal que $(2A+I)B = B+AXA$

28. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_5)$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_5)$, calcular $A^2 - B^2$.

29. Calcula la inversa, si existe , de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & .. & 0 \\ a & 1 & 0 & .. & 0 \\ a^2 & a & 1 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a^n & a^{n-1} & a^{n-2} & .. & 1 \end{pmatrix}$$

30. Razona si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas.

    a) Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ es antisimétrica, entonces A^2 es simétrica.

    b) Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$ tal que $A^3 - 3A + I_n = 0$ entonces A es inversible.

    c) Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$, entonces la matriz $(A + A^t)(A + A^t)^t$ es simétrica.

    d) Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ es nilpotente entonces A es regular.

    e) Si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ entonces $(BA - I)^{-1} = (B(AB - I)^{-1}A) - I$

    f) Sean $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Si $AB = A$ y $BA = B$ entonces A y B son nilpotentes.

    g) Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ es simétrica entonces A es inversible.

31. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = A + I_4$. Calcula A^n, B^2 y B^{-1} .

32. Calcula la potencia n-ésima de las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix}$

33. Dadas las siguientes matrices: a) Halla una matriz escalonada equivalente a cada una de ellas. b) Halla una matriz reducida por filas equivalente a cada una de ellas.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & -1 & 8 \\ 3 & 8 & 7 & 0 & 11 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 5 & 3 & 0 & 4 & -5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & -2 & 8 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 6 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

34. Halla la descomposición LU de las siguientes matrices:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 & 1 \\ 4 & 13 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & -3 & 3 \\ -6 & -18 & -1 & 1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -4 & -12 & 11 \\ 3 & 14 & -16 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & -6 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 6 & 5 & 5 \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

35. ¿Qué propiedades de una matriz real cuadrada, invertible, se conservan en su inversa? Justifique su respuesta.

    a) Si A es triangular superior o inferior su inversa también lo es.

    b) Si A es simétrica también lo es su inversa.

    c) Si las entradas de A son números enteros también lo son las de su inversa.

    d) Si las entradas de A son números racionales también lo son las de su inversa.

36. Resuelve estos sistemas aplicando la factorización LU a la matriz de coeficientes A .

$$(a)\ \left\{\begin{array}{rr} x_1+2x_2+x_3+3x_4= & 0\\ x_1+x_2+x_3+4x_4= & -2\\ 2x_1+x_2+4x_3+10x_4= & -7\\ -x_1-3x_2+7x_3+5x_4= & -9\end{array}\right. \qquad (b)\ \left\{\begin{array}{rr} x_1+2x_2-2x_3+x_4= & 2\\ 4x_1+5x_2-7x_3+6x_4= & 8\\ 5x_1+25x_2-15x_3-3x_4= & 12\\ 6x_1-12x_2-6x_3+22x_4= & 10\end{array}\right.$$

$$(c)\ \left\{\begin{array}{rr} -3x_2+x_3+2x_4+2x_5= & 2\\ 2x_5= & 2\\ x_1+2x_2-2x_3+x_4+x_5= & 3\\ 4x_1+2x_2-8x_3+8x_4+9x_5= & 15\\ 5x_1+x_2-5x_3+13x_4+11x_5= & 25\end{array}\right. \qquad (d)\ \left\{\begin{array}{rr} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5= & 1\\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5= & 2\\ -2x_1+x_2-3x_3+x_4= & -1\\ x_1-x_2+x_3-x_4+x_5= & -1\\ x_3+x_4-x_5= & 3\end{array}\right.$$

37. Consideremos los sistemas

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 2\\ 10{,}05\,x+10y & = & 21\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 2\\ 10{,}01\,x+10y & = & 21\end{array}\right.$$

    Se pide calcular el número condición de las matrices de los sistemas y decidir si están bién o mal condicionados.

38. Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$ calcula $|A|$ en los siguientes casos:

    a) $a_{ij} = \text{máx}(i,j)$ b) $a_{ij} = |i-j|$ c) $a_{ij} = a_{i-1\,j} + a_{i\,j-1}$ siendo $a_{1j} = a_{i1} = 2$.

39. Razona si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas.

    a) $|A+B| = |A| + |B|$

    b) Si $A^2 = A \Rightarrow |A| = \pm 1$

    c) Si $A = \lambda B \Rightarrow |A| = \lambda |B|$

    d) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2\\ ab & a^2 & b^2 & ab\\ ab & b^2 & a^2 & ab\\ b^2 & ab & ab & a^2\end{vmatrix} = (a+b)^4(a-b)^4$

40. Determina los posibles valores de los determinantes de las matrices idempotentes, nilpotentes, involutivas y ortogonales. ¿Son inversibles?.

41. Calcula el valor de los siguientes determinantes:

$$A = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1+x & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+x & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1+x & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1+x\end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n\\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \dots & a_n\\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \dots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x+a_n\end{vmatrix}$$

$$C=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a \\ a & a & a & \dots & a & a & a \end{vmatrix} \qquad D=\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n & n \\ n & 2 & n & \dots & n & n \\ n & n & 3 & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n-1 & n \\ n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix}$$

42. Estudiar el rango de las siguientes matrices e indica cuando son regulares

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & a & a \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 2a & b & 1 \\ 2 & ab & 1 \\ 2 & b & a \end{pmatrix} D=\begin{pmatrix} 2a+2 & a & 2 \\ 2 & 2-a & 0 \\ a+1 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & \cdots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a \end{pmatrix} \qquad F=\begin{pmatrix} 1-a & a & 2a & 2a \\ a-1 & 2-2a & -2a & -2a \\ 1-a & a & 2+a & 1+2a \\ a-1 & -a & -2a & 2-3a \end{pmatrix}$$

43. Discutir, y resolver, los siguientes sistemas según los valores de a y b.

$$\left\{\begin{array}{lcr} 4x+(b+2)y+b^2z & = & b^2-2b+1 \\ by-abz & = & 1 \\ 2x+y+(a+b)z & = & 0 \\ 2x+y+(a+b)z & = & -a \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcr} (3-2a)x+(2-a)y+z & = & a \\ (a-1)x & = & 1-a \\ x+(2-a)y & = & 1 \\ (a-1)x+z & = & b \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcr} 3ax+3(b-1)y+(b-6)z & = & 2b-1 \\ (b-2)y+z & = & 0 \\ 2ax+2(b-1)y+(b+4)z & = & 2b-2 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcr} (1-a)x+ay+2az+2at & = & 0 \\ (a-1)x+2(1-a)y-2az-2at & = & 0 \\ (1-a)x+ay+(2+a)z+(1+2a)t & = & 0 \\ (a-1)x-ay-2az+(2-3a)t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcr} x+y+z & = & 0 \\ ax+by+cz & = & 0 \\ bcx+acy+abz & = & 1 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcr} (a+2)x+y+z & = & a-1 \\ ax+(a-1)y+z & = & a-1 \\ (a+1)x+(a+1)z & = & a-1 \end{array}\right.$$

44. Razona si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas.

a) Dada $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{nxn}$ el sistema $A\vec{x}=\vec{b}$ tiene solución única $\forall\, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$

b) La suma de dos soluciones de un sistema lineal es también solución del sistema.

c) El sistema $\left\{\begin{array}{lcl} by+cz+dt & = & x \\ ax+cz+dt & = & y \\ ax+by+dt & = & z \\ ax+by+cz & = & t \end{array}\right.$ es S.C.D $\Leftrightarrow \dfrac{a}{a+1}+\dfrac{b}{b+1}+\dfrac{c}{c+1}+\dfrac{d}{d+1}=1$

d) Sea $A \in M_3(\mathbb{R})$ definida por $a_{ij}=i-j$, entonces el $|A|$ vale

a) 1 b) 2 c) 3 d) ninguna de ellas

45. La matriz *Peña del Fraile* de n filas por m columnas $F_{n\times m}$ se define por

$$a_{ij} = (i-1)(j-1)+1$$

 a) Construye las matrices $F_{1\times 1},\ F_{2\times 2},\ F_{3\times 3},\ F_{4\times 4}$

 b) Calcula el determinante de la matriz cuadrada $F_{n\times n}$ cualquiera que sea n.

46. Calcular los siguientes determinantes en $\mathbb{C}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & i & 1+4i & 1+6i \\ 3+i & 1 & 2i & 5i \\ 3+2i & 2i & 0 & -2+5i \\ i & -i & 2+3i & 1+2i \end{vmatrix}.$$

47. Sean A una matriz $n \times n$, B una matriz $n \times m$ y C una matriz $m \times m$. Con O indicaremos una matriz de cualquier dimensión cuyas entradas son todas nulas, en tanto que I_n e I_m son matrices identidad.

 a) Probar que $\det \begin{pmatrix} I_n & O \\ O & C \end{pmatrix} = \det(C)$

 b) Probar que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ O & I_m \end{pmatrix} = \det(A)$

 c) Probar que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} = \det(A)\det(C)$

48. Calcular los siguientes determinantes en $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_2$ y $\mathbb{Z}_3$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

49. Consideremos matrices A y B de dimensión 4×5. Y matrices C, D y E de dimensiones 5×2, 4×2 y 5×4 respectivamente. Todas las matrices tienen sus entradas en el mismo conjunto numérico. Determine cuáles de las siguientes operaciones están definidas:

$$BA, \quad AC+D, \quad AE+B, \quad AB+B, \quad E(A+B), \quad EAC.$$

 En caso de estarlo, indique las dimensiones de la matriz resultante.

50. Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

 Realizar las siguientes operaciones: AB, BC, $(AB)C$ y $A(BC)$.

51. Para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

 calcular AB y BA.

52. Dadas las matrices reales

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

calcular AB y AC.

53. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

con entradas en $\mathbb{Z}_2$, calcular AB y BA.

54. ¿Es conmutativo el producto de matrices? Justifique la respuesta.

55. ¿Si $A \neq 0$; $AB = AC \;\Rightarrow\; B = C$? Justifique la respuesta.

56. Sin desarrollar, probar que

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

es múltiplo de 31. Sugerencia: observar que

$$\begin{aligned} 1798 &= 1 \times 1000 + 7 \times 100 + 9 \times 10 + 8 = 31 \times 58, \\ 2139 &= 2 \times 1000 + 1 \times 100 + 3 \times 10 + 9 = 31 \times 69, \\ 3255 &= 3 \times 1000 + 2 \times 100 + 5 \times 10 + 5 = 31 \times 105, \\ 4867 &= 4 \times 1000 + 8 \times 100 + 6 \times 10 + 7 = 31 \times 157. \end{aligned}$$

Parte de este material está tomado o adaptado de las siguientes referencias:

- L. González Vega y C. Valero. Apuntes de Álgebra Lineal y Geometría. U. Cantabria, 2003.
- W. Stein. Linear Algebra, 2013.
- Rafael Laguardia. Geometría y Álgebra. Instituto de Matemática y Estadística, Montevideo 2005.
- R. Beezer. A first Course in Linear Algebra, 2015.