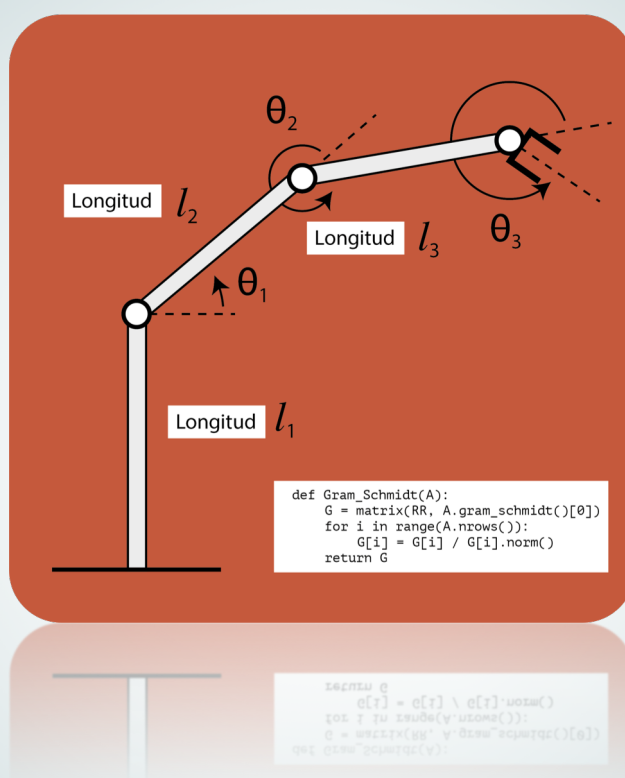


Álgebra y Geometría

Tema 4. Teoría del Endomorfismo

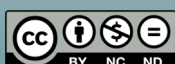


Jaime Gutiérrez Gutiérrez
Ángel Barón Caldera
Ana Isabel Gómez Pérez

Departamento de Matemática Aplicada y Ciencias
de la Computación

Este tema se publica bajo Licencia:

[Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)



Tema 4 Teoría del endomorfismo

El concepto de autovalor y autovector de una matriz cuadrada es una de las herramientas más potentes que el Álgebra Lineal proporciona para la resolución de gran cantidad de problemas que aparecen en Ciencia y Tecnología.

A lo largo de esta sección f representará un endomorfismo de un espacio vectorial V de dimensión n cuya matriz asociada en una base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ es A .

El objetivo es encontrar, cuando sea posible, otra base de V en la cual la matriz asociada a f sea lo más sencilla posible.

4.1. Valores y vectores propios

Definición 4.1 Un vector $v \in V$ se dice vector propio o autovector de $f \in \text{End}(V)$ si existe un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que

$$f(v) = \lambda v \quad \text{para } \lambda \in \mathbb{K}$$

Es decir que la imagen del vector es proporcional a él.

Al escalar λ se le llama *valor propio* o *autovalor* asociado a v .

$V(\lambda)$ denota al conjunto de vectores asociados al valor propio λ .

Proposición 4.1 El conjunto $V(\lambda) = \{v \in V / f(v) = \lambda v\}$ es un subespacio vectorial de V , llamado subespacio de vectores propios asociados al valor propio λ .

Ejemplo 4.1 Dado el endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y, z) \rightsquigarrow f(x, y, z) = (3x + 2y, -x, z)$

1. Determina cuál de estos vectores de \mathbb{R}^3 son vectores propios de f , indicando el valor propio asociado: $v_1(1, 2, 3)$; $v_2(1, -1, 2)$; $v_3(-2, 1, 0)$.

Resolución:

- $f(v_1) = f(1, 2, 3) = (7, -1, 3)$ no proporcional a v_1 , luego v_1 no es autovector de f .
- $f(v_2) = f(1, -1, 2) = (1, -1, 2) = v_2$, luego v_2 es autovector de f de valor propio asociado $\lambda = 1$.
- $f(v_3) = f(-2, 1, 0) = (-4, 2, 0) = 2v_3$, luego v_3 es autovector de f de valor propio asociado $\lambda = 2$.

2. Halla la matriz A asociada a f en la base canónica, calcula el determinante de $xI_3 - A$ y sustituye en él los valores propios obtenidos antes.

Resolución: Las columnas de A son las imágenes de los vectores de la base canónica, es decir $f(1, 0, 0)$, $f(0, 1, 0)$, $f(0, 0, 1)$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |xI - A| = \begin{vmatrix} x-3 & -2 & 0 \\ 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^2(x-2).$$

Los valores propios anulan a este polinomio. Veremos más adelante que esto no es casualidad y que los valores propios de un endomorfismo coinciden con las raíces del polinomio $|xI_n - A|$ que llamamos *polinomio característico*.

Observación 4.1 $V(\lambda) = \text{Ker}(f - \lambda I_V)$ siendo I_V el endomorfismo identidad de V .

Propiedades 4.1 Para cualquier espacio vectorial V , se tienen las siguientes propiedades:

- El 0_V es vector propio de cualquier endomorfismo, asociado a cualquier valor propio.
- Un vector propio $v \in V \setminus \{0_V\}$ tiene un único valor propio asociado.
- Si $\dim V = n$, $f \in \text{End}(V)$ tiene a lo sumo n valores propios.
- El subespacio $V(\lambda)$ es invariante por f y $\dim V(\lambda) \geq 1$.
- Si $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow V(\lambda_1) \cap V(\lambda_2) = 0_V$.
- Sea $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ una familia de vectores tal que $v_i \in V(\lambda_i)$, siendo $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ distintos, entonces $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ es libre.

Observación 4.2 Si A es matriz asociada a f se identifican los vectores y valores propios de A y los de f .

Propiedades 4.2 Para cualquier A matriz asociada a f :

- Los valores propios de A y de A^t coinciden.
- Los valores propios de una matriz triangular o diagonal son precisamente los elementos de la diagonal principal.
- Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ son los valores propios de A entonces $\lambda\lambda_1, \lambda\lambda_2, \dots, \lambda\lambda_k$ son los valores propios de λA .
- Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ son los valores propios de A entonces $\lambda_1^p, \lambda_2^p, \dots, \lambda_k^p$ son los valores propios de A^p .
- Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ son los valores propios de A , inversible, entonces $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_k}$ son los valores propios de A^{-1} .

Si v es un vector propio de f , de valor propio asociado λ , se cumple

$$f(v) = \lambda v \Leftrightarrow V(\lambda) = \text{Ker}(f - \lambda I_V) \neq 0 \Leftrightarrow \text{rango}(f - \lambda I_V) < n$$

Matricialmente, si A es matriz de f entonces $\text{rango}(A - \lambda I_n) < n \Leftrightarrow |A - \lambda I_n| = 0$.

Definición 4.2 Se llama polinomio característico de f al determinante $|xI_n - A|$. Se le suele denotar por $p_A(x)$ o $p_f(x)$.

Notar que los valores propios de un endomorfismo son precisamente las raíces del polinomio característico. Evidentemente $|A - xI_n| = 0 \Leftrightarrow |xI_n - A| = 0$ que se le llama ecuación característica de f .

Cálculo de valores y vectores propios de f En la práctica seguiremos dos pasos para el cálculo de valores y vectores propios de un endomorfismo.

Paso 1 Valores propios

Calculamos las raíces del polinomio característico, resolviendo $|A - xI_n| = 0$

Paso 2 Vectores propios

Para cada valor propio λ obtenido, calculamos el subespacio asociado $V(\lambda)$, resolviendo el sistema $(A - \lambda I_n)v = 0$.

Ejemplo 4.2 *Calcula los valores y vectores propios del endomorfismo:*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightsquigarrow f(x, y) = (y, -2x + 3y) \end{aligned}$$

La matriz asociada a f respecto de la base canónica es $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Paso 1 Valores propios Calculamos las raíces del polinomio característico $|xI_n - A|$

$$|A - xI_2| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -2 & 3-x \end{vmatrix} = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow \lambda = 1, \lambda = 2$$

son los valores propios.

Paso 2 Vectores propios Para cada valor propio λ , calculamos resolvemos $(A - \lambda I_n)v = 0$

$$\bullet V(1) = \{v \in \mathbb{R}^2 / (A - I_2)v = 0\} = \left\{ (x, y) / \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{(x, y) / -x + y = 0\} = \{(x, x) / x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1) \rangle.$$

$$\bullet V(2) = \{v \in \mathbb{R}^2 / (A - 2I_2)v = 0\} = \left\{ (x, y) / \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{(x, y) / -2x + y = 0\} = \{(x, 2x) / x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 2) \rangle.$$

Observar que los vectores propios forman base de \mathbb{R}^2

Ejemplo 4.3 *Calcula los valores y vectores propios del endomorfismo:*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\rightsquigarrow f(x, y, z) = (y + z, 2x - y + z, 2x - 2y - 2z) \end{aligned}$$

La matriz asociada a f respecto de la base canónica es $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

Paso 1 Valores propios Calculamos las raíces del polinomio característico $|xI_n - A|$

$$|A - xI_3| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 2 & -1-x & 1 \\ 2 & -2 & -2-x \end{vmatrix} = -(x-1)(x+2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1, \lambda = -2$$

(doble), son los valores propios.

Paso 2 **Vectores propios** Para cada valor propio λ , calculamos resolvemos $(A - \lambda I_n)v = 0$

$$\bullet V(1) = \{v \in \mathbb{R}^3 / (A - I_3)v = 0\} = \left\{ (x, y, z) / \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{(x, y, z) / -x + y + z = 0; z = 0\} = \{(x, x, 0) / x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, 0) \rangle.$$

$$\bullet V(-2) = \{v \in \mathbb{R}^3 / (A + 2I_3)v = 0\} = \left\{ (x, y, z) / \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{(x, y, z) / 2x + y + z = 0; 2x - 2y = 0\} = \{(x, x, -3x) / x \in \mathbb{R}\} = V(-2) = \langle (1, 1, -3) \rangle.$$

Observar que los vectores propios no forman base de \mathbb{R}^3

Ejemplo 4.4 *Calcula los valores y vectores propios del endomorfismo:*

$$f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z, t) \rightsquigarrow f(x, y, z, t) = (x + y + z + t, x + y - z - t, x - y + z - t, x - y - z + t)$$

La matriz asociada a f respecto de la base canónica es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Paso 1 **Valores propios** Calculamos las raíces del polinomio característico $|xI_n - A|$

$$|A - xI_4| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-x & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-x \end{vmatrix} = (x+2)(x-2)^3 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda = -2, \lambda = 2$ (triple), son los valores propios.

Paso 2 **Vectores propios** Para cada valor propio λ , calculamos resolvemos $(A - \lambda I_n)v = 0$

$$\bullet V(-2) = \{v \in \mathbb{R}^4 / (A + 2I_4)v = 0\} = \left\{ (x, y, z, t) / \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{(x, y, z, t) / x + 3y - z - t = 0; y - z = 0; z - t = 0\} = \{(-y, y, y, y) / y \in \mathbb{R}\} = \langle (-1, 1, 1, 1) \rangle.$$

$$\bullet V(2) = \{v \in \mathbb{R}^4 / (A - 2I_4)v = 0\} = \left\{ (x, y, z, t) / \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{(x, y, z, t) / x - y - z - t = 0\} = \{(x, y, z, x - y - z) / x, y, z \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1) \rangle.$$

Observar que los vectores propios no forman base de \mathbb{R}^4

Ejemplo 4.5 Comprueba, haciendo los cálculos correspondientes que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:
 $|A - xI_3| = -(x-1)(x-3)(x+4) \Rightarrow \lambda = -4, \lambda = 1, \lambda = 3$
 Vectores propios:
 $V(1) = \langle (1, 0, 3) \rangle$; $V(3) = \langle (3, 2, -1) \rangle$; $V(-4) = \langle (-3, 5, 1) \rangle$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Valores propios:
 $|B - xI_3| = -(x-2)^2(x+4) \Rightarrow \lambda = -4, \lambda = 2$
 Vectores propios:
 $V(-4) = \langle (1, 1, -2) \rangle$; $V(2) = \langle (1, -1, 0) \rangle$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Valores propios:
 $|C - xI_3| = -x(x+1)(x+2) \Rightarrow \lambda = 0, \lambda = -1, \lambda = -2$
 Vectores propios:
 $V(0) = \langle (2, 1, 0) \rangle$; $V(-1) = \langle (2, 0, 1) \rangle$; $V(-2) = \langle (4, -1, 2) \rangle$

Código Sage 4.1: Ejemplo 4.5 A

```
#Variables de entrada
A = matrix([[1,3,0],[3,-2,-1],[0,-1,1]]);
show(A.charpoly());
show(A.fcp());
show("values", A.eigenvalues());
show("Vector",A.eigenvectors_right());
A.right_kernel()
```

[Evaluar en SageMathCell](#)

Código Sage 4.2: Ejemplo 4.5 C

```
#Variables de entrada
C = matrix([[-2,4,2],[1,-2,-2],[-1,2,1]]);
show(C.charpoly());
show(C.fcp());
show("values", C.eigenvalues());
show("Vector",C.eigenvectors_right());
C.right_kernel()
```

[Evaluar en SageMathCell](#)

Nota 4.1 Todos los vectores pertenecientes al kernel de la aplicación f son autovectores de la aplicación f con respecto al autovalor $\lambda = 0$.

4.2. Diagonalización de un endomorfismo

Definición 4.3 Dos matrices A y B son semejantes si existe una matriz regular P tal que $B = PAP^{-1}$. Se denota $A \sim B$.

Proposición 4.2 Dos matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico, así

$$A \sim B \Rightarrow |xI_n - A| = |xI_n - B|$$

Definición 4.4 Un endomorfismo f es diagonalizable si su matriz asociada A es semejante a una matriz diagonal D .

Observación: Si $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base de V de vectores propios, entonces la matriz asociada a $f : \underset{\{v_1, v_2, \dots, v_n\}}{V} \rightarrow \underset{\{v_1, v_2, \dots, v_n\}}{V}$ respecto a esta base será:

Paso 1. Calculamos las imágenes de los vectores de la base del espacio inicial.

Paso 2. Escribimos estos vectores en combinación lineal de la base final (son la misma base):

$$\begin{cases} f(v_1) & \stackrel{\text{Paso 1}}{=} \lambda_1 v_1 & \stackrel{\text{Paso 2}}{=} \lambda_1 v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n \\ f(v_2) & \stackrel{\text{Paso 1}}{=} \lambda_2 v_2 & \stackrel{\text{Paso 2}}{=} 0v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + 0v_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f(v_n) & \stackrel{\text{Paso 1}}{=} \lambda_n v_n & \stackrel{\text{Paso 2}}{=} 0v_1 + 0v_2 + \dots + \lambda_n v_n \end{cases} \Rightarrow B_f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Teorema 4.1 1. $f \in \text{End}(V)$ es diagonalizable sí y sólo si existe una base de V de vectores propios de f .

2. $f \in \text{End}(V)$ es diagonalizable $\Leftrightarrow |xI_n - A|$ tiene n raíces en \mathbb{K} y la multiplicidad de cada valor propio $\lambda_i = \dim V(\lambda_i)$.

3. $f \in \text{End}(V)$ es diagonalizable $\Leftrightarrow \dim V(\lambda_1) + \dim V(\lambda_2) + \dots + \dim V(\lambda_k) = \dim V$

¿Qué es diagonalizar una matriz?

$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{A} & V \\ \mathfrak{B}_V & & \mathfrak{B}_V \\ P \uparrow & & \downarrow P^{-1} \\ V & \xrightarrow{D} & V \\ \mathfrak{B}_V & & \mathfrak{B}_V \end{array}$	<p>Sea $\mathfrak{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ la base canónica de V y sea $\overline{\mathfrak{B}} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de vectores propios de V. Teniendo en cuenta lo visto en el apartado de aplicaciones lineales se cumplirá que $D = P^{-1}AP$.</p> <p>Además observar que P es una matriz de cambio de bases, así las columnas de P son precisamente las coordenadas de los vectores propios.</p>
---	--

Resumiendo lo anterior, diagonalizar una matriz A , cuando sea posible, es encontrar una matriz diagonal D y una matriz regular P que verifiquen $D = P^{-1}AP$. Para ello:

1. Se calculan los valores y vectores propios.
2. Se comprueba que verifican alguna de las condiciones del teorema anterior para poder asegurar que A es diagonalizable.
3. Se determinan D y P :

- D es una matriz diagonal formada por los valores propios.
- Las columnas de P son los vectores propios, ordenados correctamente .

Ejercicio 4.2.1 *Estudia si los endomorfismos y matrices del ejemplo 4.2 y siguientes son diagonalizables. En caso afirmativo encuentra matrices tales que $D_{\text{diagonal}} = P^{-1}AP$*

• $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vimos que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$
 $(x, y) \rightsquigarrow f(x, y) = (y, -2x + 3y)$

con valores propios: $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ y vectores propios: $V(1) = \langle (1, 1) \rangle$; $V(2) = \langle (1, 2) \rangle$.

Como los vectores propios forman base de \mathbb{R}^2 entonces f es diagonalizable con

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ tal que } D = P^{-1}AP$$

• $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y, z) \rightsquigarrow f(x, y, z) = (y + z, 2x - y + z, 2x - 2y - 2z)$

vimos que sus valores propios son: $\lambda = 1$, $\lambda = -2$ (doble) y sus vectores propios: $V(1) = \langle (1, 1, 0) \rangle$, $V(-2) = \langle (1, 1, -3) \rangle$.

Como los vectores propios no forman base de \mathbb{R}^3 entonces f no es diagonalizable.

• $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$
 $(x, y, z, t) \rightsquigarrow f(x, y, z, t) = (x + y + z + t, x + y - z - t, x - y + z - t, x - y - z + t)$

vimos que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ con valores propios: $\lambda = -2$, $\lambda = 2$ (triple) y

vectores propios: $V(-2) = \langle (-1, 1, 1, 1) \rangle$; $V(2) = \langle (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1) \rangle$.

Como los vectores propios forman base de \mathbb{R}^4 entonces f es diagonalizable con

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ tal que } D = P^{-1}AP$$

• $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ vimos que sus valores propios son : $\lambda = -4$, $\lambda = 1$, $\lambda = 3$ y sus

vectores propios: $V(1) = \langle (1, 0, 3) \rangle$; $V(3) = \langle (3, 2, -1) \rangle$; $V(-4) = \langle (-3, 5, 1) \rangle$.

Como los vectores propios forman base de \mathbb{R}^3 entonces A es diagonalizable con

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ tal que } D = P^{-1}AP$$

• $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ vimos que sus valores propios son : $\lambda = -4$, $\lambda = 2$ y sus vectores
 propios: $V(-4) = \langle (1, 1, -2) \rangle$; $V(2) = \langle (1, -1, 0) \rangle$

Como los vectores propios no forman base de \mathbb{R}^3 entonces B no es diagonalizable.

• $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ vimos que sus valores propios son : $\lambda = 0, \lambda = -1, \lambda = -2$ y sus vectores propios: $V(0) = \langle (2, 1, 0) \rangle$; $V(-1) = \langle (2, 0, 1) \rangle$; $V(-2) = \langle (4, -1, 2) \rangle$.

Como los vectores propios forman base de \mathbb{R}^3 entonces C es diagonalizable con

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ tal que } D = P^{-1}CP$$

Potencia n-ésima de una matriz diagonalizable

Si A es diagonalizable, hemos visto que existe una matriz diagonal D y una matriz regular P tales que

$$\begin{aligned} A = PDP^{-1} &\Rightarrow A^n = (PDP^{-1})^n = \underbrace{(PDP^{-1}) \cdot (PDP^{-1}) \cdot (PDP^{-1}) \cdot \dots \cdot (PDP^{-1})}_{n \text{ veces}} \\ &= PD \underbrace{(P^{-1}P)}_{I_n} D \underbrace{(P^{-1}P)}_{I_n} D \underbrace{(P^{-1} \dots P)}_{I_n} DP^{-1} = P \underbrace{DD \dots D}_{n \text{ veces}} P^{-1} = PD^n P^{-1} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.6 Calcula A^{15} siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

Paso 1 Valores propios Calculamos las raíces del polinomio característico $|xI_n - A|$

$$|A - xI_3| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-x & -3 & 3 \\ 3 & -5-x & 3 \\ 6 & -6 & 4-x \end{vmatrix} = -(x-4)(x+2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 4, \lambda = -2$$

(doble), son los valores propios.

Paso 2 Vectores propios Para cada valor propio λ , calculamos resolvemos $(A - \lambda I_n)v = 0$

$$\begin{aligned} \bullet V(4) &= \{v \in \mathbb{R}^3 / (A - 4I_3)v = 0\} = \left\{ (x, y, z) / \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \{(x, y, z) / -x - y + z = 0; x - y = 0\} = \{(y, y, 2y) / y \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, 2) \rangle. \\ \bullet V(-2) &= \{v \in \mathbb{R}^3 / (A + 2I_3)v = 0\} = \left\{ (x, y, z) / \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \{(x, y, z) / x - y + z = 0\} = \{(x, y, -x + y) / x, y \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, -1), (0, 1, 1) \rangle. \end{aligned}$$

Los vectores propios forman base de \mathbb{R}^3 luego A es diagonalizable donde

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ tal que } A = PDP^{-1} \Rightarrow A^{15} = PD^{15}P^{-1} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^5 & 0 & 0 \\ 0 & -2^5 & 0 \\ 0 & 0 & -2^5 \end{pmatrix} P^{-1} = 2^5 \begin{pmatrix} 2^5 & -1 & 0 \\ 2^5 & 0 & -1 \\ 2^6 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \\
&= 2^4 \begin{pmatrix} 2^5 - 1 & -2^5 - 1 & 2^5 + 1 \\ 2^5 + 1 & -2^5 - 3 & 2^5 + 1 \\ 2^6 + 2 & -2^6 - 2 & 2^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 496 & -528 & 528 \\ 528 & -560 & 528 \\ 1056 & -1056 & 1024 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

4.3. Subespacios Invariantes

En el último apartado se ha establecido una caracterización de los endomorfismos que tienen una matriz diagonal, los denominados *diagonalizables*. En esta lección estudiaremos aquellos que aunque no lo sean, tengan una matriz más "simple", para ello generalizaremos el concepto de los subespacios de vectores propios a subespacios invariantes.

Ejemplo 4.7 *Se considera la matriz cuadrada $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ en el cuerpo de los racionales \mathbb{Q} . Se tiene que $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y que,*

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Expresamos esto escribiendo que $A^2 - 2A + 3I$ es la matriz nula o que el polinomio $p(X) = X^2 - 2X + 3$ anula la matriz A y, a menudo escribiremos $p(A) = 0$.

El anterior ejemplo, sugiere la siguiente definición:

Definición 4.5 *Sea A una matriz $n \times n$ con coeficientes en \mathbb{K} . Se llama polinomio mínimo de A al único polinomio $m_A(X) \in \mathbb{K}[X]$ verificando las siguientes condiciones:*

1. $m_A(X)$ es mónico.
2. $m_A(A)$ es la matriz nula.
3. $m_A(X)$ es el polinomio de menor grado verificando las dos condiciones anteriores.

El siguiente es uno de los resultados más importantes de la teoría del endomorfismo:

Teorema 4.2 (Teorema de Cayley–Hamilton) *Sea A una matriz $n \times n$ con coeficientes en \mathbb{K} . Sean $p_A(X)$ y $m_A(X)$ su polinomio característico y mínimo, respectivamente. Entonces:*

1. El polinomio $p_A(X)$ satisface la matriz, es decir, $p_A(A)$ es la matriz nula.
2. El polinomio mínimo $m_A(X)$ divide al polinomio característico $p_A(X)$. Además si α es autovalor de A , entonces $X - \alpha$ divide a $m_A(X)$.
3. La matriz A es diagonalizable si y sólo si su polinomio mínimo tiene todas sus raíces simples, es decir;

$$m_A(X) = (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_r), \quad \alpha_i \neq \alpha_j, \quad (i \neq j)$$

4. Dos matrices semejantes tienen el mismo polinomio mínimo.

Nota 4.2

A continuación se muestran algunos ejemplos de endomorfismos y matrices, junto con sus polinomios mínimos:

- El polinomio característico de la matriz identidad de tamaño $n \times n$ es $(X - 1)^n$ y su polinomio mínimo es $(X - 1)$.

- La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

tiene por polinomio característico y polinomio mínimo X^2 .

- El polinomio característico de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es $(X - 1)^2(X - 2)$ y su polinomio mínimo es $(X - 1)(X - 2)$.

- Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces $p_A(X) = X^3(X - 1)$ y su polinomio mínimo será alguno de los siguientes: $X(X - 1)$, $X^2(X - 1)$, $X^3(X - 1)$. ¿ Cuántos intentos serán necesarios para poder concluir que $m_A(X) = X^3(X - 1)$?

Definición 4.6

Sea f un endomorfismo de V , y U un subespacio vectorial de V . Se dice que U es f -invariante o invariante por f si se verifica cualquiera de las condiciones equivalentes siguientes:

1. $f(u) \in U$, cualquiera que sea $u \in U$.
2. $f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_r)$ están en U siendo $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ un sistema generador de U .

Ejemplo 4.8

A continuación se muestran algunos ejemplos de subespacios invariantes:

- Si f es el endomorfismo de \mathbb{R}^4 de matriz A con respecto a la base canónica, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces es inmediato observar que $\langle \{e_1, e_2\} \rangle$ es un subespacio f -invariante y que $\langle \{e_3, e_4\} \rangle$ no lo es. Se tiene que $m_A(X) = p_A(X) = X^4 - X^3$, entonces también es invariante el subespacio $\langle \{(4, 2, 1, 0)\} \rangle$ puesto que es el subespacio de vectores propios de f asociados al valor propio 1.

- Claramente el subespacio vectorial de los autovectores $V(\alpha)$ asociados al autovalor α de un endomorfismo f es un subespacio invariante.
- Sea f el endomorfismo de \mathbb{R}^5 de matriz A con respecto a la base canónica,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Los subespacios $U_1 = \langle \{e_1, e_5\} \rangle$, $U_2 = \langle \{e_2, e_4\} \rangle$, $U_3 = \langle \{e_3\} \rangle$ y $U_4 = \langle \{e_1, e_5, e_3\} \rangle$ son f -invariantes.

El resultado de *mayor interés* relativo a los subespacios invariantes lo ilustramos con el siguiente ejemplo

Ejemplo 4.9 *Se considera el endomorfismo f de \mathbb{R}^6 que tiene asociada respecto de la base canónica la matriz siguiente:*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ -5 & -8 & 0 & -5 & 10 & 0 \\ -3 & -8 & 1 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & -3 & 6 & 0 \\ -4 & -9 & -1 & -4 & 11 & 0 \\ 0 & -5 & -6 & 0 & 11 & -3 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de f es $p_A(X) = (X - 2)^3(X + 3)^3$ y su polinomio mínimo es $m_A(X) = (X - 2)^3(X + 3)^2$.

Si consideramos los subespacios $V_1 = \ker(f - 2I_{\mathbb{R}^6})^3$ y $V_2 = \ker(f + 3I_{\mathbb{R}^6})^2$, se tiene que

$$V_1 = \langle \{v_1 = (0, 1, 1, 0, 1, 0), v_2 = (1, -1, 1, 1, 0, 0), v_3 = (0, 0, -1, 0, 0, 1)\} \rangle$$

$$V_2 = \langle \{w_1 = (1, 0, 0, -1, 0, 0), w_2 = (0, 0, 0, 0, 0, 1), w_3 = (0, 1, 1, 1, 1, 0)\} \rangle$$

de lo que se pueden deducir los siguientes resultados:

1. La familia de vectores $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3\}$ es libre, y por tanto es una base de \mathbb{R}^6 , lo que permite asegurar que $\mathbb{R}^6 = V_1 + V_2$.
2. Puesto que $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, $\mathbb{R}^6 = V_1 \oplus V_2$.
3. Si calculamos las imágenes por f de los vectores de \mathcal{B} , obtenemos:

$$f(v_1) = v_1 - v_2 \quad f(v_2) = 2v_2 - v_3 \quad f(v_3) = v_1 + v_2 + 3v_3$$

$$f(w_1) = -3w_1 \quad f(w_2) = -3w_2 \quad f(w_3) = w_1 - 3w_3.$$

Esto muestra que los subespacios V_1 y V_2 son f -invariantes, y que la matriz B de f con respecto a la base \mathcal{B} es de la forma

$$B = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.4. Ejercicios propuestos de diagonalización de homomorfismos

1. Determina una matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ con valores propios 1 y 2 .
2. Sea A matriz diagonalizable, ¿cómo diagonalizaríamos la matriz $B = A^3 - 2A^2 + 3I$?
3. Calcula los posibles valores propios de las homotecias, proyecciones y simetrías de la lección *Homomorfismo y geometría* del capítulo anterior.
4. Sea $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ tal que $(1, -1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$ son vectores propios y $f(1, 2, 3) = (6, 6, 3)$. Halla la matriz A de f en la base canónica y sus valores propios. Razona si f es diagonalizable y en caso afirmativo determina matrices P y D tales que $A = PDP^{-1}$.
5. Diagonaliza el endomorfismo $f : \mathbb{P}_2(x) \rightarrow \mathbb{P}_2(x)$

$$p(x) \rightsquigarrow f(p(x)) = p'(x) + p(x)$$

6. Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de V y sea $f \in \text{End}(V)$ dado por

$$f(e_1) = -e_1 + 3e_2 - 3e_3; f(e_2) = 2e_2; f(e_3) = -3e_1 + 3e_2 - e_3$$

Estudia si es diagonalizable y en caso afirmativo diagonaliza f .

7. Razona que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable y diagonaliza A^2 y A^{-1} .

8. Sea $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo cuyos autovalores son $-1, 0$ y 1 , con autovectores asociados v_1, v_2, v_3 respectivamente. Encontrar un vector v tal que $f(v) = v_1 + v_3$.
 ¿Existirá un vector v tal que $f(v) = v_1$?
9. Estudiar, según los valores de a , si son diagonalizables

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2a & 0 \\ -a & 0 & a \\ 0 & -2a & 0 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 1+a & -a & a \\ 2+a & -a & a-1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

10. Dados $v_1(1, 1, 0, 0), v_2(0, 1, 0, 1), v_3(0, 0, 0, 1), v_4(0, 0, 1, 1), v_5(1, 0, 1, 0), v_6(1, 0, 0, 0)$ y $f \in \text{End}(\mathbb{R}^4)$ definido por: $f(v_1) = v_4; f(v_2) = v_5; f(v_3) = v_6; f(v_4) = v_1$.

Diagonaliza, si es posible, f y calcula $-(A)^{-21}$, siendo A la matriz de f en la base canónica.

11. Dí, razonadamente, si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes:

- a) Si $A \in M_4(\mathbb{R})$ y $P_A(X) = X(X-1)(X-2)^2$ entonces A tiene rango 2.
- b) Sea f un endomorfismo de \mathbb{R}^4 . Se sabe que $\dim \ker(f-3I) > 1$ y que $\text{mcd}\{M_f(X), (X-5)(X-4)^2\}$ tiene dos raíces distintas. En esas condiciones f es diagonalizable.
- c) Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ y $A^2 = \mathbb{I}_n$ entonces A es diagonalizable.
- d) Si $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un endomorfismo cuyo polinomio mínimo es $X(X+1)$, entonces f es diagonalizable.

- e) Si $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un endomorfismo cuyo polinomio mínimo es $X(X-1)$, entonces f es la aplicación nula, es la aplicación identidad o bien existen subespacios U y W de \mathbb{R}^3 tales que f coincide con la proyección sobre U en la dirección de W .

12. Sea f un endomorfismo de \mathbb{R}^3 del que se sabe lo siguiente:

- f es diagonalizable y sólo tiene dos autovalores distintos.
- Si $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y - z = 0\}$ y $V = \langle \{(1, 0, 1), (-1, 1, 1)\} \rangle$, $f(U) = V$.
- Un valor propio de f es -1 y uno de sus vectores propios pertenece a U .
- $(1, 0, -1)$ es un vector propio de f , y está asociado a un autovalor simple.

Halla la matriz A asociada a f respecto de la base canónica, en función de cuántos parámetros sea preciso.

13. Respecto a la base canónica de \mathbb{R}^4 , calcula la matriz del endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ caracterizado por verificar:

- $(1, 1, 1, 1)$ es un vector propio de valor propio -4 .
- $\ker(f) = \langle \{(1, 2, 3, 4), (1, -4, 0, 1)\} \rangle$
- $f(3, 2, 1, 2) = (8, 4, -2, 1)$.

14. Indica si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Justifica tu respuesta.

“Se considera \mathbb{P}_3 el espacio vectorial sobre \mathbb{R} de los polinomios de grado menor que 3 y con coeficientes en \mathbb{R} . Sea $f : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_3$ la aplicación lineal $f(ax^2 + bx + c) = cx + b - a$. Entonces existe una base \mathcal{B} de \mathbb{P}_3 tal que la matriz de f respecto a esta base es diagonal”.

15. Indica si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Justifica tu respuesta.

“Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 2017 & 2016 \\ 2016 & 2017 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2016 & 2017 \\ 0 & 2016 \end{pmatrix}$. Entonces A y B son matrices diagonalizables”.

16. Sea $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ un endomorfismo cuya matriz asociada respecto de las bases canónicas es

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

- Obtén el polinomio característico y los valores propios de A .
- Da bases de los subespacios de vectores propios relativos a A . ¿Es f diagonalizable? ¿Quién es el polinomio mínimo de f ?
- Dar cuatro subespacios invariantes por la aplicación f .
- Da bases de los subespacios de vectores propios relativos a A . ¿Puedes encontrar un subespacio invariante por f de dimensión 2?