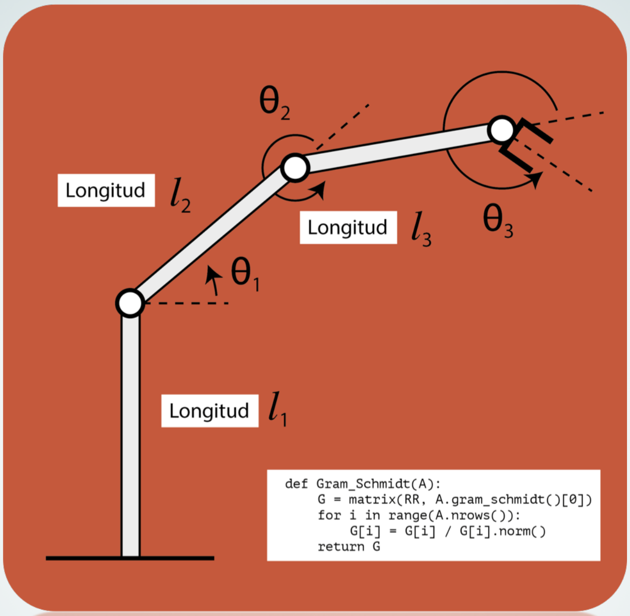
Álgebra y Geometría

Tema 5. Geometría Euclídea



Jaime Gutiérrez Gutiérrez
Ángel Barón Caldera
Ana Isabel Gómez Pérez

Departamento de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación

Tema 5 Geometría Euclídea

Tenemos todos los ingredientes para abordar el estudio de los cuerpos geométricos con multiples aplicaciones a la ingeniería en sus diferentes especialidades (industrial, mecánica, electrónica, eléctrica, química, civil, etc.)

5.1. Espacio vectorial Euclídeo

En esta primera parte trataremos de generalizar a un espacio vectorial real conceptos conocidos en $\mathbb{R}^2$: producto escalar, vectores y subespacios ortogonales, proyección ortogonal, etc.

Definición 5.1
Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial n-dimensional, y $\cdot : V \times V \to \mathbb{R}$ una aplicación por la cuál la imagen de un par (v, w) va a denotarse por $v \cdot w$. Se dice que $\cdot$ es un producto escalar *o un* producto interno *si verifica cada una de las condiciones siguientes, donde v, w, u son vectores cualesquiera de V y α, β elementos cualesquiera de $\mathbb{R}$:*

i) $v \cdot w = w \cdot v$
ii) $(\alpha v + \beta u) \cdot w = \alpha(v \cdot w) + \beta(u \cdot w)$
iii) $v \cdot v \geq 0$. *Además* $v \cdot v = 0$ *si y sólo si* $v = \mathbf{0}$

Un espacio vectorial real sobre el que se considera un producto escalar recibe el nombre de *espacio vectorial euclídeo.*
También es habitual denotar un producto escalar definido en V por $<,>$ y el producto escalar de los vectores v, w por $< v, w >$.

Ejemplo 5.1

1. *Si $v = (x_1, \cdots, x_n)$ y $w = (y_1, \cdots, y_n)$ son vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^n$, podemos definir $v \cdot w = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$. La aplicación $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ así definida es un producto escalar en $\mathbb{R}^n$, denominado* producto escalar habitual *o producto escalar* estándar.

2. *En $\mathbb{R}^3$ podemos inventar otra aplicación que cumpla las propiedades:*

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$$

   Compruébese que es un producto escalar.

3. *Sea $V = \mathbb{R}_3[x]$ y $\cdot$ la aplicación definida de $V \times V$ en $\mathbb{R}$ por $p(x) \cdot q(x) = \int_0^1 p(x)q(x)dx$. Compruébese que es un producto escalar.*

Por analogía con la situación en el plano con el producto usual, podemos definir los siguientes conceptos, siempre referidos a un producto escalar.

Definición 5.2 *Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión n.*

1. *Si u y v son dos vectores no nulos de V tales que $u \cdot v = 0$, se dice que u y v son* ortogonales.
2. *La* norma o módulo *de un vector v es $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$. Un vector se dice* unitario *si tiene norma 1.*
3. *La* distancia entre dos vectores *u y v es la norma del vector diferencia:*
$$d(u, v) = \|u - v\|$$
4. *El* ángulo *entre dos vectores u y v es:*
$$angulo(u, v) = \arccos \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$$
5. *Un conjunto $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ de vectores no nulos de V es* ortogonal *si los vectores son ortogonales dos a dos. Un conjunto S ortogonal formado por vectores unitarios es un conjunto* ortonormal.

Ejemplo 5.2

- *Los vectores $(1, 3, 0)$ y $(-6, 2, 1)$ de $\mathbb{R}^3$ son ortogonales con el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$, pero no lo son con el producto escalar definido en el punto 2 del Ejemplo 1.*
- *En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual, sean los vectores $u = (1, 0, 0)$ y $v = (1, 0, 1)$.*
  - *$u \cdot v = 1$, luego los vectores u y v no son ortogonales. Y por lo tanto el conjunto $\{u, v\}$ no es ortogonal.*
  - *$\|u\| = 1, \|v\| = \sqrt{2}$. Luego u es un vector unitario y v no lo es.*
  - *Su distancia es: $d(u, v) = \|u - v\| = \|(0, 0, 1\| = 1$*
  - *El ángulo que forman es: $\arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = 45$*
- *El conjunto $S = \{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$ es ortonormal.*

Código Sage 5.1: Operaciones sobre espacio vectorial euclídeo

```
#Variables de entrada
u = vector(QQ, [1, 0, 0]);
v = vector(QQ, [1, 0, 1]);
print(u.inner_product(v)); #Producto escalar
print(u.norm(),v.norm()); #Normas
(u-v).norm() #Distancia entre u,v
theta=(u.inner_product(v))/(u.norm()*v.norm());
print(simplify(arccos(theta)))
#Comprobar si el conjunto S es ortonormal
S=Matrix(QQ,[(1,0,0),(0,0,1)]);
print((S*S.transpose()).is_one()); #Identidad si ortogonal
S.norm() #Norma de la matriz asociada
```

Evaluar en SageMathCell

Algunas propiedades relativas a los conceptos anteriores están recogidas en la siguiente:

Proposición 5.1 *Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión n.*

1. *Si dos vectores u y v son ortogonales, entonces también lo son αu y βv, para cualesquiera escalares α y β.*

2. *La norma de un vector cumple las siguientes propiedades:*

   - $\|v\| \geq 0 \ \forall\, v \in V$. *Además* $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{0}$
   - $\|\alpha v\| = |\alpha|\, \|v\|$, $\forall\, v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$. *Así, para todo vector v no nulo, se tiene que el vector $v/\|v\|$ es unitario.*
   - $|v \cdot w| \leq \|v\|\, \|w\|$, $\forall v, w \in V$. *Se conoce como* desigualdad de Schwarz.
   - $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$, $\forall\, v, w \in V$. *Se conoce por* desigualdad triangular.

   Estas propiedades permiten probar que la distancia entre dos vectores es propiamente una distancia.

3. *Todo conjunto ortogonal $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ es parte libre.*

5.1.1. Ortonormalización de Gram-Schmidt

El procedimiento de ortonormalización de Gram-Schmidt, que a continuación se presenta, permite determinar una base constituida por vectores ortogonales dos a dos partiendo de cualquier base de V. Una vez obtenida esa base, sin más que dividir a cada vector por su norma, contaremos con una base formada por vectores ortogonales dos a dos y todos ellos de norma 1, es decir una base ortonormal.
La base canónica de $\mathbb{R}^3$ es ortonormal con el producto escalar estándar, pero no lo es la base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$.

Algoritmo 1 PROCEDIMIENTO DE ORTONORMALIZACIÓN DE GRAM-SCHMIDT
Entrada: $\mathcal{S} = \{u_1, \ldots, u_r\}$ *parte libre de un espacio euclídeo V.*
Salida: $\mathcal{S}' = \{w_1, \ldots, w_r\}$ *conjunto ortonormal, verificando, para todo $i = 1, .., r$:*

$$\langle \{u_1, \ldots, u_i\} \rangle = \langle \{w_1, \ldots, w_i\} \rangle$$

Primero construimos un conjunto ortogonal $\{v_1, \ldots, v_r\}$, siguiendo el algoritmo:

$$v_1 = u_1$$

$$v_2 = u_2 - \alpha_{2,1} v_1$$

$$v_3 = u_3 - \alpha_{3,2} v_2 - \alpha_{3,1} v_1$$

$$\ldots$$

$$v_i = u_i - \alpha_{i,i-1} v_{i-1} - \alpha_{i,i-2} v_{i-2} \ldots - \alpha_{i,2} v_2 - \alpha_{i,1} v_1$$

$$v_r = u_r - \alpha_{r,r-1} v_{r-1} - \alpha_{r,r-2} v_{r-2} \ldots - \alpha_{r,2} v_2 - \alpha_{r,1} v_1$$

donde

$$\alpha_{i,j} = \frac{u_i \cdot v_j}{v_j \cdot v_j}$$

Finalmente normalizamos los vectores $v_1, \ldots, v_r$, simplemente dividiendo por su norma:

$$w_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$$

El siguiente ejemplo, ilustra el algoritmo para el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$:

Ejemplo 5.3 *Dada la entrada $S = \{u_1 = (1,1,0), u_2 = (0,1,1), u_3 = (1,0,1)\}$ de un subconjunto de vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^3$.*

$$v_1 = u_1 = (1,1,0)$$

$$v_2 = u_2 - \alpha_{2,1}v_1 = (0,1,1) - \frac{1}{2}(1,1,0) = (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 1), \qquad \alpha_{2,1} = \frac{u_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} = \frac{1}{2}$$

$$v_3 = u_3 - \alpha_{3,2}v_2 - \alpha_{3,1}v_1 = (1,0,1) - \frac{1}{3}(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 1) - \frac{1}{2}(1,1,0) = (\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3}) \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{3,2} = \dfrac{u_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} = \dfrac{1}{3} \\ \alpha_{3,1} = \dfrac{u_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} = \dfrac{1}{2} \end{array} \right.$$

Para hacerla ortonormal dividimos cada vector por su norma $w_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$, $i = \{1,2,3\}$, obteniendo $S' = \{w_1, w_2, w_3\}$:

$$\{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0), (\frac{-\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}), (\frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})\}$$

Compruébese que es ortonormal.

Código Sage 5.2: Calculando matriz ortonormal

```
S=matrix(QQ,[[1,1,0],[0,1,1],[1,0,1]]);
G,A=S.gram_schmidt();  #Devuelve una matriz ortogonal en G
salida = [];
for i in range(A.nrows()):
    salida.append(G[i]/sqrt(G[i]*G[i]));
show(matrix(salida))
```

Evaluar en SageMathCell

Nota 5.1 Matrices ortogonales

- *Sea A la matriz cuyas columnas son los vectores w_1, w_2, w_3 del ejercicio anterior, se tiene que A es una matriz ortogonal, es decir $AA^t = I$, en otras términos la inversa de la matriz A es su traspuesta.*

- *En general, si A es la matriz formada por los vectores de una base $\mathcal{B}$ del espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^n$, entonces se tiene que $\mathcal{B}$ es una base ortonormal si y sólo si la matriz A es una matriz ortogonal.*

5.1.2. Subespacios Ortogonales

Definición 5.3

- *Si U es un subespacio vectorial de V, se llama conjunto ortogonal a U al conjunto* $U^{\perp} = \{v \in V/u \cdot v = 0, \forall u \in U\}$
- *Diremos que un subespacio U es ortogonal a otro subespacio W se denota $U \perp W$ si todo vector de U es ortogonal a todo vector de W.*

Lo siguiente ilustra estos nuevos conceptos y, además incluye algunas propiedades elementales.

Nota 5.2

- *En $\mathbb{R}^3$ el eje X, es decir el subespacio $y = 0, z = 0$ es ortogonal al plano YZ, es decir al subespacio $x = 0$. Sin embargo, el plano XY no es ortogonal al plano YZ.*
- *Si dos subespacios son ortogonales su intersección es el vector nulo.*
- *Si U es un subespacio de V, $U^{\perp}$ es subespacio de V (subespacio ortogonal a U). Se tiene que $V = U \oplus U^{\perp}$. Además $(U^{\perp})^{\perp} = U$.*
- *Si $\mathcal{B} = \{u_1, \cdots, u_n\}$ es una base ortonormal de V, las coordenadas $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ de un vector $v \in V$ respecto de $\mathcal{B}$ vienen dadas por $\alpha_i = v \ \cdot u_i$, $\forall i$.*
- *Si $\mathcal{B} = \{u_1, \cdots, u_n\}$ es una base ortonormal de V, y $v, w \in V$ tienen coordenadas $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ y $(\beta_1, \cdots, \beta_n)$ respecto de $\mathcal{B}$, $v \cdot w = \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n$ y $\|v\|^2 = \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2$*

5.1.3. Proyección ortogonal

Sea V un espacio vectorial euclídeo, U un subespacio de V y $U^{\perp}$ su ortogonal. Se define la siguiente aplicación:

$$p_U : V \to V \quad \text{definida por} \quad p_U(v) = u \quad \text{siendo} \quad v = u + u', u \in U, u' \in U^{\perp}$$

conocida como proyección ortogonal sobre U.
Obsérvese que la aplicación

$$p_{U^{\perp}} : V \to V \quad \text{definida por} \quad p_{U^{\perp}}(v) = u' \quad \text{siendo} \quad v = u + u', u \in U, u' \in U^{\perp}$$

es la proyección ortogonal sobre $U^{\perp}$ puesto que $(U^{\perp})^{\perp} = U$

Proposición 5.2
En las condiciones anteriores se tiene:

1. $Im(p_U) = U$, $\ker(p_U) = U^{\perp}$, $p_U^2 = p_U$, $p_U \circ p_{U^{\perp}} = \mathbf{0_V}$.
2. $v \cdot p_U(w) = p_U(v) \cdot w$, $\forall v, w \in V$
3. $\mathbb{I}_V = p_U + p_{U^{\perp}}$. *Resultado conocido como teorema de la proyección.*
4. $\|v - p_U(v)\| < \|v - w\| \qquad \forall w \in U \quad$ *con* $\quad w \neq p_U(v)$. *Resultado conocido de aproximación de la norma.*

Ejemplo 5.4
Se considera el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar estandar. Sea $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 2z = 0\}$, y $v = (1, 2, 3)$. Vamos a determinar la proyección ortogonal de v sobre el plano vectorial U.
Una base de U es $\mathcal{B}_U = \{(1, 1, 0), (2, 0, -1)\}$, y una base de $U^\perp$ es, como se deduce de la ecuación que define U, $\mathcal{B}_{U^\perp} = \{(1, -1, 2)\}$.
El vector v en la base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (2, 0, -1), (1, -1, 2)\}$ tiene coordenadas $(\frac{17}{6}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{6})$, por tanto $p_U(v) = \frac{17}{6}(1, 1, 0) + (-\frac{4}{3})(2, 0, -1) = (\frac{1}{6}, \frac{17}{6}, \frac{4}{3})$.
Simultáneamente podemos determinar $p_{U^\perp}(v) = \frac{5}{6}(1, -1, 2) = v - p_U(v)$.

En el ejemplo precedente la determinación de $p_U(v)$ ha necesitado del cálculo de las bases de U y de $U^\perp$, y de expresar v como combinación lineal de la base unión de ambas. ¿Se reduciría el esfuerzo de conocer una base ortonormal de U?.

Ejemplo 5.5
Si U es el subespacio del ejemplo anterior, una base ortonormal de él es $\mathcal{B}'_U = \{u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1)\}$, que se ha obtenido aplicando el procedimiento de Gram-Schmidt a la base $\mathcal{B}_U$.
Si u_3 es un vector unitario que genera $U^\perp$, $\{u_1, u_2, u_3\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ respecto de la cual las coordenadas de v son $(v \cdot u_1, v \cdot u_2, v \cdot u_3)$.
Por tanto $p_U(v) = (v \cdot u_1)u_1 + (v \cdot u_2)u_2 = \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{(1, 1, 0)}{\sqrt{2}} + (-\frac{4}{\sqrt{3}})\frac{(1, -1, -1)}{\sqrt{3}} = (\frac{1}{6}, \frac{17}{6}, \frac{4}{3})$.
Trabajando así, la forma de obtener $p_{U^\perp}(v)$ es calculando $v - p_U(v)$, puesto que no hemos determinado explícitamente una base de $U^\perp$.
En este caso, en el que $\dim(U^\perp) = 1$, el cálculo de $p_{U^\perp}(v) = \frac{5}{6}(1, -1, 2)$, que es un vector no nulo, nos permite establecer una base de $U^\perp$. Ello no es posible si $\dim(U^\perp) > 1$.

Por tanto, si dado un subespacio U de V, lo que interesa es exclusivamente conocer $p_U(v)$ con $v \in V$, uno puede optar por determinar una base ortonormal $\mathcal{B}_U = \{u_1, \cdots, u_l\}$ de U (a la que siempre se puede llegar aplicando Gram-Schmidt a cualquier base de U) y tener en cuenta la siguiente

Proposición 5.3
Si $\mathcal{B}_U = \{u_1, \cdots, u_l\}$ es una base ortonormal de U, $p_U(v) = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_l u_l$ con $\alpha_i = v \cdot u_i$.

5.2. Aplicaciones

Vamos a estudiar dos problemas concretos en las que están involucrados el teorema de aproximación de la norma y, en consecuencia, la proyección ortogonal de un vector. Esos problemas son el de aproximación por mínimos cuadrados y la resolución de sistemas sobre-dimensionados.

5.2.1. Aproximación por mínimos cuadrados

Supongamos que existen n datos: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ y que el tipo de curva por la que vamos a aproximar viene dado por $y = f(x)$ donde x, y representan las variables que deseamos relacionar y $f(x) = mx + b,\ f(x) = ax^2 + bx + c, \cdots$, según el ajuste a realizar sea lineal, cuadrático, $\cdots$. Lo que se hace en esta situación es buscar, por ejemplo, la recta $y = mx + b$ que mejor se ajuste a los datos del problema: es decir, debemos determinar m y b tal que

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - (b + mx_i))^2$$

sea lo más pequeño posible. A esta búsqueda se denomina ajuste por mínimos cuadrados.

Teorema 5.1 *Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ un conjunto de n puntos de $\mathbb{R}^2$ tal que no todos los x_i coinciden. Si*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} b \\ m \end{pmatrix} = (A^t A)^{-1} A^t \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

entonces $y = mx + b$ es la recta que da el mejor ajuste por mínimos cuadrados para los puntos considerados.

Para este caso particular se puede probar la existencia de la inversa de $A^t A$ viendo que su determinante es no nulo utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Teorema 5.2 *Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ un conjunto de n puntos de $\mathbb{R}^2$ tal que no todos los x_i coinciden. Si*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = (A^t A)^{-1} A^t \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

entonces $y = ax^2 + bx + c$ es la parábola que da el mejor ajuste por mínimos cuadrados para los puntos considerados.
Y, en general para computar el polinomio $y = c_r x^r + \cdots + c_1 x + c_0$ de grado r que da el mejor ajuste por mínimos cuadrados para los puntos considerados, bastará resolver el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_r \end{pmatrix} = (A^t A)^{-1} A^t \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

donde,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^r \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^r \end{pmatrix}$$

La clave de la demostración de estos teoremas se halla en observar que el vector de los coeficientes de la recta o de la parábola verificando la condición exigida es justamente la proyección del vector de los y_i's sobre el subespacio de $\mathbb{R}^n$ definido por las columnas de A.

5.2.2. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales sobredimensionados

Genéricamente los sistemas de ecuaciones lineales con más ecuaciones que incógnitas no tienen ninguna solución salvo que se verifiquen las hipótesis del Teorema de Rouche-Frobenius. Las técnicas desarrolladas en este capítulo nos van a permitir calcular, como en la sección anterior, la mejor pseudosolución, esto es el punto de $\mathbb{R}^n$ que está más proximo de ser una solución del sistema lineal considerado.

Teorema 5.3 *Sean A una matriz con m filas y n columnas, $m \geq n$ y $\underline{b}$ un vector columna en $\mathbb{R}^m$. Si*

$$\underline{x} = (A^t A)^{-1} A^t \underline{b}$$

entonces

$$\|A\underline{x} - \underline{b}\| < \|A\underline{y} - \underline{b}\|$$

para todo $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\underline{y} \neq \underline{x}$.

La clave de la demostración de este teorema se encuentra en observar que el vector $\underline{x}$ verificando la condición exigida es justamente la proyección de $\underline{b}$ sobre el subespacio de $\mathbb{R}^m$ definido por las columnas de A.

Código Sage 5.3: Aproximación por mínimos cuadrados

```
#Variables entrada
X=(10,12,13,15)
Y=(2,0,0.1,1)
#Construir la matriz A
A=matrix(QQ,[[x^i for i in range(2)] for x in X])
#Aplicar teorema
B=(A.transpose()*A).inverse()*A.transpose()
Coeff=B*vector(Y)
#Construir funcion
def min_Q(x):
    return Coeff*vector([x**i for i in range(len(Coeff))])
#Representacion de funcion y puntos originales
p1=plot(min_Q,10,15)
p2=point([(10,2),(12,0),(13,0.1),(15,1)], figsize=5)
(p1+p2).show()
```

Evaluar en SageMathCell

5.2.3. Factorización QR

Dada una matriz real $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, con columnas linealmente independientes, podemos encontrar matrices $Q \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $R \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tales que

1. $A = QR$.
2. Los vectores columnas de Q son ortonormales.
3. R es triangular superior inversible.

Ilustramos el método de computar tales matrices mediante el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.6 *Calcular la factorización QR de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicamos el algoritmo de Gram-Schmidt a las columnas de A. Sean $u_1 = (1,0,1,0), u_2 = (0,1,2,1)$ *y* $u_3 = (1,-1,0,1)$ *las columnas de A.*
$\bullet v_1 = u_1 = (1,0,1,0)$

$\bullet v_2 = u_2 - \alpha_{2,1}\, v_1 = (0,1,2,1) - (1,0,1,0) = (-1,1,1,1) \quad con \quad \alpha_{2,1} = \dfrac{u_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} = 1$

$\bullet v_3 = u_3 - \alpha_{3,2}\, v_2 - \alpha_{3,1}\, v_1 = (1,-1,0,1) + \dfrac{1}{4}(-1,1,1,1) - \dfrac{1}{2}(1,0,1,0) = (1/4, -3/4, -1/4, 5/4)$
con $\quad \alpha_{3,2} = \dfrac{u_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} = \dfrac{-1}{4} \qquad \alpha_{3,1} = \dfrac{u_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} = \dfrac{1}{2}$
Hemos construido la familia de vectores ortogonales $\{v_1, v_2, v_3\}$.
Ortonormalizamos, dividiendo cada vector entre su norma: $w_i = \dfrac{v_i}{||v_i||}$, $i = \{1,2,3\}$.

$$w_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), w_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), w_3 = (\frac{1}{6}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{6}, \frac{5}{6})$$

Las columnas de la matriz Q son precisamente los vectores w_1, w_2 *y* w_3. *Para calcular la matriz R, simplemente desde el proceso de Gram-Schmidt, escribimos los vectores* u_i *en combinación de los* v_i *para* $i = 1,2,3$*:*

$$\left\{ \begin{array}{lll} v_1 = u_1 & \Rightarrow & u_1 = v_1 \\ v_2 = u_2 - v_1 & \Rightarrow & u_2 = v_1 + v_2 \\ v_3 = u_3 + \dfrac{v_2}{4} - \dfrac{v_1}{2} & \Rightarrow & u_3 = \dfrac{v_1}{2} - \dfrac{v_2}{4} + v_3 \end{array} \right. \Rightarrow (u_1 u_2 u_3) = (v_1 v_2 v_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Interpretando las expresiones anteriores como columnas de la matriz A, podemos escribir

$$A = \left(u_1 \middle| \, u_2 \middle| \, u_3\right) = \left(v_1 \middle| \, v_2 \middle| \, v_3\right) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{v_1}{||v_1||} \middle| \frac{v_2}{||v_2||} \middle| \frac{v_3}{||v_3||} \right)}_{Q} \underbrace{\begin{pmatrix} ||v_1|| & 0 & 0 \\ 0 & ||v_2|| & 0 \\ 0 & 0 & ||v_3|| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R}$$

Entonces,

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 2 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Código Sage 5.4: Ejemplo matrices cuadradas

```
#Variables de entrada
A=matrix(RDF,[[1,1,0],[0,1,1],[1,0,1]]);
Q,R=A.QR();
show(Q);
show(R);
```

Evaluar en SageMathCell

La factorización **QR** de una matriz es una descomposición útil en muchas ocasiones para:

- La resolución de sistemas lineales y mínimos cuadrados.
- El cálculo de autovalores.
- En el cálculo del determinante(si la matriz A es cuadrada).

5.3. Isometrías

Ahora estudiamos las aplicaciones lineales sobre un espacio vectorial euclídeo que conservan las normas. En lo que sigue V denotará un espacio euclídeo de dimensión n.

Definición 5.4
Sea $\phi : V \to V$ un endomorfismo. Se dice que ϕ es una transformación ortogonal o isometría si conserva la norma, es decir, si $\|\phi(v)\| = \|v\|$ para todo v de V.

Agunas propiedades directas y ejemplos:

- Toda transformación ortogonal es biyectiva.
- Sea $V = \mathbb{R}^3$ con el producto escalar habitual. El endomorfismo $\phi : V \to V$ definido por $\phi(x, y, z) = (x, -y, -z)$ es una transformación ortogonal, como puede comprobarse fácilmente.
- Sea $V = \mathbb{R}^n$, U un subespacio no nulo de V y $U^\perp$ su ortogonal. El endomorfismo $\phi = p_U - p_{U^\perp}$ de V es una transformación ortogonal.

El siguiente resultados recoge las propiedades fundamentales de las isometrías:

Teorema 5.4
Sea ϕ un endomorfismo de V, y $\mathcal{B} = \{u_1, \cdots, u_n\}$ una base ortonormal de V. Se tiene:

1. *ϕ es una transformación ortogonal si y sólo si $\mathcal{B}' = \{\phi(u_1), \cdots, \phi(u_n)\}$ es una base ortonormal de V.*

2. *ϕ es una transformación ortogonal si y sólo si la matriz $M_{\mathcal{B}}(\phi)$ es una matriz ortogonal.*

3. *Si ϕ es una transformación ortogonal de V, se verifica que*
   - *Los únicos autovalores reales de ϕ son 1 y -1.*
   - *ϕ^{-1} es una transformación ortogonal.*
   - *La composición de ϕ con cualquier transformación ortogonal es una transformación ortogonal.*

Es fácil determinar las transformaciones ortogonales en un espacio de dimensión 2.

Proposición 5.4
Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión 2, y ϕ una transformación ortogonal definida en V. Existe una base ortonormal de V respecto de la cuál la matriz asociada a ϕ es de una de las formas siguientes:

1. $\begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}$ *con* $0 \leq \theta < 2\Pi$. *Diremos que ϕ es una rotación vectorial de amplitud o ángulo θ.*

2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. *Diremos que ϕ es una simetría vectorial ortogonal (de eje el conjunto de vectores fijos $V_\phi(1) = \{v \in V / \phi(v) = v\}$).*

Ejemplo 5.7

- Si ϕ es la transformación ortogonal de $\mathbb{R}^2$ que respecto de la base canónica tiene por matriz $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$, $p_\phi(X) = (X-1)(X+1)$ y ϕ es una simetría vectorial ortogonal de eje $V_{(1)} =< w_1 = (2,1) >$. Como $V_{(-1)} =< w_2 = (1,-2) >= V_{(1)}^{\perp}$, respecto de la base ortogonal $\{w_1, w_2\}$ o de la base ortonormal $\{\frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_2}{\|w_2\|}\}$, la matriz asociada a ϕ es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- Si ϕ es la transformación ortogonal de $\mathbb{R}^2$ que respecto de la base canónica tiene por matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $det(A) = 1$ y $p_\phi(X) = X^2 - X + 1$ es irreducible. La isometría ϕ es una rotación de amplitud $\frac{\Pi}{3}$, respecto de la base canónica.

- Si ϕ es una isometría del espacio vectorial euclídeo V de dimensión 2, y su polinomio característico $p_\phi(X) = X^2 + \alpha X + \beta$ es irreducible sobre $\mathbb{R}$, ϕ es una rotación (de matriz no diagonal).

  Además, puesto que respecto de una base ortonormal la matriz asociada a ϕ es ortogonal, su determinante es ± 1, y como coincide con el término independiente de su polinomio característico, deducimos que $\beta = 1$.

En este caso el polinomio característico $p_\phi(X) = X^2 + \alpha X + 1$ se puede escribir de la forma $p_\phi(X) = (X-a)^2 + b^2$ siendo $a = -\frac{\alpha}{2}$ y $b^2 = \frac{4-\alpha^2}{4}$. Como $a^2 + b^2 = 1$, $a = cos\theta, b = sen\theta$ con $\theta \in [0, 2\Pi)$.

- La composición de dos rotaciones es otra rotación de amplitud la suma de las amplitudes, módulo 2Π.

  La composición de dos simetrías es una rotación, que es la identidad si las simetrías coinciden.

  La composición de una rotación y una simetría es una simetría.

  Da un argumento que pruebe lo anterior.

- Sean ϕ y φ las isometrías de $\mathbb{R}^2$ definidas por:

  $$\phi(x,y) = (y,x) \qquad \varphi(x,y) = (x,-y)$$

  Ambas son simetrías. El eje de ϕ es la recta vectorial cuyos elementos son de la forma (a,a) (bisectriz del primer y tercer cuadrante). El eje de φ es el eje de abscisas como recta vectorial. ¿Qué rotaciones son $\varphi \circ \phi$ y $\phi \circ \varphi$?. ¿Qué relación hay entre ambas?.

- Se ha visto que la composición de dos simetrías es una rotación. El recíproco también es cierto: toda rotación es composición de dos simetrías.

  Si r es una rotación, $r = r \circ I_V = r \circ s \circ s$, donde s es cualquier simetría. La aplicación $r \circ s = s'$ es otra simetría.

5.4. Espacio Afín

Hemos estudiado con cierto detalle el conjunto $\mathbb{R}^n$ siempre como estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial. En cursos anteriores, cuando se empieza a hablar de geometría, un vector era un segmento orientado $\vec{PQ}$ identificado con un par de puntos P, Q, que eran su origen y su extremo. Esta relación que equipara un par de puntos con un vector, es nuestro punto de arranque en este último capítulo, donde trabajaremos con $\mathbb{R}^n$ desde dos perspectivas distintas, por un lado, $V = \mathbb{R}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial donde sus elementos reciben el nombre de vectores y son denotados por $v, w, u, \ldots$. Por otro, $E = \mathbb{R}^n$ como conjunto de puntos, a los que denotaremos por $P, Q, R, \ldots$. También, en curso anteriores, se ha estudiado conceptos tales como recta determinada por dos puntos, plano que pasa por un punto y tiene dirección dada, etc. Los problema geométricos de incidencia, intersecciones, transformaciones geométricas entre puntos se abordaran con la ayuda de los vectores.

Definición 5.5
Un espacio afín n-dimensional consta de un conjunto de puntos $E = \mathbb{R}^n$ y una aplicación de $E \times E \to V$ que a cada par de puntos (P,Q) le asocia un vector $v = \vec{PQ}$ (también $Q = P + v$) verificando las dos propiedades siguientes:
i) $\forall P, Q, R \in E,\ \vec{PR} = \vec{PQ} + \vec{QR}$
ii) $\forall P \in E$, $\forall v \in V$, existe un único $Q \in E$ tal que $v = \vec{PQ}$.
Se define dimensión del espacio afín como la dimensión de V.

Son propiedades inmediatas las siguientes:

Proposición 5.5

1. *Para cualquier punto P, el vector $\vec{PP}$ es el vector nulo.*
2. *Los vectores $\vec{PQ}$ y $\vec{QP}$ son opuestos entre si.*
3. *Si $\vec{PQ} = \vec{P'Q'}$, entonces $\vec{PP'} = \vec{QQ'}$*

5.4.1. Sistemas de referencia o Sistema de Coordenadas

Definición 5.6
1. Se dice que los $n+1$ puntos $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ de E son un sistema de referencia o sistema de coordenadas de E con origen el punto P_0 si el conjunto de vectores $\{\vec{P_0P_1}, \dots, \vec{P_0P_n}\}$ es una base de V. Se dice que el sistema de referencia es rectangular o ortonormal si $\{\vec{P_0P_1}, \dots, \vec{P_0P_n}\}$ es una base ortonormal con el producto escalar usual de $\mathbb{R}^n$.
2. Dado un punto $P \in E$ y un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$, se llaman coordenadas de P en $\mathcal{R}$ a las coordenadas del vector $\vec{P_0P}$ en la base $\mathcal{B} = \{\vec{P_0P_1}, \dots, \vec{P_0P_n}\}$.
3. El sistema de referencia $\mathcal{R}_c = \{P_0; \vec{e_1}, \cdots, \vec{e_n}\}$ recibe el nombre de sistema de referencia canónico.

También llamaremos sistema de referencia al conjunto $\{P_0; \vec{P_0P_1}, \cdots, \vec{P_0P_n}\}$. Claramente todo sistema de referencia el origen tiene coordenadas $(0, \cdots, 0)$.
Igual que analizamos la relación de las coordenadas de un vector con respecto a dos bases, aquí estudiamos la relación que existe entre las coordenadas de un punto respecto a sistema de referencia distintos, para obtener la ecuación matricial de un cambio de sistema de referencia.
Si $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \cdots, P_n\}$ y $\mathcal{R}' = \{Q_0, Q_1, \cdots, Q_n\}$ son dos sistemas de referencia de E, y $P \in E$ tiene coordenadas $(x_1, \cdots, x_n)$ respecto $\mathcal{R}$ y coordenadas $(y_1, \cdots, y_n)$ respecto $\mathcal{R}'$, ¿qué relación hay entre ambas?.
Se tiene que $\vec{P_0P} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{P_0P_i}$ y $\vec{Q_0P} = \sum_{i=1}^n y_i \vec{Q_0Q_i}$.
Supuesto que las coordenadas de P_0 en $\mathcal{R}'$ son $(a_1, \cdots, a_n)$, y que las coordenadas del vector $\vec{P_0P_i}$ $i = 1, \cdots, n$ respecto de la base $\{\vec{Q_0Q_1}, \cdots, \vec{Q_0Q_n}\}$ son $(a_{1i}, \cdots, a_{ni})$, se tiene

$$\vec{Q_0P} = \vec{Q_0P_0} + \vec{P_0P} = \sum_{i=1}^n a_i \vec{Q_0Q_i} + \sum_{i=1}^n x_i \vec{P_0P_i} = \sum_{i=1}^n a_i \vec{Q_0Q_i} + \sum_{i=1}^n x_i (\sum_{j=1}^n a_{ji} \vec{Q_0Q_j}) =$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i \vec{Q_0Q_i} + \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n x_i a_{ji}) \vec{Q_0Q_j} = \sum_{i=1}^n (a_i + \sum_{j=1}^n x_i a_{ji}) \vec{Q_0Q_j}$$

Puesto que las coordenadas de un vector respecto de una base son únicas, tenemos que

$$y_i = a_i + \sum_{j=1}^n x_i a_{ji}$$

para $i = 1, \cdots, n$. Ese conjunto de relaciones puede expresarse matricialmente de la forma:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

o también lo podemos escribir de la forma:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & a_n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

expresión que recibe el nombre de ecuación matricial del cambio de sistema de referencia.

Ejemplo 5.8
La relación descrita por la expresión anterior es tratada también en los siguientes ejemplos.

- En $E = \mathbb{R}^2$ se considera el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{P_0(1,2), P_1(2,3), P_2(1,4)\}$.

  Las coordenadas del punto P_1 en el sistema de refencia $\mathcal{R}$ son $(1,0)$. El origen del sistema de refencia canónico tiene coordenadas $(-1,-2)$ en $\mathcal{R}$.

  Si P es un punto de coordenadas (x,y) según el sistema canónico, sus coordenadas (x', y') en el sistema $\mathcal{R}$ vienen dadas por

  $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

  o también por

  $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

  ya que $\vec{P_0P_1} = (1,1)$ y $\vec{P_0P_2} = (0,2)$. Por otro lado, observar que no es un sistema de referencia rectangular, puesto que la base $(1,1), (0,2)$ no es ortonormal.

- En $E = \mathbb{R}^2$ se consideran los sistemas de referencia $\mathcal{R} = \{P_0(1,2), P_1(2,3), P_2(1,4)\}$ y $\mathcal{R}' = \{Q_0(1,1), Q_1(-1,-1), Q_2(2,0)\}$. El sistema $\mathcal{R}$ tiene asociada la base $\mathcal{B} = \{\vec{P_0P_1} = (1,1), \vec{P_0P_2} = (0,2)\}$ y el sistema $\mathcal{R}'$ tiene asociada la base $\mathcal{B}' = \{\vec{Q_0Q_1} = (-2,-2), \vec{Q_0Q_2} = (1,-1)\}$. Por tanto la matriz asociada al cambio de base que expresa $\mathcal{B}$ en función de $\mathcal{B}'$ es $\begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

  Como $\vec{Q_0P_0} = (0,1) = -\frac{1}{4}(\vec{Q_0Q_1}) - 1/2\vec{Q_0Q_2})$, las coordenadas de P_0 en $\mathcal{R}'$ son $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$.

  Se tiene entonces que si un punto P tiene coordenadas (x,y) en función del sistema de referencia $\mathcal{R}$, las coordenadas (x', y') de ese punto en el sistema $\mathcal{R}'$ vendrán dadas por

  $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

  ¿Cuáles son las coordenadas en $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ del punto P de coordenadas $(2,3)$ en el sistema de referencia canónico?.

5.4.2. Variedades afines o subespacio afín

En geometría elemental, los subespacios o variades afines son rectas y planos. La recta definida por un vector no nulo y el plano por dos vectores linealmente independientes.

Definición 5.7 *Sea el espacio afín $E = \mathbb{R}^n$ asociado al espacio vectorial V. Dados un punto $P \in E$ y un subespacio vectorial U de V, se llama variedad afín lineal E' de E que pasa por P y tiene dirección U (o subespacio vectorial asociado U) al conjunto de puntos*

$$E' = P + U = \{P + u, /u \in U\} = \{Q \in E/\vec{PQ} \in U\}$$

Si $\dim U = m$*, se dice que E' tiene dimensión m y escribiremos* $\dim E' = m$*. A menudo, el subespacio vectorial U asociado a la variedad afín E le denotaremos por $W(E)$, es decir, $U = W(E)$*

5.4.3. Rectas, planos e hiperplanos

Un subespacio afín E' de $\mathbb{R}^n$ es llamado recta, plano o hiperplano cuando $\dim E'$ es respectivamente 1, 2 o $n - 1$.

Rectas en $\mathbb{R}^3$
Una recta r es un subespacio afín de dimensión uno. Dado un vector v no nulo, cada uno de los puntos de una recta r en $\mathbb{R}^3$ que pasa por un punto P y tiene dirección $< v >$, es de la forma $P + \lambda v$, para algún valor real de λ, y al variar λ vamos recorriendo todos los puntos de la recta. Esta manera de describir la recta es lo que llamaremos una *parametrización* El parámetro es λ, y la parametrización establece una correspondencia uno a uno entre los números reales y la recta. Podemos enfatizar aún más este punto de vista escribiendo cada punto Q de la recta en la forma

$$Q(\lambda) = P + \lambda v, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Como $v \neq 0$ esta expresión define una función

$$\begin{array}{rcrcl} Q & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3, \\ & & \lambda & \mapsto & P + \lambda v, \end{array}$$

inyectiva, cuya imagen es la recta r.
Quizás la analogía más clara para esta descripción de la recta es la del movimiento con una velocidad uniforme v no nula. Si pensamos que el parámetro λ representa el tiempo t, entonces la fórmula $P+\lambda v$ nos dice cuál es la posición en el instante $t = \lambda$ de un punto móvil que se desplaza con una velocidad constante v y que en el instante $t = 0$ ocupaba (u ocupará, no tenemós por qué pensar que $\lambda > 0$ ni que el tiempo cero está en el pasado) la posición P del espacio. La recta está entonces formada por todos los puntos por los que el punto pasa cuando λ varía entre $-\infty$ y $+\infty$. Una misma recta puede admitir varias parametrizaciones, de la misma forma que una trayectoria dada puede ser recorrida de infinidad de maneras diferentes.
El problema de saber si un punto $Q = (x, y, z)$ está en la recta r que queda definida por las ecuaciones paramétricas puede resolverse para cada punto, buscando si existe o no existe un valor de λ que las satisfaga. Resolver un sistema de tres ecuaciones con una única incógnita, como lo ilustra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.9 *Determinemos cuál de los puntos $P = (1,1,1)$ y $Q = (2,-1,2)$ está en la recta r definida por*

$$\begin{cases} x = 1+\lambda, \\ y = 2-3\lambda, \\ z = 3-\lambda. \end{cases}$$

Intentamos ver entonces si existe un valor de λ que satisfaga

$$\begin{cases} 1 = 1+\lambda, \\ 1 = 2-3\lambda, \\ 1 = 3-\lambda. \end{cases}$$

Es fácil ver que la primera ecuación implicar $\lambda = 0$, que no satisface ni la segunda ni la tercera. Por lo tanto el punto P no está en r. En cuanto a Q, rápidamente concluimos que es el punto que corresponde a hacer $\lambda = 1$ en las ecuaciones paramétricas de r.

Pero en vez de hacer los cálculos cada vez podemos buscar una condición explícita sobre (x,y,z) que nos permita saber si un punto genérico (x,y,z) está o no está en la recta.

Ejemplo 5.10 *Determinar que condición debe satisfacer un punto $P = (x,y,z)$ para pertenecer a la recta r del ejemplo anterior. Se trata de ver entonces si existe un valor de λ que satisfaga*

$$\begin{cases} x = 1+\lambda, \\ y = 2-3\lambda, \\ z = 3-\lambda. \end{cases}$$

Tenemos que estudiar este sencillo sistema de tres ecuaciones con una incógnita λ. Lo escribimos en la forma habitual para los sistemas, como

$$\begin{cases} \lambda = x-1, \\ -3\lambda = y-2, \\ -\lambda = z-3, \end{cases}$$

que tiene una forma escalonada

$$\begin{cases} \lambda = x-1, \\ 0 = 3x+y-5, \\ 0 = x+z-4. \end{cases}$$

La conclusión es que el sistema es compatible si y sólo si se satisface el par de ecuaciones $3x+y-5=0$, $x+z-4=0$. En otras palabras la recta r es el conjunto

$$r = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 3x+y-5=0,\ x+z-4=0\}$$

El par de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x+y-5=0, \\ x+z-4=0, \end{cases}$$

a las que llamaremos *ecuaciones implícitas* es otra manera de especificar la recta. Esto es completamente general y cualquier recta en $\mathbb{R}^3$ puede describirse como el conjunto de puntos (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ que satisfacen un sistema formado por dos ecuaciones lineales independientes.

Planos en $\mathbb{R}^3$

Introduciremos ahora los *planos* en $\mathbb{R}^3$. Las ideas son muy similares a las de la sección dedicadas a las rectas, pero la diferencia es que los planos son variedades afines de dimensión dos. Quedarán especificados entonces por un punto P y dos vectores u y v linealmente independientes, o por tres puntos P, Q y R que no estén alineados, es decir que no estén contenidos en una recta. Esta segunda manera de determinar un plano se reduce en realidad a la primera, porque podemos basarnos en el punto P y los dos vectores $u = \vec{PQ}$, $v = \vec{PR}$, que son linealmente independientes si P, Q y R no están alineados.
Entonces, un plano π quedará completamente especificado si damos un punto $P = (p_1, p_2, p_3)$ contenido en π, y dos vectores $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ linealmente independientes. Cualquier otro punto $Q \in \pi$ estará caracterizado por la propiedad que el vector $\vec{PQ}$ puede escribirse como una combinación lineal de los vectores u y v.

$$\pi = \{P + \lambda u + \nu v;\ \lambda, \nu \in \mathbb{R}\}$$

Es decir, la dirección o el subespacio asociado al plano π es $< u, v >$.
Esta definición también da lugar a ecuaciones paramétricas para el plano π, de la forma

$$\left\{\begin{array}{l} x = p_1 + \lambda u_1 + \nu v_1 \\ y = p_2 + \lambda u_2 + \nu v_2 \\ z = p_3 + \lambda u_3 + \nu v_3. \end{array}\right. \tag{5.1}$$

Ejemplo 5.11 *Por ejemplo el plano π que pasa por el punto $P = (1, -1, 0)$ y tiene dirección el subespacio vectorial generado por los vectores $u = (1, 3, 0)$ y $v = (-2, 0, 1)$, tiene por ecuaciones paramétricas:*

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + \lambda - 2\nu, \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 0 + \nu \end{array}\right. \tag{5.2}$$

Eliminando los parámetros, obtenemos las ecuaciones implícitas del plano:

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 3x - y + 6z - 4 = 0\}$$

La ecuación

$$\{\ 3x - y + 6z - 4 = 0$$

Ejercicio 5.4.1 *1. En $\mathbb{R}^3$ consideramos el punto $P = (1, 2, 3)$ y sea U el subespacio generado por los vectores $v = (1, 0, 1)$ y $w = (1, 1, 1)$.*

i) Da las ecuaciones paramétricas del subespacio afín E que pasa por P y que tiene a U como subespacio vectorial asociado.

ii) Da una recta afín que verifique en cada caso una de las condiciones siguientes:

- *Pasa por P y está contenida en E*
- *Está contenida en E pero no pasa por P*
- *Pasa por P y no está contenida en E*
- *Tiene un solo punto en común con E y es distinto de P*
- *No tiene ningún punto en común con E*

2. En $\mathbb{R}^3$ consideramos dos rectas afines r y r'.

i) Si existe un plano que contiene a ambas, ¿qué puede decirse de la posición relativa de dichas rectas?. Justifica tu respuesta.

ii) Da una recta afín r que pase por el punto $(1, 1, 1)$ y una recta s que pase por el $(1, 0, -1)$ para las cuáles no exista un plano que contenga a ambas rectas a la vez.

5.4.4. Aplicaciones Afines

Este apartado vamos a dedicarlo al estudio de las aplicaciones propias de la estructura afín, las aplicaciones afines.

Definición 5.8
Una aplicación $f : E = \mathbb{R}^n \to E = \mathbb{R}^n$ es afín, si existe un punto P, para el cuál la aplicación

$$\phi_P : V = \mathbb{R}^n \to V = \mathbb{R}^n$$
$$v = \vec{PQ} \to \phi_P(v) = f(P)\vec{f}(Q)$$

es lineal. La aplicación $\phi_P = \phi$ se denomina aplicación lineal asociada a f. Se dice que es una transformación afín si es f biyectiva, o equivalentemente, si la aplicación lineal asociada es un isomorfismo.

Para conocer si una aplicación es afín o no, considerar como origen de cualquier vector el punto $P_0 = (0, 0, \cdots, 0)$ y estudiar la linealidad o no de la aplicación $\phi_{P_0} = \phi$

Ejemplo 5.12
Los siguientes ejemplos muestran algunas aplicaciones afines, y otras que no lo son.

- La aplicación $f : E = \mathbb{R}^2 \to E = \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (5x+2, x-y+2)$ es afín.
- La aplicación $g : E = \mathbb{R}^2 \to E = \mathbb{R}^2$ definida por $g(x, y) = (5x^2, x-y+2)$ no es afín.
- La aplicación $h : E = \mathbb{R}^2 \to E = \mathbb{R}^2$ definida por $h(x, y) = (5x + 2, 5y - 3)$ es afín.
- La aplicación $k : E = \mathbb{R}^2 \to E = \mathbb{R}^2$ definida por $k(x, y) = (\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y - 2, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y)$ es afín.
- La aplicación $l : E = \mathbb{R}^2 \to E = \mathbb{R}^2$ definida por $l(x, y) = (x - 3, y + 6)$ es afín.

  Obsérvese que en todos los casos, si $P' = (x', y')$ es la imagen del punto $P = (x, y)$ entonces se puede establecer una igualdad del tipo

  $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

  En la igualdad anterior la matriz (a_{ij}) puede considerarse, en cada caso, la de la aplicación lineal asociada respecto de la base canónica.

- Sea r la recta afín de ecuación $2x - y = 3$, y sea m la aplicación de $X = \mathbb{R}^2$ en $X = \mathbb{R}^2$ definida por $m(P) = P'$ donde P' es el punto de intersección de la recta r con la recta que pasa por P y tiene por vector director $v = (1, 1)$. Tal aplicación es afín.

  Basta ver que si $P = (x, y)$ y $P' = (x', y')$ entonces se tiene una relación matricial como la descrita anteriormente, donde la aplicación lineal asociada está determinada por la matriz (a_{ij})

- Sea r la recta afín de ecuación $2x-y = 3$, y sea n la aplicación de $E = \mathbb{R}^2$ en $E = \mathbb{R}^2$ definida por $n(P) = P$" donde P" está determinado por la condición $P\vec{P}" = 2P\vec{P}'$, donde P' es la imagen de P por la aplicación m anterior. Un método análogo al señalado para m prueba que n es afín.

Determinación de una aplicación afín

Supongamos que en el espacio afín $E = \mathbb{R}^n$ tenemos el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \cdots, P_n\}$, y que $f : E \to E$ es una aplicación afín de la que conocemos las imágenes por f de los puntos del sistema de referencia $\mathcal{R}$.

Sea P un punto cualquiera de E. Por la definición de aplicación lineal asociada a una aplicación afín se tiene que $f(P_0)\vec{f}(P) = \phi(P_0\vec{P})$. Por ello, si $(x_1, \cdots, x_n)$ son las coordenadas de P, $(x_1', \cdots, x_n')$ son las coordenadas de $f(P)$, y $(a_1, \cdots, a_n)$ son las de $f(P_0)$ (todas ellas referidas al sistema de referencia $\mathcal{R}$) podemos establecer la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + M_{\mathcal{B}}(\phi) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

denominada ecuación matricial de la aplicación afín f respecto del sistema de refencia $\mathcal{R}$.

Distancia entre puntos. Movimientos

Puesto que $V = \mathbb{R}^n$ tenemos un producto escalar que nos permite definir norma de un vector, concepto que vamos a emplear para definir distancia entre dos puntos de E.

Definición 5.9

Dados dos puntos $P, Q \in E$, se define distancia de P a Q como el número $d(P,Q) = \|\vec{PQ}\|$.

Observar que la distancia es una aplicación $d : E \times E \to \mathbb{R}$

Proposición 5.6

Algunas de las propiedades de la distancia son las siguientes. Sean $P, Q, R \in E$ puntos cualesquiera, se verifica

1. $d(P,Q) \geq 0$, $d(P,Q) = d(Q,P)$
2. $d(P,Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$
3. $d(P,R) \leq d(P,Q) + d(Q,R)$ DESIGUALDAD TRIANGULAR

Definición 5.10

El espacio afín $E = \mathbb{R}^n$ junto con la distancia definida anteriormente recibe el nombre de espacio afín euclídeo.

En el espacio afín euclídeo $E = \mathbb{R}^n$ se consideran aquellas aplicaciones afines que son biyectivas (transformaciones afines). Entre dichas aplicaciones vamos a seleccionar áquellas que conservan las distancias.

Definición 5.11

1. *Una transformación afín f se dice que conserva las distancias si $\forall P, Q, \in E$ se verifica que $d(f(P), f(Q)) = d(P,Q)$.*
2. *Una transformación afín que conserva las distancias se dice que es un movimiento.*

En la definición de movimiento se exige que la aplicación sea biyectiva, condición innecesaria puesto que el hecho de conservar distancias conduce a la biyectividad. Es un ejercicio sencillo el probar que por un movimiento rectas se transforman en rectas, una circunferencia de radio r se transforma en otra circunferencia de radio, también $r \cdots$

5.4.5. Aplicaciones afines particulares

Proyecciones

Sea E' un subespacio afín de $E = \mathbb{R}^n$ de dirección U. Denotemos por W un subespacio de $V = \mathbb{R}^n$ tal que $V = U \oplus W$.
Si M es un punto cualquiera de E, y $M + W$ es el subespacio afín que pasa por M y tiene dirección W, se verifica que la intersección de los subespacios E' y $M + W$ es no vacia y se reduce a un punto:
Si Q es un punto cualquiera de E', el vector $\vec{QM}$ se escribe de forma única como $\vec{QM} = u + w$ con $u \in U$, $w \in W$. Por tanto existe un único punto $M' \in E'$ tal que $u = \vec{QM'}$, deduciéndose que $w = \vec{M'M} \in W$ y $M' \in M + W$. Como M' es único en E' con esa condición, $\{M'\} = E' \cap (M + W)$.

Definición 5.12
Con la notación anterior, definimos

$$p_{E',W} : E \longrightarrow E$$

$$M \to M'$$

La aplicación $\phi_M : V \longrightarrow V$ *que a cada vector* $v = \vec{MN}$ *le asocia el vector* $v' = \vec{M'N'}$ *(*$M' = p_{E',W}(M)$*,* $N' = p_{E',W}(N)$*) coincide con la proyección vectorial de base* U *y dirección* W*. La aplicación* $p_{E',W} : E \longrightarrow E$ *es por tanto afín, cuya aplicación lineal asociada es* $p_{U,W}$ *y recibe el nombre de proyección (afín) de base* E' *en la dirección* W*.*

Observar que la proyección anterior deja fijos los puntos de la base, esto es si $M \in E'$ entonces $p_{E',W}(M) = M$. Como hay puntos fuera de E' que también tienen por imagen M, no es una transformación, y tampoco movimiento, puesto que no es inyectiva. Además $p^2_{E',W} = p_{E',W}$.

Ejemplo 5.13
En $E = \mathbb{R}^2$ se considera el subespacio afín $E' = \{(x, y) \in E/x + 2y = 1\}$. Se tiene entonces que $U =< (-2, 1) >$, y consideramos como subespacio $W =< (1, 1) >$. ¿Cuál es la imagen del punto $M(7, 0)$ por $p_{E',W}$?.
La recta que pasa por M y tiene la dirección de W es la de ecuación $x-y = 7$. La intersección de dicha recta con E' es el punto $M'(5, -2)$. Tal punto es la imagen de M.

Simetrías

Como en el caso de las proyecciones, E' es un subespacio afín de E con subespacio asociado U y W un subespacio suplementario a U. Definimos la siguiente aplicación

$$s_{E',W} : E \longrightarrow E$$

$$M \to M"$$

donde $M"$ es el punto de E tal que $\vec{MM"} = 2\vec{MM'}$ siendo $M' = p_{E',W}(M)$

Definición 5.13
La aplicación $\phi_M : V \longrightarrow V$ que a cada vector $v = \vec{MN}$ le asocia el vector $v" = \vec{M"N"}$ ($M" = s_{E',W}(M)$, $N" = s_{E',W}(N)$) coincide con el endomorfismo de V $p_{U,W} - p_{W,U}$. La aplicación $s_{E',W} : E \longrightarrow E$ es por tanto afín y recibe el nombre de simetría (afín) de base E' en la dirección W.

Se tiene lo siguiente:

- La simetría anterior solo deja fijos los puntos de la base, esto es si $M \in E'$ entonces $s_{E',W}(M) = M$.
- $s^2_{E',W} = I_E$, es decir, es una aplicación que al cuadrado es la identidad. Luego es una transformación, que en general no es movimiento.
- En el caso en que una simetría afín tenga como base una variedad afín cuya dirección sea perpendicular a la dirección de la simetría, es un movimiento.

Definición 5.14
La simetría afín $s_{E',U^\perp}$ recibe el nombre de simetría ortogonal del espacio afín E. Como la variedad afín E' determina U y $U^\perp$, dicho movimiento se denota por s'_E.

Ejemplo 5.14
En $E = \mathbb{R}^2$ se considera el subespacio afín $E' = \{(x, y) \in E / x + 2y = 1\}$. Se tiene entonces que $U =< (-2, 1) >$, y consideramos como subespacio $W =< (1, 1) >$. La imagen del punto $M(7, 0)$ por $p_{E',W}$ es $M'(5, -2)$, por tanto la imagen de M por $s_{E',W}$ es $M"(3, -4)$. ¿Cuál es la imagen de M por la simetría ortogonal s'_E?.

Traslaciones

En este apartado veremos que a cada vector (fijo) v de $V = \mathbb{R}^n$ le asociamos una aplicación afín de $E = \mathbb{R}^n$ que a transforma cada punto de E, en la dirección y sentido que indica v, la longitud dada por su módulo.

Definición 5.15
Dado un vector $v \in V$, se define $t_v : E \to E$ como la aplicación que a cada punto P le asigna el punto P' tal que $\vec{PP'} = v$. La aplicación t_v anterior recibe el nombre de traslación de vector v.

Se tienen las siguiente propiedades:

1. Toda traslación es un movimiento.
2. La traslación $t_{\vec{0}}$ es la aplicación identidad, y cualquier otra traslación t_v con $v \neq \vec{0}$ no deja puntos fijos.
3. El vector de una traslación queda determinado por un punto y su imagen.
4. Una aplicación afín definida en E es una traslación si y sólo si la aplicación lineal asociada es la identidad en V.

Ejemplo 5.15

- Si r es una recta afín cuya dirección viene determinada por el vector v, se tiene que $t_v(r) = r$. Si r es una recta cuya dirección es independiente de v, $t_v(r)$ es una recta distinta de r pero de su misma dirección.

  Por una traslación una recta se transforma entonces en una recta paralela a ella.

- Si en $E = \mathbb{R}^2$ consideramos la traslación de vector $v(2, -1)$, la recta r de ecuación $x - 2y = 1$ se trasforma en la recta r' de ecuación $x - 2y = 5$.

- Obsérvese que la composición de dos traslaciones es otra traslación de vector la suma de los vectores, lo que garantiza a su vez que la composición de traslaciones es conmutativa: $t_v \circ t_w = t_{w+v} = t_{v+w} = t_w \circ t_v$.

  También es consecuencia de lo anterior que $t_v^{-1} = t_{-v}$.

  ¿Puedes realizar una gráfica que ilustre lo que sucede cuando se realiza la composición de dos traslaciones?.

Homotecias

En este punto se trata el estudio de un tipo de afinidades biyectivas que no conservando las distancias conservan la "forma". Las homotecias son transformaciones que conservan los ángulos y la razón entre longitudes.

Definición 5.16
Sea C un punto fijo de $E = \mathbb{R}^n$ y $\alpha \neq 0$ un número real cualquiera. Se llama homotecia de centro C y razón α, que representamos por $h_{C,\alpha}$, a la aplicación

$$h_{C,\alpha} : E \to E$$

$$C \to C$$

$$P \neq C \to P'$$

siendo P' el punto tal que $\vec{CP'} = \alpha\vec{CP}$. Se tiene que la aplicación $\phi_C : V = \mathbb{R}^n \to V = \mathbb{R}^n$ que a cada vector $v = \vec{CP}$ le asocia el vector $v' = \vec{CP'}$ donde $P' = h_{C,\alpha}(P)$ $(C = h_{C,\alpha}(C))$, se tiene que $\phi_C(v) = v' = \alpha v$. Por tanto $\phi_C = \alpha \cdot \mathbb{I}_{\mathbb{R}^n}$, que es lineal, por lo tanto $h_{C,\alpha}$ es una aplicación afín.

En las condiciones de la definición anterior, se verifica

1. $h_{C,\alpha}$ es biyectiva.

2. $h_{C,\alpha}$ conserva las distancias si y sólo si $\alpha = \pm 1$. Si la razón es 1, la homotecia es la aplicación identidad (y recíprocamente).

3. Por una homotecia distinta de la identidad, el único punto fijo que resulta es el centro de la homotecia.

4. Si f es una aplicación afín definida en $E = \mathbb{R}^n$ cuya aplicación lineal asociada es $\alpha\mathbb{I}_{V=\mathbb{R}^n}$ con $\alpha \neq 0, 1$, f es entonces una homotecia de razón α y de centro el punto C de coordenadas $(\frac{a_1}{1-\alpha}, \cdots, \frac{a_n}{1-\alpha})$, siendo $(a_1, \cdots, a_n)$ las coordenadas del punto imagen del origen del sistema de referencia.

5. La composición de dos homotecias es una homotecia o una traslación, y la composición de una traslación con una homotecia (no identidad) es una homotecia.

Ejemplo 5.16
En el plano afín $E = \mathbb{R}^2$ se consideran las homotecias $h_{C,\sqrt{2}}$ y $h_{C,\frac{3}{2}}$ con $C(1,-2)$. Es fácil comprobar que si $P(3,2)$, la imagen de P por la primera de las homotecias es un punto cuyas coordenadas no son enteras. ¿Podrías realizar una representación gráfica de lo que sucede?. El punto $P' = h_{C,\frac{3}{2}}(P)$ tiene coordenadas enteras y son $(4,4)$.
¿Podrías decir para qué valores de α el transformado de $P(3,2)$ por $h_{C,\alpha}$ tiene coordenadas enteras?.

Giros en $X = \mathbb{R}^2$

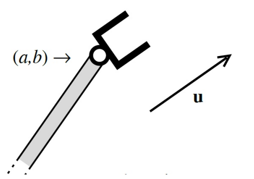
La mayor complejidad del estudio de los giros desaconseja, en parte, su tratamiento en el caso general. Debido a esto se ha optado por el estudio de los mismos en el espacio afín de dimensión 2 y que será utilizado en la siguiente sección sobre las ecuaciones cinematicas de un robot en el plano.
Sea $f : E = \mathbb{R}^2 \to E = \mathbb{R}^2$ la aplicación afín que viene dada por la ecuación matricial siguiente (respecto del sistema de referencia canónico).

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

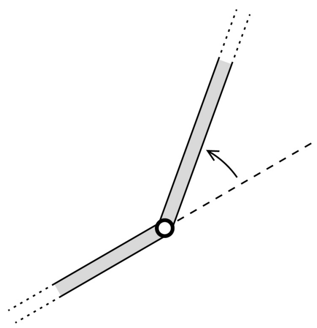
con $0 < \theta < 2\Pi$.
Respecto de f podemos decir que, es movimiento, puesto que la aplicación lineal asociada a f es una rotación vectorial de ángulo θ.

5.4.6. La cinemática directa de un robot en el plano

La cinemática del robot consiste en estudiar su movimiento con respecto a un sistema de referencia que determina las relaciones entre la posición y orientación del extremo del robot y los valores de sus coordenadas articulares. Para tratar el espacio de las configuraciones de un robot de forma geométrica, necesitamos hacer algunas simplificaciones sobre los componentes de nuestros robots y sus propiedades mecánicas. No trataremos de abordar problemas importantes en la ingeniería de robots industriales, como qué tipos de motores y enlaces mecánicos se usarían para lograr qué movimientos, y cómo esos movimientos serían controlados, etc. Nos restringirnos a robots idealizados y, solamente los estudiaremos en el plano real $\mathbb{R}^2$.
La cinemática directa se refiere al uso de ecuaciones para el cálculo de la posición de la **mano** en un robot articulado a partir de los ángulos y/o desplazamientos de las **articulaciones**



Mano del Robot



Articulación

Nuestro robot tendrá un primer segmento anclado o fijo en su posición base. En otras palabras, no hay articulación móvil en el punto final inicial del **Segmento o brazo** 1. Con esta convención, usaremos un sistema de coordenadas rectangulares en el plano para describir la posición y orientación de la mano. El origen de este sistema de coordenadas se coloca en la articulación 1 del brazo del robot, ver Figura 6.1.

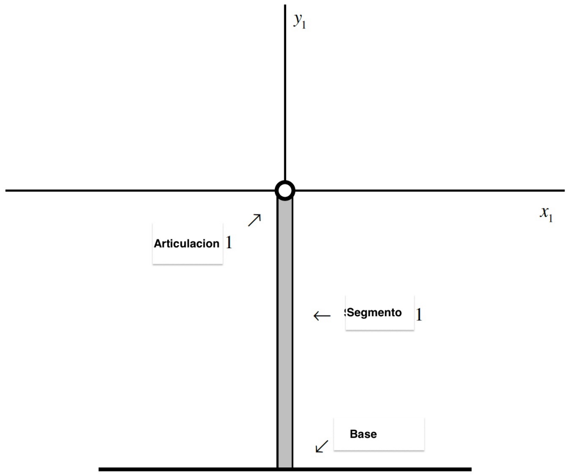


Figura 5.1: Sistema global de coordenadas (x_1, y_1)

Además del sistema de coordenadas global (x_1, y_1), presentamos un sistema local de coordenadas en cada una de las articulaciones para describir las posiciones relativas de la segmentos/brazos que se juntan en esa articulación. Naturalmente, estos sistemas de coordenadas cambiarán a medida que la posición del brazo varíe. En una articulación i, tenemos un sistema de coordenadas (x_{i+1}, y_{i+1}) de la forma siguiente: el origen se coloca en la articulación i. Entonces el eje y_{i+1} está determina un sistema de coordenadas rectangulares. Se observa que para cada $i > 1$, las coordenadas (x_i, y_i) de la articulación i son $(l_i, 0)$, donde l_i es la longitud de segmento i.
Nuestro primer objetivo es relacionar las coordenadas en el sistema determinado por los ejes (x_{i+1}, y_{i+1}) de un punto con las coordenadas del punto en el sistema determinado por los ejes (x_i, y_i). Sea θ_i el ángulo en sentido contrario a las agujas del reloj del eje x_i al eje x_{i+1}. En la figura de arriba 5.2, vemos que si un punto Q tiene coordenadas con respecto al sistema (x_{i+1}, y_{i+1}),

$$Q = (a_{i+1}, b_{i+1}),$$

para obtener las coordenadas de Q en el sistema de referencia (x_i, y_i):

$$Q = (a_i, b_i),$$

giramos el ángulo θ_i

$$\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_i \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\operatorname{sen}\theta_i \\ \operatorname{sen}\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i+1} \\ b_{i+1} \end{pmatrix}$$

También, lo podemos escribir como :

$$\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\operatorname{sen}\theta_i & l_i \\ \operatorname{sen}\theta_i & \cos\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i+1} \\ b_{i+1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

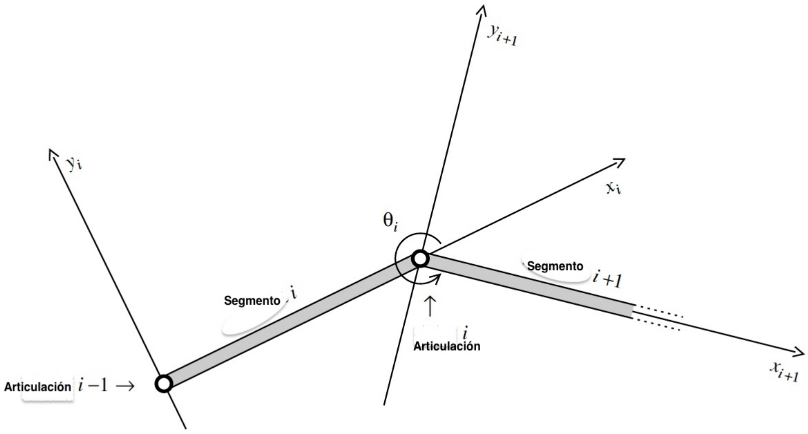


Figura 5.2: Junta de Robot.

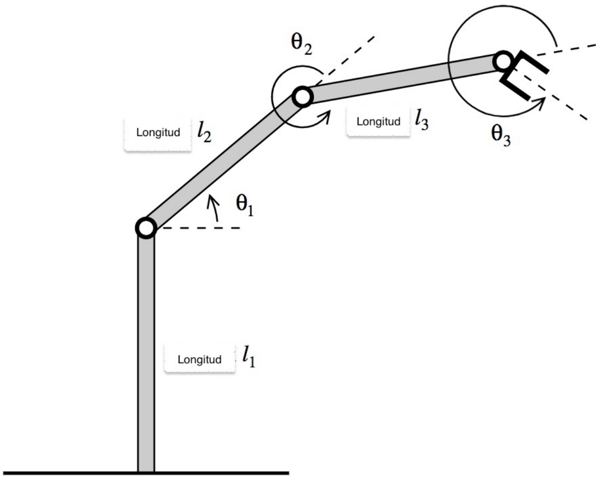


Figura 5.3: Robot con tres articulaciones.

Ejemplo 5.17 *Consideremos un robot con tres articulaciones, ver 5.3. Suponemos que la mano como el segmento 4, que está conectado a través de la articulación 3 al segmento 3. Como antes, l_i indicará la longitud del segmento i. Tenemos*

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\operatorname{sen}\theta_i & l_i \\ \operatorname{sen}\theta_i & \cos\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = 2, 3$$

puesto que el origen del sistema de referencia (x_2, y_2) se coloca en la articulación 1. También tenemos que las matrices A_2 y A_3 como antes. La clave es que las coordenadas globales de cualquier punto se puede obtener comenzando en el sistema de referencia (x_4, y_4) y trabajando nuestro camino de regreso al sistema global (x_1, y_1) una articulación a la vez. Es decir, multiplicamos el (x_4, y_4) vector de coordenadas del punto A_3, A_2, A_1

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = A_1 A_2 A_3 \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

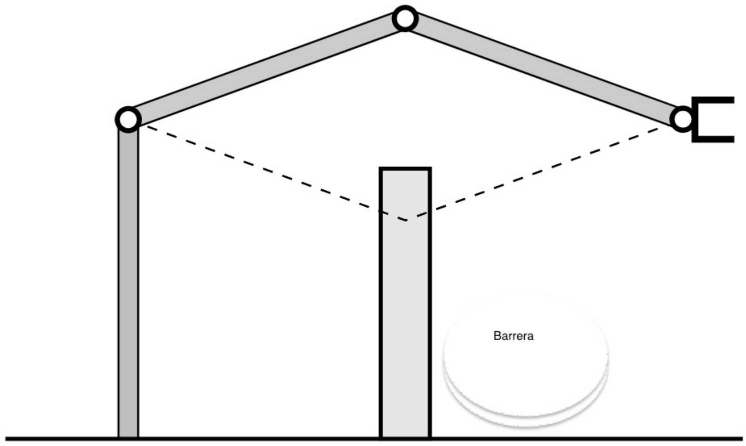


Figura 5.4: Barrera de Robot.

Usando las fórmulas de trigonometría, podemos escribir la ecuación de arriba como:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & -\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & l_3\cos(\theta_1+\theta_2)+l_2\cos\theta_1 \\ \sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & \cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & l_3\sin(\theta_1+\theta_2)+l_2\sin\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Puesto que las coordenadas (x_4, y_4) de la mano del robot son $(0,0)$ en la articulación 3, desarrollando la expresión matricial con $x_4 = y_4 = 0$, obtenemos las **ecuaciones cinemáticas** *del robot:*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_3\cos(\theta_1+\theta_2)+l_2\cos\theta_1 \\ l_3\sin(\theta_1+\theta_2)+l_2\sin\theta_1 \end{pmatrix}$$

Nota El número de articulaciones es importante para abordar situaciones geométricas más complicadas como ilustra 5.4

5.5. Ejercicios propuestos sobre Geometría Euclídea

1. En $\mathbb{R}^5$ se tiene definido el producto interior habitual y se considera el subespacio

$$W = \big\langle (1,2,3,-1,-2),(2,4,7,2,-1) \big\rangle$$

   i) Determina el conjunto $W^{\perp}$ de vectores de $\mathbb{R}^5$ ortogonales a todos los de W, y demuestra que es un subespacio de $\mathbb{R}^5$. ¿Quiénes son $W \cap W^{\perp}$ y $W + W^{\perp}$?.

   ii) Calcula bases ortonormales para W y para su complemento ortogonal $W^{\perp}$.

2. En $\mathbb{R}^3$ con el producto interior habitual se consideran los vectores $v = (1,0,1)$, $w = (1,2,0)$ y $u = (0,2,3)$.

   i) Halla, a partir de los vectores anteriores, una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ aplicando el procedimiento de Gram-Schmidt.

   ii) Halla una base del complemento ortogonal al subespacio generado por v y u.

   iii) Halla la intersección de los subespacios S y T, donde S es el subespacio ortogonal a los vectores v y u, y T es el subespacio ortogonal a los vectores v y w.

3. Halla una base ortonormal u, v, w de $\mathbb{R}^3$ tal que el subespacio generado por u y v esté contenido en el plano $x + y + z = 0$, y el generado por u y w lo esté en el plano $2x - y - z = 0$.

4. Demuestra que los vectores de $\mathbb{R}^4$: $u = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ y $v = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ son ortonormales y halla una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$ que incluya los vectores anteriores.

5. ¿Son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones?.

   i) Si P y Q son matrices ortogonales de orden $n \times n$, entonces PQ es ortogonal.

   ii) Si P es una matriz ortogonal simétrica, entonces $P^2 = I$.

   iii) Si P es ortogonal, entonces $detP = +1$.

6. Sean u y v dos vectores ortonormales de $\mathbb{R}^n$. Prueba que la norma de $u - v$ es $\sqrt{2}$.

7. Sea A una matriz cuyas columnas forman una base de $\mathbb{R}^3$. Sea B la matriz que tiene por columnas los vectores de $\mathbb{R}^3$ que se obtienen de aplicar Gram-Schmidt a las columnas de A. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?.

   - Las dos primeras columnas de A y las dos primeras columnas de B generan el mismo subespacio de $\mathbb{R}^3$.
   - B es una matriz ortogonal.

8. Demuestra que en $\mathbb{R}^n$:

   a) Para cualquier subespacio S, $(S^{\perp})^{\perp} = S$.

   b) Si S y T son subespacios tales que $S^{\perp} = T^{\perp}$, entonces $S = T$.

   c) Si S y T son subespacios tales que $S \subset T$, entonces $T^{\perp} \subset S^{\perp}$.

9. Demuestra el teorema generalizado de Pitágoras: Sean u y v dos vectores de $\mathbb{R}^n$ ortogonales. Entonces $||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$.

10. En cada uno de los siguientes apartados se da un subespacio U y un vector v de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^4$, y se pide para cada caso:

    i) Calcular $p_U(v)$.

    ii) Hallar una base ortonormal para U.

    iii) Escribir $v = u + u'$ con $u \in U$ y $u' \in U^\perp$.

    a) $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$; $v = (-1, 2)$
    b) $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$; $v = (1, 1)$
    c) $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = 0\}$; $v = (a, b)$ con a o b no nulos
    d) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0\}$; $v = (a, b, c)$ con a, b o c no nulos.
    e) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - 2y + 6z = 0\}$; $v = (3, 1, 4)$
    f) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x/2 = y/3 = z/4\}$; $v = (1, 1, 1)$
    g) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + 3z - t = 0\}$; $v = (1, -1, 2, 3)$
    h) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = y, t = 3y\}$; $v = (-1, 2, 3, 1)$

11. Calcular la factorización QR de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

12. En cada uno de los siguientes casos encuentra la recta que se ajusta mejor a los puntos dados.

    a) $(1, 3)$, $(-2, 4)$, $(7, 0)$
    b) $(-3, 7)$, $(4, 9)$
    b) $(-3, 7)$, $(4, 9)$, $(1, 3)$, $(-2, 4)$

13. En cada uno de los siguientes casos encuentra el mejor ajuste cuadrático para los puntos dados.

    a) $(2, -5)$, $(3, 0)$, $(1, 1)$, $(4, -2)$
    b) $(-7, 3)$, $(2, 8)$, $(1, 5)$

14. Sean u y w dos vectores unitarios de $\mathbb{R}^2$ linealmente independientes. Sea s la simetría ortogonal de eje la recta (vectorial) engendrada por $u + w$. Demuestra que $s(u) = w$.

15. En el espacio vectorial euclídeo $V = \mathbb{R}^3$ se considera el subespacio

$$U = < \{(1, 1, 1), (0, 0, 1)\} >$$

    a) Determina $U^\perp$

    b) Sea $p_U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo que a cada vector $v \in \mathbb{R}^3$ le asocia su proyección ortogonal sobre U, y sea $p_{U^\perp} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo que a cada vector $v \in \mathbb{R}^3$ le asocia su proyección ortogonal sobre $U^\perp$. Hallar los vectores $p_U(v)$ y $p_{U^\perp}(v)$ con $v = (x, y, z)$.

c) Se considera el endomorfismo $\phi = p_U - p_{U^\perp}$ de $V = \mathbb{R}^3$. Comprueba que ϕ es una isometría.

d) Supongamos que $\mathcal{B}^* = \{u_1, u_2, u_3\}$ es una base ortonormal de $V = \mathbb{R}^3$ tal que $\{u_1, u_2\}$ es base de U. ¿Cuál es la matriz asociada a ϕ respecto de la base $\mathcal{B}^*$?.

e) Muestra gráficamente el comportamiento de ϕ.

16. En el espacio vectorial euclídeo $V = \mathbb{R}^2$ se consideran los siguientes endomorfismos ϕ_i, determinados por sus matrices asociadas respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

$$\phi_1 : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \phi_2 : \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \phi_3 : \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \phi_4 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\phi_5 : \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \phi_6 : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \phi_7 : \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \phi_8 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Comprueba que cada uno de los endomorfismos anteriores es una isometría.

b) Determina cuáles de las isometrías anteriores vienen definidas por una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

con $0 \le \theta < 2\pi$.

¿Cuál es el polinomio característico de cada uno de tales endomorfismos?

c) Comprueba que los endomorfismos no considerados en el apartado anterior tienen todos ellos polinomio característico igual a $X^2 - 1$.

Determina para cada uno de ellos una base respecto de la cuál la matriz asociada sea diagonal.

Comprueba que las bases obtenidas son ortogonales.

d) Representa gráficamente el comportamiento de todos los endomorfismos dados.

e) Completa la tabla siguiente donde en cada casilla debe aparece la composición de los dos endomorfismos de la fila y la columna correspondientes, como se indica en los ejemplos:

· en la tercera casilla de la primera fila aparece ϕ_3 porque $\phi_3 = \phi_1 \circ \phi_3$,

· en la sexta casilla de la cuarta fila aparece ϕ_7 porque $\phi_7 = \phi_4 \circ \phi_6$,

· como $\phi_8 = \phi_6 \circ \phi_4 = \phi_3 \circ \phi_7$ aparece en los lugares (6,4) y (3,7) de la tabla, ...

$\circ$	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_6	ϕ_7	ϕ_8
ϕ_1			ϕ_3					
ϕ_2		ϕ_3						
ϕ_3							ϕ_8	
ϕ_4						ϕ_7		
ϕ_5								
ϕ_6				ϕ_8				
ϕ_7								
ϕ_8								ϕ_1

f) Observando la tabla comprueba que $\phi_1 \circ \phi_i = \phi_i \circ \phi_1 = \phi_i$ para $i = 1, 2, ..., 8$. Esto se expresa diciendo que ϕ_1 es el elemento neutro del conjunto $G = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3, ..., \phi_8\}$ con la composición

g) Observando la tabla determina para cada ϕ_i el ϕ_j tal que $\phi_i \circ \phi_j = \phi_j \circ \phi_i = \phi_1$. Esto se expresa diciendo que ϕ_j es el elemento simétrico o inverso de ϕ_i (respecto la composición).

El hecho de que el conjunto G con la composición $\circ$ de aplicaciones goce de las dos últimas propiedades y además de la propiedad asociativa (el producto de matrices es asociatvo) se expresa diciendo que $(G, \circ)$ es un grupo.

h) Mirando la tabla determina tres subconjuntos de G que con la composición tengan estructura de grupo. En este caso se dice que cada uno de esos subconjuntos es un susbgrupo de G.

17. Sean ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3 los endomorfismos de $V = \mathbb{R}^3$ definidos, respecto de la base canónica, por las matrices siguientes.

$$M(\phi_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M(\phi_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad M(\phi_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Demuestra que los endomorfismos ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3 son todos ellos isometrías (o transformaciones ortogonales).

b) Las transformaciones ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3 son simetrías (vectoriales). Señala para cada una de ellas, el plano de vectores fijos (o base de la simetría), así como un vector que se transforme en su opuesto. ¿Qué relación hay entre el plano y el vector?.

c) ¿Qué tipo de isometría es $\phi_1 \cdot \phi_3$?. Señala los elementos que la caracterizan.

d) Sea $U =< e_2, e_3 >$ y ρ la restricción de $\phi_2 \cdot \phi_3$ a U. ¿Qué tipo de isometría es ρ?.

e) ¿Tiene algún vector fijo $\phi_1 \cdot \phi_2 \cdot \phi_3$?.

18. Se consideran las siguientes bases de $V = \mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 1, -1), v_2 = (1, 0, 0), v_3 = (1, -1, 0)\}$$

$$\mathcal{B}_c = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 1), e_3 = (0, 0, 1)\}$$

y la matriz

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Sea ϕ el endomorfismo de $V = \mathbb{R}^3$ definido, respecto de la base $\mathcal{B}$, por la matriz M ($M_{\mathcal{B}}(\phi) = M$), y sea ψ el endomorfismo de $V = \mathbb{R}^3$ definido, respecto de la base $\mathcal{B}_c$, por la matriz M ($M_{\mathcal{B}_c}(\psi) = M$).

a) Demuestra que:
· M es una matriz ortogonal.
· ϕ no es una isometría en $V = \mathbb{R}^3$.
· ψ es una isometría en $V = \mathbb{R}^3$.

b) Suponiendo que ρ es endomorfismo de un espacio vectorial euclídeo V, ¿son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones?
· *Si M es una de las matrices asociadas a ρ, ρ es una isometría si y sólo si M^tM es la matriz identidad*
· *Si M una matriz asociada a ρ respecto de una base ortonormal de V, ρ es una isometría si y sólo si M^tM es la matriz identidad*

c) Demuestra que ψ es una simetría (vectorial), y determina el plano de vectores fijos (base de la simetría).

d) Halla una isometría ρ de $V = \mathbb{R}^3$ tal que $\psi \circ \rho = \varphi$ sea la simetría que tiene como plano de vectores fijos el generado por e_1 y e_2. Dí qué tipo de transformación es ρ y establece los elementos que la caracterizan.

19. Se consideran las isometrías ϕ_1 y ϕ_2 de $V = \mathbb{R}^3$ siguientes

- ϕ_1 es una rotación de eje la recta vectorial $U =< \{e_1 + e_2\} >$ y amplitud $\dfrac{\pi}{3}$.
- ϕ_2 es una simetría ortogonal respecto el plano vectorial $U^\perp$ (con $U =< \{e_1 + e_2\} >$).

a) Escribe las matrices asociadas a ϕ_1 y ϕ_2 respecto de la base canónica de $V = \mathbb{R}^3$.

b) Determina el tipo de isometrías que son $\phi_1 \circ \phi_2$ y $\phi_2 \circ \phi_1$.

c) ¿Las isometrías $\phi_1 \circ \phi_2$ y $\phi_2 \circ \phi_1$ dejan algún vector fijo?.

20. Prueba que cada uno de los conjuntos de puntos siguientes es un sistema de referencia en el espacio afín $\mathbb{R}^3$.

a) $P_0 = (1, 0, -1)$, $P_1 = (1, 1, 0)$, $P_2 = (0, 1, 1)$, $P_3 = (0, 0, 1)$

b) $Q_0 = (-1, 0, 2)$, $Q_1 = (0, 1, -2)$, $Q_2 = (0, 0, 1)$, $Q_3 = (1, 0, -3)$

21. Se considera el espacio afín $\mathbb{R}^3$.

a) Establece la relación existente entre el sistema de referencia canónico de $\mathbb{R}^3$ y cada uno de los sistemas de referencia del ejercicio anterior.

b) Establece la relación existente entre el sistema de referencia $R = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ y $R' = \{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3\}$

c) Sea el punto $P = (1, 2, 3)$ de $\mathbb{R}^3$. Halla las coordenadas de P en los sistemas de referencia R y R'.

22. Sean E_1 y E_2 dos subespacios afines de $\mathbb{R}^n$ con la misma dimensión, y $W(E_1)$ y $W(E_2)$ los subespacios vectoriales asociados. Se dice que E_1 y E_2 son paralelos si $W(E_1) = W(E_2)$.

i) Da ejemplos de rectas en $\mathbb{R}^3$ que sean paralelas.

ii) ¿ Son paralelos los planos de $\mathbb{R}^3$ siguientes?

$$Y : x - y + 2z = 1$$

$$Z : x = 1 - a + 3b$$
$$y = 1 + a + b$$
$$z = 1 + a - b$$

iii) ¿ Son paralelos los planos de $\mathbb{R}^3$ siguientes?

$$Y : x - y + 2z = 1$$

$$\begin{aligned} Z : x &= 1 - a + 3b \\ y &= a + b \\ z &= a - b \end{aligned}$$

iv) ¿ Como son E_1 y E_2 si siendo paralelos tienen un punto en común?.

v) Demuestra que si E_1 y E_2 son rectas paralelas sin puntos en común, entonces existe un plano que contiene a ambas rectas.

vi) Demuestra que la imagen por una homotecia o traslación de una recta afín es otra recta paralela a la primera. Deduce que rectas paralelas se transforman por una homotecia o una traslación en rectas paralelas.

23. Hallar ecuaciones paramétricas e implícitas de la recta que pasa por $(-1, 2, 0)$ y es paralela a la recta de ecuaciones

$$\begin{cases} x = 3 + \lambda, \\ y = -2\lambda, \\ z = 1, \end{cases}$$

24. *a*) Averiguar si los puntos $(3, 1, -1)$, $(5, 2, 1)$ y $(5, 0, 0)$ pertenecen a la recta con ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda, \\ y = 2 - \lambda, \\ z = -2 + \lambda. \end{cases}$$

b) Repetir para los puntos $(-1, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$ y $(1, -1, 1)$, y la recta que tiene ecuaciones implícitas

$$\begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ 2x - y + z + 2 = 0. \end{cases}$$

c) Averiguar si los puntos $(1, 0, 2)$, $(-1, 1, 1)$ y $(3, -1, 1)$ están alineados. Si lo están, encontrar ecuaciones paramétricas e implícitas de la recta que determinan.

d) Repetir para $(1, 1, 1)$, $(1, 0, -1)$ y $(1, 2, 3)$.

25. Hallar ecuaciones paramétricas e implícitas de los siguientes planos:

a) el que pasa por el punto $(1, 1, 1)$ y tiene a $(2, -1, 1)$ y $(1, 0, -1)$ como vectores directores;

b) el que pasa por los puntos $(1, 1, 1)$, $(2, 2, 3)$ y $(1, 1, -2)$;

c) el que pasa por el punto $(1, 1, 1)$ y contiene a la recta

$$\begin{cases} x + y + z + 2 = 0, \\ x - y - z - 2 = 0. \end{cases}$$

26. Podemos representar una escena tridimensional sobre un plano por medio de la siguiente construcción: el observador se supone ubicado en el punto $O = (0, -1, 0)$, y cada punto $P = (x, y, z)$, con $y > 0$, se proyecta en un punto que es la intersección de la recta OP con el plano $y = 0$. Este nuevo punto tendrá coordenadas $(X, 0, Z)$, donde X y Z dependen de las coordenadas (x, y, z) de P. Llamamos

$$\pi(P) = (X, Z),$$

y la correspondencia $P \mapsto \pi(P)$ define entonces una manera de representar el espacio en perspectiva.

a) Hallar las coordenadas (X, Z) de $\pi(P)$ en función de las coordenadas (x, y, z) de P.

b) ¿Cuál es la imagen por π de las rectas del semiespacio $y > 0$ que son paralelas al plano $y = 0$? En general, ¿cuál es el efecto de π actuando sobre cualquier plano paralelo a $y = 0$?

c) Puntos de fuga. Consideremos una recta r que no sea paralela al plano $y = 0$. Una vez fijada una de estas rectas hagamos tender al infinito[1] un punto P manteniéndolo sobre r y en el semiespacio $y > 0$. Mostrar que cuando P tiende al infinito $\pi(P)$ tiende a un punto del plano que sólo depende de la dirección de r. Llamaremos a este punto el **punto de fuga** correspondiente a esa dirección.

d) Línea del horizonte. Hallar el conjunto formado por los puntos de fuga de las líneas horizontales.

27. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación que a cada punto $P(x, y, z)$ le asocia el punto $f(P) = (x', y', z')$ tal que

$$x' = 1 + x + 2y + z$$
$$y' = 2 + y - z$$
$$z' = -1 + x + 3z$$

a) Demuestra que f es una aplicación afín. ¿ Es f una transformación afín?

b) Si F es la aplicación lineal asociada a f, determina $KerF$ y $Im(F)$

c) Se considera la recta de puntos r de $\mathbb{R}^3$ dada por las ecuaciones paramétricas siguientes:

$$x = 1 + \alpha$$
$$y = 2 - \alpha$$
$$z = -1 + \alpha$$

Determina $f(r)$.

d) Se consideran los siguientes planos de puntos:

$$\Pi \quad \text{de ecuación} \quad 2x + y - z + 1 = 0$$

$$\Pi' \quad \text{de ecuación} \quad x + y + 2z - 1 = 0$$

Obtén la imagen de cada plano por f y explica los resultados.

[1] Esto es lo mismo que decir que hacer tender a infinito el valor de la coordenada y, manteniéndonos sobre la recta.

28. Consideremos $\mathbb{R}^n$ como espacio afín euclideo, y sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación que conserva la distancia. La condición anterior es suficiente para garantizar que f es un movimiento, es decir, que es afín y biyectiva. En este ejercicio se pretende que pruebes lo anterior resolviendo cada uno de los siguientes apartados:

    a) Sea $g : V = \mathbb{R}^n \to V = \mathbb{R}^n$ una aplicación que conserva el producto escalar, y sea $B = \{v_1, ..., v_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Observar que no se dice que g sea lineal, eso es lo que se trata de probar.

        i) Demuestra que $g(B) = \{g(v_1), ..., g(v_n)\}$ es una familia de vectores ortonormal. Deduce que $g(B)$ es una base de $\mathbb{R}^n$.

        ii) Recuerda que por ser B una base ortonormal, si $v \in \mathbb{R}^n$ es tal que $v = a_1v_1 + ... + a_nv_n$, entonces $a_i = v.v_i$, $\forall i$. También para $g(v) = b_1g(v_1) + ... + b_ng(v_n)$, se tiene $b_i = g(v).g(v_i)$,$\forall i$. Usa lo anterior para probar que g es lineal.

        iii) Deduce que g es un isomorfismo.

    b) Sea $P \in E = \mathbb{R}^n$ un punto cualquiera pero fijo, y sea $F_P : V = \mathbb{R}^n \to V = \mathbb{R}^n$ la aplicación definida por $F_P(\vec{PQ}) = f(P)\vec{f}(Q)$, donde f es la aplicación de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ que conserva las distancias

        i) Prueba que F_P conserva el producto escalar. (Indicación: Desarrolla $(v - w).(v - w)$ y $(F_P(v) - F_P(w)).(F_P(v) - F_P(w))$ para $v = \vec{PQ}$ y $w = \vec{PR}$)

        ii) Deduce que F_P es lineal. ¿Es F_P biyectiva?.

        iii) . ¿ Puedes concluir ya que f es afín y biyectiva?.

29. Sean t_v y t_u dos traslaciones del espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^2$. Determina qué aplicaciones son $t_v \circ t_u$ y $t_u \circ t_v$. ¿Qué sucede en el caso en que $u = -v$?

30. Sean $h_{P,\alpha}$ y $h_{P,\beta}$ dos homotecias de centro P del espacio afín $\mathbb{R}^2$. Determina qué aplicaciones son $h_{P,\alpha} \circ h_{P,\beta}$, y $h_{P,\beta} \circ h_{P,\alpha}$. ¿En qué caso las composiciones anteriores resultan ser la aplicación identidad?.

31. En el espacio afín $\mathbb{R}^2$ se considera la homotecia $h_{P,-1}$.

    a) Realiza un dibujo que muestre el comportamiento de dicha homotecia. ¿ Qué aplicación es $(h_{P,-1})^2$?.

    b) Se considera el cuadrado de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$. ¿Cuál es la imagen de dicho cuadrado por la homotecia $h_{P,-1}$ con $P = (1/2, 1/2)$?

32. Sean f y g dos afinidades en el espacio afín $\mathbb{R}^n$, y sean F y G las aplicaciones lineales respectivas. Demuestra que $f \circ g$ es una afinidad de aplicación lineal asociada $F \circ G$.

33. Sea $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proyección afín de base el plano $\Pi : x + y + z = 1$ y dirección $W = \langle(1, -1, 2)\rangle$. Determina la imagen por dicha proyección

    i) del punto $(1, 1, 1)$

    ii) de la recta

$$x = 1 + \alpha$$

$$y = 1 - \alpha$$

$$z = 1 + 2\alpha$$

iii) de la recta

$$x = 1 + \alpha$$
$$y = 1 + \alpha$$
$$z = 1 + \alpha$$

34. Demuestra que la aplicación de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$, que al punto $M(x, y, z)$ asocia el punto $M'(x', y', z')$ tal que

$$x' = -y + z - 1$$
$$y' = -x + z - 1$$
$$z' = -x - y + 2z - 1$$

es una proyección. Determina sus elementos base y dirección.

35. Demuestra que la aplicación de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$, que al punto $M(x, y, z)$ asocia el punto $M'(x', y', z')$ tal que

$$x' = 2x - 2z - 3$$
$$y' = x - z - 2$$
$$z' = x - z - 3$$

es una proyección. Determina sus elementos base y dirección.

36. Da la ecuación matricial de la simetría afín de $\mathbb{R}^2$ respecto a la recta de ecuación $x + y = 1$ paralelamente al subespacio vectorial engendrado por el vector $u = (1, 2)$.

37. Se considera el espacio afín $\mathbb{R}^3$ con el sistema de referencia canónico. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación que a cada punto $M(x, y, z)$ le asocia el punto $f(M) : (x', y', z')$ siendo $x' = 3x - 4z - 6$, $y' = 2x - y - 2z - 4$, $z' = 2x - 3z - 6$. Demuestra que f es una aplicación afín. Prueba que f es una simetría determinando sus elementos (base y dirección).

38. En el espacio afín euclideo $E = \mathbb{R}^2$ se considera la siguiente aplicación afín

$$f : E = \mathbb{R}^2 \longrightarrow E = \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \longrightarrow (x + 1, y - 2)$$

Demuestra que es un movimiento, dí de qué movimiento se trata dando los elementos que lo definen.

39. En el espacio afín $E = \mathbb{R}^2$ se consideran los puntos $P = (1, 2)$ y $Q = (2, -3)$. Si r es la recta que pasa por P y Q, ¿cuál es la ecuación de la recta imagen de r por una traslación de vector $v = (-1, 1)$?.

40. En el espacio afín $E = \mathbb{R}^3$ se considera el plano de puntos $\Pi = \{(x, y, z) \in E : x - y = z + 1\}$. Determina la imagen del punto $P = (0, 0, 0)$ por la simetría ortogonal de base el plano Π.

41. En el espacio afín $E = \mathbb{R}^3$ se considera el punto $P(1, 2, 3)$. Determina la imagen del punto P por cada una de las aplicaciones afines siguientes.

    a) Traslación de vector $v : (-1, -2, -3)$.

b) Proyección ortogonal de base el plano de puntos $x + 2y + 3z = 0$.

c) Simetría ortogonal de base el plano de puntos $x + 2y + 3z = 7$.

d) Homotecia de centro $C(2, 4, 6)$ y razón $\alpha = 2$.

Realiza dos dibujos que ilustren que las aplicaciones de los apartados 2. y 4. no son movimientos.