ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA
GRADO EN INGENIERÍA EN ELECTRÓNICA INDUSTRIAL Y AUTOMÁTICA
GRADO EN INGENIERÍA ELÉCTRICA
Universidad de Cantabria

Práctica 4 (SAGE)

Aspectos generales de las prácticas de laboratorio:

- Abrir un navegador (recomendado Firefox o Chrome) y en la barra de dirección escribir

  193.146.75.191:8080

- Crear la carpeta *practicas_algebra* en el escritorio y guardar todos los archivos realizados durante la clase en esa carpeta.
- Al finalizar la clase subir estos archivos a vuestro directorio en moodle y eliminar la carpeta *practicas_algebra* del escritorio.

ESPACIOS VECTORIALES

1. CONSTRUCCIÓN DE VECTORES

   - Construimos el vector w_1 del $\mathbb{R}$- espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

     ```
     w1=vector(RR, [1,3,5/6]); w1
     ```

   - Construimos el vector w_2 del $\mathbb{Z}_5$- espacio vectorial $\mathbb{Z}_5^4$.

     ```
     w2=vector(GF(5), [1,0,4,-3]); w2
     ```

   - Construimos el vector u del $\mathbb{Q}$- espacio vectorial $\mathbb{Q}^7$ con todas las componentes o coordenadas cero, excepto la tercera igual 3.

     ```
     u=vector(QQ,{2:3,6:0});u
     ```

   - Construimos un vector w_1 aleatorio con 7 componentes sobre los enteros $\mathbb{Z}$.

     ```
     v=random_vector(ZZ,7);v
     ```

2. ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS VECTORES EN SAGE

   - Los vectores de n componentes son objetos de SAGE. Sus componentes se enumeran comenzado desde la 0 hasta la $n-1$ y nos permite extraerlas:

     ```
     w1[0]; w2[2]; u[2]
     ```

   - Nos permite modificar sus componentes:

     ```
     u[2]=123
     for i in u:
          print (i)
     ```

3. COMBINACIONES LINEALES DE VECTORES

   Algunas de las operaciones de vectores, son las combinaciones lineales. Por ejemplo:

   ```
   3*u+5*v; 3*w1
   u+3*u
   ```

4. CONSTRUCCIÓN DE ESPACIOS VECTORIALES

   ```
   # Espacio vectorial de dimension 4 sobre los racionales.
   V=VectorSpace(QQ, 4)
   # Espacio vectorial sobre los reales con 200 bit de precisión
   W=VectorSpace(RealField(200), 4)
   # Espacio vectorial de dimension 4 sobre Z_3
   U=VectorSpace(GF(3),4)
   U.list()
   ```

5. Subespacios vectoriales. Suma e intersección

```
v1=V([1,2,3,4])
T=V.subspace([[1,2,3,-2],v1])
V.dimension()
W.basis()
S=V.subspace([[12,-2,0,5],v1])
S+T
S.intersection(T)
```

EJERCICIOS

1. Se consideran los siguientes subespacios de $\mathbb{Q}^6$:

$$U_1 = \{(x, y, z, r, s, t) \in \mathbb{Q}^6 : x + y + z = 0, r + s + t = 0\}$$

$$U_2 = \{(x, y, z, r, s, t) \in \mathbb{Q}^6 : x - y = 0, x - z = 0, r - s = 0, r - t = 0\}$$

Utilizando Sage encontrar bases de $U_1, U_2, U_1 + U_2$ y $U_1 \bigcap U_2$. Comprobar si $U_1 + U_2 = U_1 \oplus U_2$.

```
SOLUCION
=========
V=VectorSpace(QQ,6)
A=matrix(QQ,[[1,1,1,0,0,0],[0,0,0,1,1,1]])
B=matrix(QQ,[[1,-1,0,0,0,0],[1,0,-1,0,0,0],[0,0,0,1,-1,0],[0,0,0,1,0,-1]])
U1=V.subspace(A.transpose().kernel()); U2=V.subspace(B.transpose().kernel())
U1+U2;  U1.intersection(U2)
```

2. En el $\mathbb{Q}$-espacio vectorial $\mathbb{Q}^4$ se consideran los subespacios

$$U_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{Q}^4 : x + y + z = 0, t = 0\}$$

$$U_2 = \{(2a, -a + b, -a + 3b, 0) : a, b \in Q\}$$

Utilizando Sage encontrar bases de $U_1, U_2, U_1 + U_2$ y $U_1 \bigcap U_2$. Comprobar si $U_1 + U_2 = U_1 \oplus U_2$.

3. En $\mathbb{R}^3$ se consideran los conjuntos de vectores:

$$\mathcal{B} = \{(0, 0, 1), (0, 2, 1), (3, 2, 1)\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}' = \{(2, 1, 0), (0, 2, 1), (2, 0, 1)\}$$

   a) Probar que $\mathcal{B}$ es base de $\mathbb{R}^3$.
   b) Escribir, si es posible, cada vector de $\mathcal{B}$ en función de $\mathcal{B}'$.
   c) ¿Si v es combinación lineal de $\mathcal{B}$, v es combinación lineal de $\mathcal{B}'$?
   d) ¿Es $\mathcal{B}'$ sistema generador de $\mathbb{R}^3$? ¿Es $\mathcal{B}'$ base de $\mathbb{R}^3$?

4. ¿Cuáles son las coordenadas del vector $v = (1, 2, 3, 4) \in \mathbb{R}^4$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ siendo $v_1 = (4, 3, 2, 1)$, $v_2 = (3, 2, 1, 0)$, $v_3 = (2, 1, 0, 0)$, $v_4 = (1, 0, 0, 0)$.