ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA

Grado en ingeniería en Electrónica Industrial y Automática

Grado en ingeniería Eléctrica

Universidad de Cantabria

Prueba Laboratorio

25 de mayo del 2016

Nombre y apellidos:

---

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 13 & 11 & 0 & -12 & -26 \\ -15 & -13 & 0 & 16 & 34 \\ 5 & 5 & 2 & -6 & -12 \\ -3 & -3 & 0 & 8 & 8 \\ -3 & -3 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \in M_{5\times 5}(\mathbb{Q})$.

   ¿Puedes encontrar una matriz A_1 equivalente a la matriz A y que tenga determinante 2016 ?

   ¿ Puedes encontrar una matriz A_2 semejante a la matriz A con determinante 2017 ?

---

2. Se considera el endomorfismo f de $\mathbb{Q}^5$ definido por la matriz A (dada arriba) con respecto a la base canónica.

   a) Encuentra una $\mathcal{B}$ base de $\mathbb{Q}^5$ tal que el endomorfismo f tenga con respecto a esta base la matriz: $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}$

   para algunos elementos $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.

   b) ¿ Es A una matriz diagonalizable sobre los racionales?

   c) ¿ Es A una matriz diagonalizable sobre los reales?

3. Se consideran los siguientes vectores del $\mathbb{R}-$espacio vectorial $\mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} v_1 = (1,1,-1,0), \quad v_2 = (1,2,0,2), \quad v_3 = (1,0,1,2),\\ w_1 = (3,1,1,4), \quad w_2 = (2,3,-4,-2), \quad w_3 = (0,-1,-1,-2), \end{aligned}$$

a) Expresar w_1, w_2, w_3 como combinación lineal de los vectores v_1, v_2, v_3. Expresar la respuesta, como la matriz A que cumple que $BA = C$ donde B y C son las matrices transpuestas de $matrix([v_1, v_2, v_3])$ y $matrix([w_1, w_2, w_3])$, respectivamente.

b) ¿Es verdadera o falsa la siguiente afirmación? "*Si* $v \in \mathbb{R}^4$ *es combinación lineal de* v_1, v_2, v_3 *entonces* v *es combinación lineal de* w_1, w_2, w_3*.*"

---

4. Se considera el siguiente producto escalar sobre $\mathbb{R}^3$

$$<,>: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

que a cada par de vectores (v, w) con $v = (x_1, x_2, x_3)$ y $w = (y_1, y_2, y_3)$ le asocia el número

$$< v, w >= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

a) Implementa en SAGE un procedimiento que tenga como entrada dos vectores de $\mathbb{R}^3$ y devuelva el producto escalar considerado.

b) Usando el procedimiento de Gram-Schmidt obtén, a partir de la base $\mathcal{B} = \{u_1 = (1,1,0), u_2 = (0,1,1), u_3 = (1,0,1)\}$, una base ortonormal (con el producto escalar considerado).