ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA
GRADO EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA INDUSTRIAL Y AUTOMÁTICA
GRADO EN INGENIERÍA ELÉCTRICA
Universidad de Cantabria

Examen Final
Cuestiones
8 de junio del 2019

Instrucciones:

- NOMBRE Y APELLIDOS: ______________________________ GRADO: ____________
- No se puede utilizar calculadoras, ni teléfonos, ni cualquier otro dispositivo electrónico.
- Se puede realizar en bolígrafo o lápiz.
- Se puede utilizar hojas de papel para realizar cálculos, pero no se puede utilizar ningún tipo de apuntes.
- Comprueba tres veces tu respuesta a cada pregunta. Asegúrate de entender exactamente lo que se está preguntando.
- La calificación es sobre 80 puntos.
- Escribe tu nombre y apellidos en el apartado correspondiente al comienzo del examen. *(1 punto)*

- ## Cuestiones tipo : Verdadero o Falso

REDONDEAR LAS LETRAS V O F. En esta parte del examen, la puntuación para cada ejercicio se ajusta a lo siguiente:

- Respuesta acertada: 1 punto.
- Respuesta en blanco: 0 puntos.
- Respuesta errónea: -0,2 puntos

---

1. **V** **F** El conjunto de vectores $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2{}^3$ tales que

$$\begin{aligned} x + z &= 0 \\ y + z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_2{}^3$ con dimensión 1.

---

2. **V** **F** Se dice que un sistema de n ecuaciones reales con n incógnitas con solución única está *bien condicionado*, si la norma del vector solución está acotada por el determinante de la matriz asociada.

---

3. **V** **F** El vector $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ es combinación lineal de los vectores $(2, 1)$ y $(1, 3)$ de $\mathbb{R}^2$.

---

4. **V** **F** Las matrices de la factorización LU de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 6 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ son:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

---

5. **V** **F** Si u y v son dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^n$ y ortogonales entonces son linealmente independientes.

---

6. **V** **F** El conjunto de las matrices $M_{4\times 5}(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial de dimensión 9

---

7. **V** **F** Si $A+I = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, entonces hay exactamente un vector x tal que $Ax = \begin{pmatrix} 2018 \\ 2019 \end{pmatrix}$.

---

8. **V** **F** Supongamos que una matriz $A \in M_{5\times 5}(\mathbb{R})$ tiene polinomio mínimo $m(x) = x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x$. Entonces A el rango de A es menor que 5

---

9. **V** **F** Si α es un autovalor de $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y β un autovalor de $B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, entonces $\alpha+\beta$ es un autovalor de la matriz $A+B$.

---

10. **V** **F** La cinemática directa de un robot en el plano se refiere al uso de las ecuaciones obtenidas en la diagonalización de la matriz asociada a la mano del robot.

---

11. **V** **F** La simetría ortogonal del vector $(1,8) \in \mathbb{R}^2$ de base el subespacio $<(2,1)>$ es el vector $(7,-4)$.

---

12. **V** **F** El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in M_{2019\times 2019}(\mathbb{R})$ es 2019^2.

---

13. **V** **F** Si A y B son dos matrices ortogonales del mismo orden, entonces $AB = BA$

---

14. **V** **F** Si f y g son aplicaciones lineales $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, entonces la aplicación definida por:

$$h(v) = 2f(v) + 3g(v) + 4v$$

es necesariamente una aplicación lineal.

---

15. **V** **F** Sea $\mathcal{B}_c = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ la base de $\mathbb{R}^3$ definida por $v_1 = \dfrac{1}{2}(e_1+e_2)$, $v_2 = \dfrac{1}{2}(e_1 - e_2)$ y $v_3 = e_2 + e_3$. Entonces la matriz del endomorfismo identidad de $\mathbb{R}^3$, respecto de las bases $\mathcal{B}$ (en el espacio inicial) y $\mathcal{B}_c$ (en el espacio final) es:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---

16. **V** **F** El siguiente código de Sage: A=MATRIX(QQ,[[1,2],[3,4],[5,6]]) asigna a la variable A una matrix en $M_{2\times 3}(\mathbb{Q})$.

---

17. **V** **F** Sean $v_1 = (1,1,0,-1), v_2 = (1,1,0,0) \in \mathbb{R}^4$ y $S = \langle v_1, v_2 \rangle$ subespacio del espacio euclídeo $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar habitual. Entonces la proyección ortogonal del vector $v = (0,1,-1,-1)$ sobre S es: $(2,2,0,-1)$.

---

18. **V** **F** El espacio vectorial $\mathbb{Z}_2^8$ tiene 256 vectores.

---

19. **V** **F** En el espacio afín $E = \mathbb{R}^2$ el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{P_0(1,2), P_1(2,3), P_2(1,4)\}$ es un sistema de referencia ortonormal.

- **Ejercicios y cuestiones con una o más de una respuesta**

> RESPONDER O MARCAR, EN CADA CASO. En esta parte del examen, la puntuación para cada ejercicio/cuestión se ajusta a lo siguiente:
> - Todas las respuestas acertadas: 6 puntos.
> - Alguna respuesta errónea y respuestas en blanco: 0 puntos.
> - Algunas respuestas acertadas, pero no todas: 1 punto.

---

1. Sea consideran los subespacios $S = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \middle/ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\}$ y $T = \{(\alpha, \beta, 0, -\alpha)/\alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.
   Señala cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:
   a) $\dim(S + T) \leq 3$.
   b) El conjunto $\{(5, 5, 0, -5), (3, \frac{1}{3}, 0, -3), (0, 100, 0, 0)\}$ es un sistema generador de T.
   c) $S + T = \mathbb{R}^4$.
   d) El conjunto $\{(0, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1)\}$ es un base de S y las coordenadas del vector $(2, -1, -3, 2)$ son en esta base $(-3, 2)$.
   e) $S \bigcap T = \mathbb{R}^4$.
   f) El conjunto $\{(5, 5, 0, -5), (3, \frac{1}{3}, 0, -3), (0, 100, 0, 0)\}$ es un base de T.

---

2. Consideremos en el espacio afín real las rectas $r : \left\{ \begin{array}{l} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{array} \right.$ y $s : \left\{ \begin{array}{l} x - y - 1 = 0 \\ 2x - z + 2 = 0 \end{array} \right.$. Se pide:
   a) La ecuación del plano que contiene las rectas r y s.

      SOLUCIÓN:

   b) La recta que pasa por $P = (0, -1, 2)$ y corta perpendicularmente a la recta r.

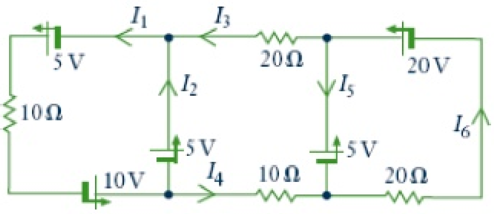
      SOLUCIÓN:

   c) El valor que deben tomar los parámetros a y b para que la recta s esté contenida en el plano definido por $\pi : x - 2y + az = b$.

      SOLUCIÓN:

---

3. Encontrar las intensidades del circuito:



   SOLUCIÓN:

---

4. Se considera una matriz cuadrada real de orden n tal que $A^2 = \frac{1}{3}I_n - 2A$, siendo I_n la matriz identidad de orden n. Encuentra dos números α y β tales que $A^{-1} = \alpha A + \beta I_n$.

   SOLUCIÓN:

---

5. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ que tiene con respecto a la base canónica la matriz $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & b \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$ siendo a y b números reales. Señala cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:
   a) f no es inyectiva
   b) Si $a = 0$ y $b \neq 0$, entonces f no es diagonalizable.
   c) Si $b = 0$ y $a \neq 0$, entonces f no es diagonalizable.
   d) Si $a = 1$ y $b = 2$, entonces f es diagonalizable.
   e) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

---

6. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$ dependiendo del parámetro real a. Se pide:

   a) Rango de la matriz A en función del parámetro a.

   SOLUCIÓN:

   b) Determinante de la matriz $3A^{-1}$ cuando $a = 0$.

   SOLUCIÓN:

---

7. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal que tiene como matriz asociada $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, respecto a las bases $\mathfrak{B} = \{(-1,0,0),(0,-2,0),(0,-1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\mathfrak{B}' = \{(1,1),(0,-1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.
   Señala cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:

   a) La imagen del vector $(0,2,0)$ es $(0,-1)$.
   b) La imagen del vector $(2,-1,2)$ es $(-1,-1,0)$.
   c) Las coordenadas de la imagen del vector $(-1,0,0)$ respecto a la base $\mathfrak{B}'$ son $(1,0)$.
   d) $Ker(f) =< (1,-3,1) >$.
   e) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

---

8. Sea $f \in End(\mathbb{R}^4)$ verificando:

   - El núcleo de f está generado por el vector $(7,-7,7,7)$ y la imagen del vector $(1,0,-1,0)$ es el vector $(7^2,0,-7^2,0)$.
   - El núcleo del endomorfismo $(f-7I)$ es el subespacio definido por las ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x-y+z &= 0 \\ x-y &= 0 \\ t &= 0 \end{cases}$$

   Señala cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:

   a) Solamente puede haber una única aplicación lineal verificando esas propiedades.
   b) El subespacio generado por los vectores $(7,0,-7,0)$ es f-invariante.
   c) El número real $\sqrt{7}$ es un valor propio de f.
   d) El vector $(7,7,-7,0)$ es un vector propio de f.
   e) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

---

9. Si $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ es la aplicación lineal definida por

$$f(x,y,z,t) = (x+y+z+t, 2x+y+x, 3x+y),$$

   ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

   a) $ker(f) = \langle\{(1,-3,1,1)\}\rangle$.
   b) $Im(f) = \mathbb{R}^3$
   c) dim($Im(f)$)=2.
   d) f no es inyectiva y sí es sobreyectiva.
   e) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

---

10. Sea $S = \{u_1 = (1,1,0), u_2 = (0,1,1), u_3 = (-1,1,1)\}$ un subconjunto de vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^3$. Señala cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:

   a) Una base ortogonal del subespacio generado por S es $\{(-1,\sqrt{2},0),(\sqrt{2},1,0),(0,0,\pi)\}$
   b) El procedimiento de ortonormalización de Gram-Schmidt con entrada el subconjunto S devuelve:

$$\{(\frac{-\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}),(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0),(\frac{-\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})\}$$

   c) Una base ortonormal del subespacio generado por S es $\{(\cos\theta,\sin\theta,0),(-\sin\theta,\cos\theta,0),(0,0,-1)\}$ donde $\theta \in \mathbb{R}$.
   d) La proyección ortogonal del vector $(1,-1,0)$ sobre el subespacio generado por u_2 es $(0,3,3)$.
   e) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

"Las matemáticas poseen no sólo la verdad, sino cierta belleza suprema, una belleza fría y austera, como la de una escultura."

"Mathematics, rightly viewed, possesses not only truth, but supreme beauty cold and austere like that of sculpture."Bertrand Russell(1970)