ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA

Grado en ingeniería en Electrónica Industrial y Automática
Grado en ingeniería Eléctrica
Universidad de Cantabria

Examen Final
11 de Junio del 2016

Nombre y apellidos: Grado:

---

1. Sea U el siguiente subespacio del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$: *(1.5 puntos)*

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x + 2y = 0, 3z - t = 0\}.$$

¿Cuáles de las afirmaciones siguientes son ciertas? Contesta razonadamente.

a) Si $W_1 = \langle\{(1, 1, 1, 1)\}\rangle$, entonces la suma de U y W_1 es directa: $U \oplus W_1$.

b) Si $W_2 = \langle\{(-2, 1, 1, 3)\}\rangle$, entonces W_2 está contenido en U: $W_2 \subset U$.

c) $W_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x + 2y = 0\}$, entonces $U \cap W_3 = U$.

---

2. Determina el núcleo y la imagen del homomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$ definido como: *(1 punto)*

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y & y - x \\ x - z & y \end{pmatrix}$$

---

3. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

a) Si el polinomio característico de f es $p_f(X) = (X - 1)^2 X$, entonces siempre existen vectores v_1, v_2, v_3 de $\mathbb{R}^3$ linealmente independientes tales que

$$f(v_1) = v_1, f(v_2) = v_2, f(v_3) = \mathbf{0}.$$

b) Si respecto de una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ la matriz asociada a f es de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y f es diagonalizable, entonces el polinomio mínimo de f es $m_f(X) = (X - 1)(X + 1)$ y $a = 0$.

c) Si respecto de una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ la matriz asociada a f es

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

existe otra base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ respecto de la cual la matriz asociada a f es

$$M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

d) Si f tiene dos autovalores distintos y $\dim(\ker(f)) = 2$, entonces f es diagonalizable.

Contesta razonadamente *(2 puntos)*

---

4. Calcula A^{64} siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. *(1 punto)*

5. Halla una base ortonormal u, v, w de $\mathbb{R}^3$ tal que el subespacio generado por u y v esté contenido en el plano $x + y + z = 0$, y el generado por u y w lo esté en el plano $2x - y - z = 0$. *(1 punto)*

6. En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios siguientes: *(2 puntos)*

$$U = \{(x, y, z, t)/x + y + z + t = 0\}, \quad W = \{(x, y, z, t)/x - y = 0, z - t = 0\}$$

y sea $f : U \to W$ la aplicación lineal definida por

$$f(x, y, z, t) = (x - 3y + z, x - 3y + z, y + 2z - t, y + 2z - t).$$

a) Determina bases de U y de W.

b) Determina la matriz M asociada a f respecto de las bases halladas en el apartado anterior.

c) Determina matrices P y Q regulares tales que

$$QMP = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

donde I_r es la matriz identidad $r \times r$ y r es el rango de f.

7. Se considera el siguiente sistema tres ecuaciones con dos incógnitas de números reales: *(1.5 puntos)*

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ 2x - y &= 0 \\ x + y &= 3 \end{aligned}$$

a) Demuestra que no tiene solución. *(0.5 puntos)*

b) Encontrar la mejor pseudosolución, esto es, el punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ que está más próximo de ser una solución del sistema. *(1 punto)*

RECUPERACIÓN examen 11 de marzo 2016

1. Halla la descomposición LU de la matriz: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 6 & 5 & 5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

2. Estudia para que valores de a es inversible la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a \\ a & a & a & \dots & a & a & a \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$, donde a es un número real.