ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA

Grado en ingeniería en Electrónica Industrial y Automática
Grado en ingeniería Eléctrica
Universidad de Cantabria

Examen Extraordinario
1 de septiembre del 2016

Nombre y apellidos: Grado:

---

1. Estudia y resuelve el sistema siguiente en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{Z}_2$: *(1 punto)*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

---

2. Se considera la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que respecto las bases canónicas tiene por matriz *(1 punto)*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Se pide encontrar bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respecto de las cuales la matriz f sea

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---

3. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un endomorfismo tal que *(2 puntos)*

- $f(1,1,1,1) = (2,0,-1,0)$
- $f(1,1,2,2) = (1,1,6,1)$
- $\ker(f) = \operatorname{Im}(f)$

Se pide:

a) Encontrar la matriz asociada a f respecto de la base canónica.

b) Obtener los subespacios de vectores propios asociados a f y decidir si f es o no diagonalizable.

---

4. Estudia para qué valor real de a es inversible la matriz *(0.5 puntos)*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a^2-1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & a^2-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & a^2-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & a^2-1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a^2-1 \\ a^2-1 & a^2-1 & a^2-1 & \dots & a^2-1 & a^2-1 & a^2-1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

---

5. Se considera el siguiente producto escalar sobre $\mathbb{R}^3$ *(1.5 puntos)*

$$<,>: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

que a cada par de vectores (v, w) con $v = (x_1, x_2, x_3)$ y $w = (y_1, y_2, y_3)$ le asocia el número

$$< v, w >= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Usando el procedimiento de Gram-Schmidt obtén, a partir de la base $\mathcal{B} = \{u_1 = (1, -1, 0), u_2 = (0, 1, -1), u_3 = (2, 0, 2)\}$, una base ortonormal (con el producto escalar considerado).

---

6. Se considera el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $V = \mathbb{R}^4$, y sea U el siguiente subespacio de V:

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ 2x + y - 3z = 0\}$$

¿Cuáles de las afirmaciones dadas a continuación son verdaderas y cuáles falsas? Justifica tu respuesta.

a) $\langle\{(1, -2, 0, 0), (0, 3, 1, 0)\}\rangle$ es base de U.
b) U tiene dimensión 3.
c) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x + y - z = 0, \ x - 2z = 0\}$ es un subespacio de U.
d) No existe un subespacio T de $\mathbb{R}^4$ tal que $U \oplus W = \mathbb{R}^4$. *(1.5 puntos)*
e) Construye una aplicación lineal f de V en U de rango 2.

---

7. Encontrar una matriz A real 2×2 que no sea diagonalizable. Encontrar otra matriz B real 6×6 que no sea diagonalizable. Razona la respuesta. *(1.5 puntos)*

---

8. Halla las matrices A y B que verifiquen: $\begin{cases} A + B = C \\ A + A^t = 0 \\ B - B^t = 0 \end{cases}$ siendo $C = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *(1 punto)*

As far as the laws of mathematics refer to reality, they are not certain; and as far as they are certain, they do not refer to reality. Albert Einstein (1879 - 1955), "Geometry and Experience", 1921