ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA

Grado en ingeniería en Electrónica Industrial y Automática
Grado en ingeniería Eléctrica
Universidad de Cantabria

Ejercicio tipo

El siguiente tipo de ejercicio es básico dentro de la evaluación de la asignatura.

Ejercicio

Sea $f \in End(\mathbb{R}^4)$ verificando:

- El núcleo de f está generado por los vectores $(1,-1,0,0),(0,-2,1,0)$
- El núcleo del endomorfismo $(f-2I)$ es un subespacio cuyas ecuaciones implícitas son:

$$\left\{\begin{array}{rcl} -x+y+2z+t & = & 0 \\ 2y+t & = & 0 \\ x+y+t & = & 0 \\ y+z+t & = & 0 \end{array}\right.$$

- La imagen del vector $(0,0,1,0)$ es el vector $(2,0,2,0)$.

Se pide:

1. Demuestra que la aplicación está definida y determina la matriz B_f del endomorfismo respecto a la base canónica.
2. Demuestra que f es diagonalizable.
3. Determina el polinomio mínimo de f.
4. Encuentra una base de $\mathbb{R}^4$ formada por vectores propios.
5. Encuentra tres subespacios distintos y f-invariantes de dimensión 3.

Solución

1. Que $f \in End(\mathbb{R}^4)$ significa que f es un endomorfismo de $\mathbb{R}^4$, es decir, f es una aplicación lineal del $\mathbb{R}-$espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ en sí mismo:

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$$

Nos piden la matriz cuadrada $B_f = (b_{i,j}) \in M_4(\mathbb{R})$ tal que:

$$\left\{\begin{array}{rcl} f(e_1) & = & b_{1,1}e_1 + b_{2,1}e_2 + b_{3,1}e_3 + b_{4,1}e_4 \\ f(e_2) & = & b_{1,2}e_1 + b_{2,2}e_2 + b_{3,2}e_3 + b_{4,2}e_4 \\ f(e_3) & = & b_{1,3}e_1 + b_{2,3}e_2 + b_{3,3}e_3 + b_{4,3}e_4 \\ f(e_4) & = & b_{1,4}e_1 + b_{2,4}e_2 + b_{3,4}e_3 + b_{4,4}e_4 \end{array}\right.$$

donde $e_1 = (1,0,0,0), e_2 = (0,1,0,0), e_3 = (0,0,1,0)$ y $e_4 = (0,0,0,1)$.

Puesto que una aplicación lineal queda unívocamente determinada conociendo la imagen de una base cualquiera, resolveremos el ejercicio en tres etapas, a saber:

Etapa 1.

Encontrar una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de $\mathbb{R}^4$ y la imagen de estos 4 vectores $\{f(v_1), f(v_2), f(v_3), f(v_4)\}$.
De esta forma, quedará determinada la matriz A_f de la aplicación f con respecto a la base $\mathcal{B}$ en el espacio vectorial de partida $\mathbb{R}^4$ y la canónica $\mathcal{B}' = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ en el espacio vectorial de llegada $\mathbb{R}^4$.

Etapa 2.

Encontrar la matriz P del cambio de coordenadas de la base canónica $\mathcal{B}'$ a la base $\mathcal{B}$, es decir, la matriz de la aplicación identidad I con respecto a las base $\mathcal{B}'$ en el espacio de partida $\mathbb{R}^4$ y a la base $\mathcal{B}$ en el espacio de llegada $\mathbb{R}^4$:

$$I : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

La aplicación identidad I está definida por $I(v) = v$, para todo vector v.

Etapa 3.

Entonces la matriz pedida B_f es el producto de A_f por P, puesto que es la matriz de la aplicación composición $f \circ I = f$:

$$\mathbb{R}^4 \xrightarrow{I} \mathbb{R}^4 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^4$$

$$B_f = A_f P$$

Solución: Etapa 1.

Para encontrar la imagen de 4 vectores linealmente independientes, usaremos los datos que proporciona el ejercicio.

a) Por el punto 1 del ejercicio, el núcleo de f está generado por los vectores $v_1 = (1, -1, 0, 0)$ y $v_2 = (0, -2, 1, 0)$, es decir, $f(v_1) = f(v_2) = \mathbf{0}$. Puesto que son linealmente independientes, se tiene que $\dim Ker(f) = 2$.

b) Resolvemos el sistema de ecuaciones lineales homogéneno de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas del punto 2 del ejercicio. Comprobamos que el rango de la matriz del sistema es 3, luego el conjunto de soluciones tiene dimensión $1 = 4 - 3$ y determinamos el conjunto de solucuiones $\{(-\alpha, -\alpha, -\alpha, 2\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Consecuentemente, el subespacio $Ker(f - 2I)$ está generado por $v_3 = (-1, -1, -1, 2)$. Luego,

$$(f - 2I)(v_3) = f(v_3) - 2I(v_3) = f(v_3) - 2v_3 = \mathbf{0} \Longrightarrow f(v_3) = 2v_3$$

c) Finalmente, por el punto 3 del ejercicio, la imagen del vector $v_4 = (0, 0, 1, 0)$ es $f(v_4) = (2, 0, 2, 0)$

Tenemos garantizado que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es base, comprobando que el rango de la matriz de los vectores Q es 4,

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego la matriz A_f de la aplicación f con respecto a las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ es:

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: Etapa 2.

Tenemos que encontrar la matriz $P = (p_{i,j})$ de la aplicación identidad I con respecto a las bases $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}$, que son las columnas de las coordenadas de los vectores de la base canónica $\mathcal{B}'$ en la base $\mathcal{B}$.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} I(e_1) = e_1 & = & p_{1,1}v_1 + p_{2,1}v_2 + p_{3,1}v_3 + p_{4,1}v_4 \\ I(e_2) = e_2 & = & p_{1,2}v_1 + p_{2,2}v_2 + p_{3,2}v_3 + p_{4,2}v_4 \\ I(e_3) = e_3 & = & p_{1,3}v_1 + p_{2,3}v_2 + p_{3,3}v_3 + p_{4,3}v_4 \\ I(e_4) = e_4 & = & p_{1,4}v_1 + p_{2,4}v_2 + p_{3,4}v_3 + p_{4,4}v_4 \end{array} \right.$$

En definitiva, tendremos que resolver 4 sistemas de ecuaciones, uno por cada una de las igualdades anteriores. Todos ellos son de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas.

Observar que lo anterior equivale a siguiente igualdad matricial $QP = I$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} & p_{1,4} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} & p_{2,4} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} & p_{3,4} \\ p_{4,1} & p_{4,2} & p_{4,3} & p_{4,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego, se tiene que P es la inversa de Q :

$$P = Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: Etapa 3.

Puesto que tenemos computadas las matrices A_f y P, la matriz pedida B_f es:

$$B_f = A_f P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Observación

Se tiene que la matriz C_f de la aplicación f con respecto la base $\mathcal{B}$ en el espacio de partida y de llegada es $C_f = PA_f$, es decir:

$$C_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Puesto que es la matriz de $I \circ f = f$:

$$\mathbb{R}^4 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^4 \xrightarrow{I} \mathbb{R}^4$$

2. Ya hemos hemos visto que 0 y 2 son dos valores propios y, que $\dim V(0) = 2, \dim V(2) = 1$ puesto que $V(0) =< \{v_1, v_2\} >$ y $V(2) =< \{v_3\} >$. Podemos deducir que f es diagonalizable, puesto que debe existir otro valor propio λ de f distinto, ya que el polinomio característico $p_f(x)$ tiene grado 4, y deber ser de la forma $p_f(x) = x^2(x-2)(x-\lambda)$

3. El polinomio característico $p_f(x)$ es el determinante de la matriz $xI_4 - B_f$, es decir, $p_f(x) = x^2(x-2)(x-3)$, luego $\lambda = 3$. Puesto que f es diagonalizable, el polinomio mínimo $m_f(x)$ es $x(x-2)(x-3)$.

4. Nos queda encontrar el subespacio $V(3) = Ker(f - 3I_4) =< \{w\} >$, resolviendo el sistema de ecuaciones lineales homogéneo obtenemos que $w = (1, 0, 1, 0)$. Luego una base de vectores propios es $\{v_1, v_2, v_3, w\}$.

5. Tres subespacios W_1, W_2, W_3 f-invariantes de dimensión tres son:

$$W_1 =< \{v_1, v_2, v_3\} >, \quad W_2 =< \{v_1, v_3, w\} >, \quad W_3 =< \{v_1, v_2, w\} >$$