ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA
GRADO EN INGENIERÍA EN ELECTRÓNICA INDUSTRIAL Y AUTOMÁTICA
GRADO EN INGENIERÍA ELÉCTRICA
Universidad de Cantabria

Examen Final
9 de junio del 2018

NOMBRE Y APELLIDOS: GRADO:

---

1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal que tiene como matriz asociada $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, respecto a las base $\mathfrak{B} = \{(-1,0,0),(0,-1,0),(0,-1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\mathfrak{B}' = \{(1,1),(0,-1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.
Señala cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas: *(1 punto)*
   - *a)* (Correcta) La imagen del vector $(2,-2,1)$ es $(-1,-3)$
   - *b)* La imagen del vector $(2,-2,1)$ es $(-1,2)$
   - *c)* La imagen del vector $(0,-1,0)$ es $(1,0)$
   - *d)* (Correcta) Las coordenadas de la imagen del vector $(-1,0,0)$ respecto a la base $\mathfrak{B}'$ son $(1,0)$.
   - *e)* (Correcta) $Im(f) = \mathbb{R}^2$.
   - *f)* Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

2. Sea A una matriz real, cuadrada e invertible. ¿ Cuales de las siguiente afirmaciones con correctas? *(0.4 puntos)*
   - *a)* (Correcta) Si A es triangular inferior, su inversa también lo es.
   - *b)* (Correcta) Si A es simétrica, también lo es su inversa.
   - *c)* Si las entradas de A son números enteros, también lo son las de su inversa.
   - *d)* (Correcta) Si las entradas de A son números racionales, también lo son las de su inversa.
   - *e)* (Correcta) Si A es involutiva su inversa también lo es.
   - *f)* Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

3. Consideramos el subespacio $U = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \,/ a_{11} - a_{22} = 0; a_{11} + 2a_{21} = 0\}$ de $M_2(\mathbb{R})$ y las matrices:
$$A_1 = \begin{pmatrix} 2018 & 0 \\ -1009 & 2018 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2018 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$
Señala cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas: *(1 punto)*
   - *a)* (Correcta) A_1, A_2, A_3 son vectores linealmente dependientes.
   - *b)* (Correcta) U está generado por A_1, A_2 y A_3, es decir $U = \langle\{A_1, A_2, A_3\}\rangle$.
   - *c)* (Correcta) A_1 y A_3 son vectores linealmente independientes.
   - *d)* (Correcta) $\{A_1,\, A_2\}$ es una base de U y las coordenadas de A_3 respecto a esta base son $(\frac{-1}{1009}, \frac{1}{1009})$.
   - *e)* $\{A_2,\, A_3\}$ es una base de U y las coordenadas de A_1 respecto a esta base son $(0,-1009)$.
   - *f)* Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

4. En el espacio afín $\mathbb{R}^3$ se consideran los puntos $P_0 = (1,0,-1)$, $P_1 = (1,1,0)$, $P_2 = (0,1,1)$, $P_3 = (0,0,1)$, $P_4 = (1,2,1)$. Señala cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas: *(1 punto)*
   - *a)* $R = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ es un sistema de referencia y las coordenadas del punto P_4 en este sistema de referencia son $(2,-1,1)$.
   - *b)* (Correcta) $R = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ es un sistema de referencia y las coordenadas del punto P_4 en este sistema de referencia son $(3,-1,0)$.
   - *c)* $R = \{P_0, P_1, P_2, P_4\}$ es un sistema de referencia y las coordenadas del punto P_3 en este sistema de referencia son $(1,-1,1)$.
   - *d)* $R = \{P_0, P_1, P_2, P_4\}$ es un sistema de referencia y las coordenadas del punto P_3 en este sistema de referencia son $(0,2,1)$.
   - *e)* Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

5. Sea $f \in End(\mathbb{R}^3)$ verificando:

   - El núcleo de f está generado por el vector $(1,-1,0)$ y la imagen del vector $(2,2,-6)$ es el vector $(1,1,-3)$.
   - El núcleo del endomorfismo $(f-2I)$ es el subespacio definido por las ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x-y+z & = & 0 \\ x-y & = & 0 \end{array} \right.$$

   Señala cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas: *(1 punto)*

   a) Puesto que la aplicación no es inyectiva, puede haber más de una aplicación lineal verificando esas propiedades.
   b) (Correcta) El subespacio generado por el vector $(1,1,-1)$ es f-invariante.
   c) (Correcta) El subespacio generado por el vector $(1,-1,0)$ es f-invariante.
   d) (Correcta) El vector $(2,2,-6)$ es un vector propio.
   e) (Correcta) El vector $(1,1,-3)$ es un vector propio.
   f) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

6. Señala cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$: *(0.4 puntos)*

   a) (Correcta) Para cualquier subespacio S, $(S^{\perp})^{\perp} = S$.
   b) (Correcta) Si S y T son subespacios tales que $S \subset T$, entonces $T^{\perp} \subset S^{\perp}$.
   c) (Correcta) Si S y T son subespacios tales que $S^{\perp} = T^{\perp}$, entonces $S = T$.
   d) Si S y T son subespacios tales que $S \subset T$, entonces $S^{\perp} \subset T^{\perp}$.
   e) (Correcta) Existe un subespacio S de $\mathbb{R}^3$ tal que $\dim S^{\perp} = 1$.
   f) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

7. Se consideran los puntos $(2,-6), (-1,6), (1,12)$ de $\mathbb{R}^2$. Señala cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas: *(1 punto)*

   a) La recta que mejor se ajusta a los puntos es $-x+2$.
   b) (Correcta) La recta que mejor se ajusta a los puntos es $-3x+6$.
   c) El polinomio cuadrático que mejor se ajusta a los puntos es x^2+x+1.
   d) El polinomio de interpolación de Lagrange es x^2+x+1.
   e) (Correcta) El polinomio de interpolación de Lagrange es $-7x^2+3x+16$.
   f) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

8. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ las aplicaciones lineales definidas por:

$$f(x_1,x_2,x_3) = (2x_1 - x_2, 2x_2 + x_3), \qquad g(y_1,y_2) = (4y_1 + 2y_2, y_2, y_1 + y_2)$$

   Señala cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas: *(1 punto)*

   a) $(1,2,-1) \in Ker(f)$.
   b) (Correcta) La matriz de $g \circ f$ con respecto a las bases canónicas es : $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
   c) (Correcta) $f \circ g$ es diagonalizable
   d) (Correcta) El vector $(2,-1,0)$ pertenece a la imagen de g, es decir $(2,-1,0) \in Im(g)$.
   e) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

9. ¿Qué es una proyección ortogonal? *(0,2 puntos)*

   Sea V un espacio vectorial euclídeo, U un subespacio de V y $U^{\perp}$ su ortogonal. Se define la siguiente aplicación:

$$p_U : V \to V \quad \text{definida por} \quad p_U(v) = u \quad \text{siendo} \quad v = u + u', u \in U, u' \in U^{\perp}$$

   conocida como proyección ortogonal sobre U.