ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA

Grado en ingeniería Electrónica Industrial y Automática
Grado en ingeniería Eléctrica
Universidad de Cantabria

Examen Extraordinario
1 de septiembre del 2018

Instrucciones:

- Nombre y apellidos: ______________________________ Grado: __________
- No se puede utilizar calculadoras, ni teléfonos, ni cualquier otro dispositivo electrónico.
- Se puede realizar en bolígrafo o lápiz.
- Se puede utilizar hojas de papel para realizar cálculos, pero no se puede utilizar ningún tipo de apuntes.
- Comprueba tres veces tu respuesta a cada pregunta. Asegúrate de entender exactamente lo que se está preguntando.
- La calificación es sobre 101 puntos.
- Escribe tu nombre y apellidos en el apartado correspondiente al comienzo del examen. *(1 punto)*

- ## Cuestiones tipo : Verdadero o Falso

Redondear las letras V o F. En esta parte del examen, la puntuación para cada ejercicio se ajusta a lo siguiente:

- Respuesta acertada: 2 puntos.
- Respuesta en blanco: 0 puntos.
- Respuesta errónea: -0,4 puntos

---

1. **V** **F** Hay un sistema de 7 ecuaciones lineales reales con seis incógnitas que tiene exactamente una única solución.

---

2. **V** **F** El determinante de A es 0, donde

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{12825}{11504} & \frac{90625}{88467} & \frac{49455}{35626} & -\frac{6151}{38520} \\ \frac{48955}{10471} & \frac{60835}{89249} & \frac{17564}{97411} & -\frac{7103}{3700} \\ -\frac{12825}{11504} & \frac{90625}{88467} & \frac{49455}{35626} & -\frac{6151}{38520} \\ -\frac{2275}{7108} & \frac{49132}{79339} & -\frac{49791}{670} & \frac{6115}{4868} \end{pmatrix}.$$

---

3. **V** **F** Si $A + I = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, entonces hay exactamente un x tal que $Ax = \begin{pmatrix} 2017 \\ 2018 \end{pmatrix}$.

---

4. **V** **F** Supongamos que una matriz A tiene polinomio mínimo $m(x) = x \cdot (x^2 - 15x - 18)$. Entonces A tiene exactamente dos autovalores reales distintos.

---

5. **V** **F** Supongamos que A y B some matrices reales $n \times n$ con $|A| = 5$ y $|B| = 7$. Entonces

$$|A^2BA^{-1}B^{-1}A^{-1}| = 1.$$

---

6. **V** **F** El subconjunto $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ de las matrices complejas inversibles 3×3 es un subespacio vectorial del espacio vectorial de todas las matrices complejas 3×3.

---

7. **V** **F** El conjunto $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$\begin{aligned} x + 2\,y + 3\,z &= 1 \\ 4\,x + 5\,y + 6\,z &= 2 \\ 7\,x + 8\,y + 9\,z &= 3 \end{aligned}$$

es un subespacio vectorial de dimensión 1.

---

8. **V** **F** La matriz del endomorfismo $g(x,y) = ((cos\frac{\pi}{6})x - (sen\frac{\pi}{6})y, (sen\frac{\pi}{6})x + (cos\frac{\pi}{6})y)$ de $\mathbb{R}^2$ es ortogonal.

---

9. **V** **F** Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ que gira un vector 90 grados en el sentido de las agujas del reloj. Entonces la matriz de f en la base canónica es $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

---

10. **V** **F** Si f y g son aplicaciones lineales $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, entonces

$$h(v) = 2f(v) - 3g(v)$$

es necesariamente una aplicación lineal.

---

11. **V** **F** Sea A la matriz de una aplicación lineal de $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^3$, donde los coeficients denotados con $*$ son números reales arbitrarios,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & * & * \\ -1 & 1 & 1 & * & * \\ 2 & 0 & 1 & * & * \end{pmatrix}.$$

Entonces la dimensión del $Ker f$ debe ser 3.

---

12. **V** **F** Sea $\mathbb{P}_3$ el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de los polinomios de grado menor estricto que 3 y con coeficientes en $\mathbb{R}$. Sea $f : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ la aplicación lineal $f(ax^2 + bx + c) = cx - b + 2a$. Entonces existe una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{P}_3$ tal que la matriz de f con respecto a esta base es diagonal.

---

13. **V** **F** Sea $\mathcal{B}_c = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ la base de $\mathbb{R}^3$ definida por $v_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2)$, $v_2 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2)$ y $v_3 = e_2 + e_3$.. Entonces la matriz del endomorfismo identidad de $\mathbb{R}^3$, respecto de las bases $\mathcal{B}$ (en el espacio inicial) y $\mathcal{B}_c$ (en el espacio final) es:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---

14. **V** **F** Sean $e_1 = (1,1,1,1), e_2 = (1,0,0,0) \in \mathbb{R}^4$ y $S = \langle e_1, e_2 \rangle$ subespacio del espacio euclídeo $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar habitual. Entonces la proyección ortogonal del vector $e = (1,1,-1,1)$ sobre S es: $(-2,0,0,1)$.

---

15. **V** **F** En el espacio afín $E = \mathbb{R}^2$ se considera el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{P_0(1,2), P_1(2,3), P_2(1,4)\}$. Entonces el origen del sistema de refencia canónico tiene coordenadas $(-1,-2)$ en $\mathcal{R}$.

- **Cuestiones con una o más de una respuesta**

> RESPONDER O MARCAR, EN CADA CASO. En esta parte del examen, la puntuación para cada ejercicio se ajusta a lo siguiente:
>
> - Todas las respuestas acertadas: 7 puntos.
> - Alguna respuesta errónea: 0 puntos.
> - Agunas respuestas acertadas, pero no todas: 1 punto.
> - Respuestas en blanco: 0 puntos.

---

1. Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $L = \{v_1, v_2, \cdots, v_{40}\}$ una parte libre de V. Señala cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:

   a) dim(V)$\geq$ 40
   b) Si L es sistema generador, entonces dim(V)= 40
   c) dim(V)= 40
   d) Existe $S \subset L$ tal que S es sistema generador de V
   e) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

---

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal que tiene como matriz asociada $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, respecto a las base $\mathfrak{B} = \{(-1, 0, 0), (0, -1, 0), (0, -1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\mathfrak{B}' = \{(1, 1), (0, -1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.
   Señala cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:

   a) La imagen del vector $(2, -2, 1)$ es $(-1, -1, 0)$
   b) La imagen del vector $(0, 1, 0)$ es $(0, -1)$
   c) Las coordenadas de la imagen del vector $(-1, 0, 0)$ respecto a la base $\mathfrak{B}'$ son $(1, 0)$.
   d) $Ker(f) = \{(0, 0, 0)\}$.
   e) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

---

3. En el espacio afín $\mathbb{R}^3$ se consideran los puntos $P_0 = (1, 0, -1)$, $P_1 = (1, 1, 0)$, $P_2 = (0, 1, 1)$, $P_3 = (1, 2, 1)0, 1)$, $P_4 = (0, 0, 1)$. Señala cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

   a) $R = \{P_0, P_1, P_2, P_4\}$ es un sistema de referencia y las coordenadas del punto P_3 en este sistema de referencia son $(1, -1, 1)$.
   b) $R = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ es un sistema de referencia y las coordenadas del punto P_4 en este sistema de referencia son $(2, -1, 1)$.
   c) $R = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ es un sistema de referencia y las coordenadas del punto P_4 en este sistema de referencia son $(3, -1, 0)$.
   d) $R = \{P_0, P_1, P_2, P_4\}$ es un sistema de referencia y las coordenadas del punto P_3 en este sistema de referencia son $(0, 2, 1)$.
   e) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

---

4. Sea $f \in End(\mathbb{R}^3)$ verificando:

   - El núcleo de f está generado por el vector $(5, -1, 15)$ y la imagen del vector $(5, 5, -15)$ es el vector $(1, 1, -3)$.
   - El núcleo del endomorfismo $(f - 7I)$ es el subespacio definido por las ecuaciones:

   $$\begin{cases} 2x - y + z & = & 0 \\ x - y & = & 0 \end{cases}$$

   Señala cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:

   a) Solamente puede haber una única aplicación lineal verificando esas propiedades.
   b) El subespacio generado por los vectores $(1, 1, -1)$ y $(5, 5, -15)$ es f-invariante.
   c) El número real 7 es un valor propio.
   d) El vector $(0, 0, 0)$ es un vector propio.
   e) El vector $(1, 1, -3)$ es un vector propio.
   f) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

---

5. La ecuación $3x = 4$.
   a) No tiene solución en $\mathbb{Z}_6$
   b) No tiene solución en $\mathbb{Z}_5$
   c) Tiene por solución $x = 4/3$ tanto en $\mathbb{Z}_5$ como en $\mathbb{Z}_6$
   d) Tiene solución en $\mathbb{Q}$ pero no en $\mathbb{Z}$.
   e) Tiene solución en $\mathbb{R}$, pero no en $\mathbb{Q}$.
   f) Tiene una única solución en $\mathbb{C}$.

---

6. Se consideran los puntos $(-2,-1),(-1,1),(0,1)$ de $\mathbb{R}^2$. Señala cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:
   a) El polinomio de interpolación de Lagrange es $x + 2/3$.
   b) El polinomio cuadrático que me mejor se ajusta a los puntos e $x^2 - x + 2$.
   c) La recta que mejor se ajusta a los puntos es $x + 1$.
   d) La recta que mejor se ajusta a los puntos es $x + 2/3$.
   e) El polinomio de interpolación de Lagrange es $x^2 + 3x + 1$.
   f) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

---

7. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal definida, respecto de la base canónica, por las matriz A, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Señala cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:
   a) El conjunto de vectores $\{e_1 + e_4, e_1 - e_3, 3e_1 + e_4, -3e_1 + 4e_2 + 4e_3 + e_4\}$ constituye una base de vectores propios para el endomorfismo f.
   b) La matriz asociada a f respecto de la base $\mathcal{B} = \{e_1 + e_4, e_3 + e_4, 5e_1 - e_3 + 2e_4, e_1 + e_2 + e_3 + e_4\}$ de $\mathbb{R}^4$ es una matriz triangular superior.
   c) f no puede ser representado por una matriz triangular.
   d) Existe un número natural m tal que f^m es la aplicación nula.
   e) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

---

8. En los distintos casos que se presentan a continuación, y sabiendo que se trabaja en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^6$, sustituir los $\cdots$ por los valores que permiten obtener las igualdades señaladas.
   a) $(-1,4,2,0,0,1) + 3(1,0,0,-2,-1,1) + (-1)(0,0,0,1,0,0) =$
   $(\cdots,\cdots,\cdots,\cdots,\cdots,\cdots)$
   b) $\cdots(-1,4,2,0,0,0) + 3(1,0,0,\cdots,4,4) = (0,\cdots,\cdots,15,\cdots,\cdots)$
   c) $0(\cdots,\cdots,\cdots,\cdots,\cdots,\cdots) = (0,0,0,0,0,0)$.
   d) $(x,y,z,t,r,s) + (\cdots,\cdots,\cdots,\cdots,\cdots,\cdots) = (x,y,z,t,r,s)$

---

9. Sea $S = \{u_1 = (1,1,0), u_2 = (0,1,1), u_3 = (1,0,1)\}$ un subconjunto de vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^3$. Señala cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:
   a) Una base ortogonal del subespacio generado por S es $\{(-1,0,0),(0,-2,0),(0,0,\sqrt{3})\}$
   b) El procedimiento de ortonormalización de Gram-Schmidt con entrada el subconjunto S devuelve:

$$\{(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0),(\frac{-\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}),(\frac{-\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})\}$$

   c) Una base ortonormal del subespacio generado por S es $\{(-1,0,0),(0,-1,0),(0,0,1)\}$
   d) La proyección ortogonal del vector u_1 sobre el subespacio generado por u_2 y u_3 es $(1,2,1)$.
   e) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

---

10. Sea $S = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \middle/ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\}$ y sea $T = \{(\alpha,\beta,0,\beta)/\alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$. Señala cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:
   a) $\dim(S+T) = 3$
   b) $S + T = \mathbb{R}^4$
   c) $S \bigoplus T = \mathbb{R}^4$
   d) El conjunto $\{(2,2,0,2),(5,0,0,0),(7,3,0,3),(5,\sqrt{2},0,\sqrt{2})\}$ es un sistema generador de T.
   e) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.
