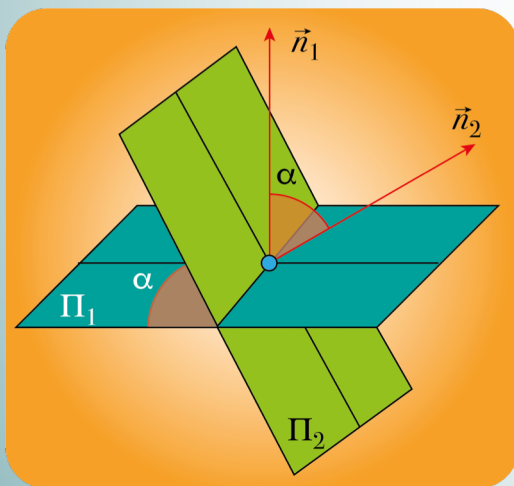


Álgebra y Geometría

Tema 2. Sistemas de Ecuaciones Lineales



Rodrigo García Manzanas

Ruth Carballo Fidalgo

DPTO. DE MATEMÁTICA APLICADA Y CIENCIAS DE LA
COMPUTACIÓN

Este tema se publica bajo Licencia:

[Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)



1 Introducción

- Forma matricial
- Tipos de solución
- Sistemas equivalentes

2 Resolución de sistemas

- Métodos directos
 - Método de Gauss (o eliminación gaussiana)
 - Método de Gauss-Jordan
 - Método de Cramer
- Métodos por factorización de matrices
 - Método de la factorización LU
 - Método de la factorización de Cholesky
- Métodos iterativos
 - Método de Jacobi
 - Método de Gauss-Seidel

SISTEMAS DE ECUACIONES

En general, una ecuación **lineal** es cualquiera de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, donde las **incógnitas** $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ están elevadas a uno y no aparecen en funciones trascendentes ($\ln(x)$, $\text{sen}(x)$, $\text{cos}(x)$, $e^x \dots$) y/o multiplicadas entre sí.

A menudo se necesita resolver varias ecuaciones lineales que han de cumplirse a la vez (**sistema lineal**). Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas tiene la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

donde $\{a_{i=\{1,\dots,m\}j=\{1,\dots,n\}}\} \in \mathbb{R}$ son los **coeficientes** y $\{b_{k=\{1,\dots,m\}}\} \in \mathbb{R}$ los **términos independientes**. Lógicamente, todos los $\{a_{ij}\}$ no pueden ser nulos a la vez. Si todos los $\{b_{k=\{1,\dots,m\}}\}$ son nulos, el sistema se denomina **homogéneo**.

Ejemplo: ¿Son lineales los siguientes sistemas?

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = -4 \\ -x - 2y + 5z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 3x + y - 3z = 0 \\ -2x + 3y - 4z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - \ln(y) = 1 \\ -2x + 4e^y = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ -3x + \frac{2}{y} - z = 1 \\ y + 2z = 4 \end{cases}$$

FORMA MATRICIAL DE UN SISTEMA DE ECUACIONES

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{A\vec{x} = \vec{b}}$$

A : matriz de coeficientes; \vec{x} : vector de incógnitas; \vec{b} : vector de términos independientes

TEOREMA

Toda matriz representa un sistema lineal y todo sistema lineal se puede representar por su

matriz ampliada, $A^* = (A \mid \vec{b})$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

SOLUCIONES DE UN SISTEMA

Una solución de un sistema es un conjunto de valores para las n incógnitas que satisfacen simultáneamente las m ecuaciones

TEOREMA

Cualquier sistema de ecuaciones lineales tiene: **ninguna** solución, una **única** solución o **infinitas** soluciones

- Sistema **incompatible**: No tiene solución

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

- Sistema **compatible**: Tiene solución

Determinado: Solución única

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

Indeterminado: Infinitas soluciones

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

Nota: Todo sistema lineal homogéneo es compatible, ya que tiene, como mínimo, la **solución trivial** $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \vec{0}$

TEOREMA DE ROUCHÉ-FRÖBENIUS

Dado un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, la condición necesaria y suficiente para que sea compatible (tenga solución) es que $rg(A) = rg(A^*)$

- $rg(A) \neq rg(A^*) \Rightarrow$ Incompatible
- $rg(A) = rg(A^*) \Rightarrow$ Compatible
 - Determinado si $rg(A) = rg(A^*) = n$
 - Indeterminado si $rg(A) = rg(A^*) < n$
 - $rg(A)$: número de incógnitas principales
 - $n - rg(A)$: número de parámetros libres

SISTEMAS EQUIVALENTES

Dos sistemas lineales con las mismas incógnitas son **equivalentes** si tienen la misma solución

TEOREMA

A partir de un sistema lineal cualquiera se puede obtener otro sistema equivalente efectuando *operaciones elementales*

Operación elemental en una matriz	Operación elemental en un sistema
Intercambiar dos filas	Intercambiar dos ecuaciones
Multiplicar una fila por $\lambda \neq 0$	Multiplicar una ecuación por $\lambda \neq 0$
Sumar a una fila, otra fila multiplicada por $\lambda \neq 0$	Sumar a una ecuación, otra ecuación multiplicada por $\lambda \neq 0$

Nota: Para que dos sistemas sean equivalentes, no es necesario que tengan el mismo número de ecuaciones

Ejemplo: Dado el sistema

$$\begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ -x + y = 4 \end{cases}$$

son sistemas equivalentes:

$$F_{1,2} \begin{cases} -x + y = 4 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$F_1(1/2) \begin{cases} x + y = 3 \\ -x + y = 4 \end{cases}$$

$$F_{2,1}(1/2) \begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ 2y = 7 \end{cases}$$

MÉTODO DE GAUSS (O ELIMINACIÓN GAUSSIANA)

Consiste en convertir cualquier sistema lineal, mediante operaciones elementales, en otro equivalente triangular o casi triangular, para después resolverlo por sustitución hacia atrás. En otras palabras, se basa en la transformación de A^* en una forma **escalonada**

Ejemplo 1:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

$$A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_{2,1}(-2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x - y = 3 \\ 3y = -3 \end{cases}$$

$$\text{Solución: } (x, y) = (2, -1)$$

Sistema compatible determinado

$$rg(A) = rg(A^*) = 2 = n$$

Ejemplo 2:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 3 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

$$A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[\begin{array}{c} F_{2,1}(-2) \\ F_{3,1}(-2) \end{array}]{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_{3,2}(-1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

La tercera ecuación nos dice que $0 = 1 \Rightarrow$ No tiene solución

Sistema incompatible

$$rg(A) = 2 \neq rg(A^*) = 3$$

Ejemplo 3:

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_{2,1}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 3y = -3 \end{cases}$$

Sistema con más variables (3) que ecuaciones independientes (2),
por tanto habrá 3-2 (1) parámetro libre

Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)

$$rg(A) = rg(A^*) = 2 < n = 3$$

Convenio: tomar como incógnitas principales las correspondientes a las columnas pivotaes (x, y) y como parámetros libres las correspondientes a las columnas no pivotaes (z)

Solución (en forma paramétrica):

$$\left. \begin{array}{l} z = \alpha \\ y = -1 \\ x = 3 + y - z = 2 - \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow (x, y, z) = (2 - \alpha, -1, \alpha), \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}$$

MÉTODO DE GAUSS-JORDAN

Consiste en convertir cualquier sistema lineal en otro equivalente cuya matriz ampliada A^* sea escalonada **reducida** por filas

Ejemplo:

$$\begin{cases} 4x + 16y + 64z = 100 \\ 2x + 4y + 8z = 6 \\ x + y + z = -2 \end{cases}$$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 16 & 64 & 100 \\ 2 & 4 & 8 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_1(1/4) \\ F_2(1/2)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 16 & 25 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_{2,1}(-1) \\ F_{3,1}(-1)}} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 16 & 25 \\ 0 & -2 & -12 & -22 \\ 0 & -3 & -15 & -27 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2(1/2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 16 & 25 \\ 0 & -1 & -6 & -11 \\ 0 & -3 & -15 & -27 \end{array} \right) \xrightarrow{F_{3,2}(-3)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 16 & 25 \\ 0 & -1 & -6 & -11 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3(1/3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 16 & 25 \\ 0 & -1 & -6 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_{2,3}(6)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 16 & 25 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_{1,3}(-16)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xrightarrow{F_{1,2}(4)} \\ \xrightarrow{F_2(-1)} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Solución: $(x, y, z) = (-3, -1, 2)$

Sistema compatible determinado

$$rg(A) = rg(A^*) = n = 3$$

MÉTODO DE CRAMER

Este método puede aplicarse para resolver sistemas **cuadrados** (mismo número de ecuaciones que de incógnitas, n), en los cuales $A_{n \times n}$ sea **invertible**. En este caso, la solución *única* (nótese que un sistema de Cramer será siempre compatible determinado) puede obtenerse como $x_i = \frac{|A_{x_i}|}{|A|}$, donde $|A_{x_i}|$ es el determinante que resulta de cambiar, en A , la columna correspondiente a la incógnita x_i por la de términos independientes

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2y - 8z = 8 \\ -4x + 5y + 9z = -9 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 2 \quad |A_x| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -8 \\ -9 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 58$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & -8 \\ -4 & -9 & 9 \end{vmatrix} = 32 \quad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \\ -4 & 5 & -9 \end{vmatrix} = 6$$

$$x = \frac{58}{2} = 29; \quad y = \frac{32}{2} = 16; \quad z = \frac{6}{2} = 3$$

$$\text{Solución: } (x, y, z) = (29, 16, 3)$$

MÉTODO DE LA FACTORIZACIÓN LU

Si la matriz A de un sistema lineal $A\vec{x} = \vec{b}$ es *invertible* y factorizable en la forma $A = LU$, podemos utilizar las matrices triangulares L y U para resolverlo fácilmente.

Ejemplo: Utiliza la factorización LU para resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x + 4y - 4z = 12 \\ x - 4y + 3z = -21 \\ -6x - 9y + 10z = -24 \end{cases}$$

$$A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 3 \\ -6 & -9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -21 \\ -24 \end{pmatrix}$$

Aplicando las operaciones elementales $F_{2,1}(-\frac{1}{2})$, $F_{3,1}(3)$ y $F_{3,2}(\frac{1}{2})$ sobre A podemos factorizarla en la forma LU , con:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -3 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 0 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

A partir de esta factorización, podemos desdoblar el sistema original en dos

$$\left. \begin{array}{l} A\vec{x} = \vec{b} \\ A = LU \end{array} \right\} \Rightarrow LU\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} L\vec{y} = \vec{b} \\ U\vec{x} = \vec{y} \end{array} \right\}$$

Estos dos nuevos sistemas son triangulares y en consecuencia se resuelven muy fácilmente:

$$L\vec{y} = \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -3 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -21 \\ -24 \end{pmatrix}$$

$$a = 12; b = -27; c = -3/2$$

$$U\vec{x} = \vec{y} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 0 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -27 \\ -3/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } \{z = -3, y = 2, x = -4\}$$

MÉTODO DE LA FACTORIZACIÓN DE CHOLESKY

Si la matriz A de un sistema lineal $A\vec{x} = \vec{b}$ es *simétrica y definida positiva* se puede factorizar en la forma $A = LL^t$, donde los elementos de la matriz triangular inferior L pueden obtenerse de acuerdo a las siguientes fórmulas:

$$L : \begin{cases} l_{jj} = \pm \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2} \\ l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk} \right), i > j \end{cases}$$

Una vez hallada L , desdoblaríamos el sistema original en dos

$$\left. \begin{array}{l} A\vec{x} = \vec{b} \\ A = LL^t \end{array} \right\} \Rightarrow LL^t\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} L\vec{y} = \vec{b} \\ L^t\vec{x} = \vec{y} \end{array} \right\}$$

Estos dos nuevos sistemas son triangulares, por lo que se resuelven muy fácilmente

Ejemplo: Utiliza una factorización de Cholesky para resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 4x + 2y + z = 2 \\ 2x + 2y = -3 \\ x + 3z = 5 \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, que es simétrica y definida positiva. Por tanto, podríamos buscar una

matriz $L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$ tal que $A = LL^t$. Aplicando las fórmulas, podríamos tener:

$$l_{11} = \sqrt{4} = 2; l_{21} = \frac{1}{2}(2) = 1; l_{22} = \sqrt{2 - 1^2} = 1; l_{31} = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2};$$

$$l_{32} = \frac{1}{1}(0 - 2 \cdot 1) = -\frac{1}{2}; l_{33} = \sqrt{3 - \left(\frac{1}{2}^2 + \frac{1}{2}^2\right)} = \sqrt{\frac{5}{2}}. \text{ Por tanto,}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \sqrt{\frac{5}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{5}{2}} \end{pmatrix}$$

Ya podríamos construir dos sistemas triangulares cuya resolución es casi inmediata:

$$L\vec{y} = \vec{b} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \sqrt{\frac{5}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$a = 1; b = -4; c = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$L^t\vec{x} = \vec{y} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{5}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ \sqrt{\frac{5}{2}} \end{pmatrix}$$

Solución: $\{z = 1, y = -3.5, x = 2\}$

MÉTODOS ITERATIVOS

Los métodos iterativos son especialmente adecuados para la resolución de sistemas **cuadrados** grandes y/o cuyas matrices son dispersas (tienen muchos ceros). Estos métodos consisten en definir una sucesión de vectores $\{\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots\}$ que converjan a la solución del sistema a partir de una descomposición de la matriz del mismo, A , en dos matrices M y N tales que $A = M - N$. Tendremos por tanto:

$$A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow (M - N)\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \boxed{M\vec{x} = N\vec{x} + \vec{b}}$$

TEOREMA

Si la matriz A de un sistema lineal $A\vec{x} = \vec{b}$ es **diagonalmente dominante***, un método iterativo producirá una sucesión de vectores que converge a la solución del mismo, que será **única**. En otro caso, la convergencia no está asegurada.

*Una matriz A es diagonalmente dominante si $|a_{kk}| > \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}|$, para $k = \{1, 2, \dots, n\}$

Veremos dos métodos iterativos distintos: **Jacobi** y **Gauss-Seidel**.

MÉTODO DE JACOBI

El método de Jacobi consiste en definir

$$\boxed{M = D} \quad \text{y} \quad \boxed{N = -(L + U)}$$

donde:

- D es una matriz diagonal con la misma diagonal que A
- L es una matriz triangular inferior en la que $l_{ij} = a_{ij}$ si $i < j$ y $l_{ij} = 0$ en caso contrario
- U es una matriz triangular superior en la que $u_{ij} = a_{ij}$ si $i > j$ y $u_{ij} = 0$ en caso contrario

Entonces, $A = M - N = D + L + U$ y el sistema $M\vec{x} = N\vec{x} + \vec{b}$ es equivalente a resolver

$$D\vec{x} = -(L + U)\vec{x} + \vec{b}$$

La sucesión se construye por tanto como:

$$\boxed{D\vec{x}_{k+1} = -(L + U)\vec{x}_k + \vec{b}} \quad \text{para } k \geq 0$$

Para ir obteniendo las sucesivas soluciones necesitaremos un vector inicial arbitrario, \vec{x}_0

Ejemplo: Aplica el método iterativo de Jacobi para resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 9 \\ x + 6y - 2z = 15 \\ 4x - 3y + 8z = 1 \end{cases}, \text{ con matriz } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & -2 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

- Formamos las matrices $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ y

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Construimos la sucesión de soluciones de acuerdo a $D\vec{x}_{k+1} = -(L + U)\vec{x}_k + \vec{b}$, es decir:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} 2x_{k+1} &= y_k + 9 \\ 6y_{k+1} &= -x_k + 2z_k + 15 \\ 8z_{k+1} &= -4x_k + 3y_k + 1 \end{aligned} \right\}$$

- Resolvemos iterativamente, partiendo de un vector solución inicial (arbitrario), por ejemplo $\vec{x}_0 = (0, 0, 0)$. Por tanto, para $k = 0$:

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 &= y_0 + 9 = 9 \\ 6y_1 &= -x_0 + 2z_0 + 15 = 15 \\ 8z_1 &= -4x_0 + 3y_0 + 1 = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{x}_1 = (4.5, 2.5, 0.125)$$

Nota: Fíjate en que la idea de este método es despejar una incógnita de cada ecuación

La sucesión de soluciones quedaría así:

$$\begin{aligned} \vec{x}_0 &= (0, 0, 0) \\ \vec{x}_1 &= (4.5, 2.5, 0.125) \\ \vec{x}_2 &= (5.75, 1.7916, -1.1875) \\ \vec{x}_3 &= (5.3958, 1.1458, -2.0781) \\ \vec{x}_4 &= (5.0729, 0.9079, -2.1432) \end{aligned}$$

Que converge a la solución exacta, $\vec{x} = (5, 1, -2)$

MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL

El método de Gauss-Seidel consiste en definir

$$\boxed{M = D + L} \quad \text{y} \quad \boxed{N = -U}$$

donde:

- D es una matriz diagonal con la misma diagonal que A
- L es una matriz triangular inferior en la que $l_{ij} = a_{ij}$ si $i < j$ y $l_{ij} = 0$ en caso contrario
- U es una matriz triangular superior en la que $u_{ij} = a_{ij}$ si $i > j$ y $u_{ij} = 0$ en caso contrario

Entonces, $A = M - N = D + L - U$ y el sistema $M\vec{x} = N\vec{x} + \vec{b}$ es equivalente a resolver

$$(D + L)\vec{x} = -U\vec{x} + \vec{b}$$

La sucesión se construye por tanto como:

$$\boxed{(D + L)\vec{x}_{k+1} = -U\vec{x}_k + \vec{b}} \quad \text{con } k \geq 0$$

Para ir obteniendo las sucesivas soluciones necesitaremos un vector inicial arbitrario, \vec{x}_0

Ejemplo: Aplica el método iterativo de Gauss-Seidel para resolver el mismo sistema del ejemplo anterior:

$$\begin{cases} 2x - y = 9 \\ x + 6y - 2z = 15 \\ 4x - 3y + 8z = 1 \end{cases}, \text{ con matriz } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & -2 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

- Formamos las matrices $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ y

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Construimos la sucesión de soluciones de acuerdo a $(D + L)\vec{x}_{k+1} = -U\vec{x}_k + \vec{b}$, es decir:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} 2x_{k+1} &= y_k + 9 \\ x_{k+1} + 6y_{k+1} &= 2z_k + 15 \\ 4x_{k+1} - 3y_{k+1} + 8z_{k+1} &= 1 \end{aligned} \right\}$$

- Resolvemos iterativamente, partiendo de un vector solución inicial (arbitrario), por ejemplo $\vec{x}_0 = (0, 0, 0)$. Por tanto, para $k = 0$:

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 &= y_0 + 9 = 9 \\ 6y_1 &= -x_1 + 2z_0 + 15 = -x_1 + 15 \\ 8z_1 &= -4x_1 + 3y_1 + 1 = -4x_1 + 3y_1 + 1 \end{aligned} \right\}$$

Nota: Fíjate en que la idea de este método es transformar el sistema inicial en otro triangular equivalente

La sucesión de soluciones quedaría así:

$$\begin{aligned} \vec{x}_0 &= (0, 0, 0) \\ \vec{x}_1 &= (4.5, 1.75, -1.4687) \\ \vec{x}_2 &= (5.375, 1.1145, -2.1445) \\ \vec{x}_3 &= (5.0572, 0.9422, -2.0502) \\ \vec{x}_4 &= (4.9711, 0.9881, -1.9901) \end{aligned}$$

Que converge a la solución exacta, $\vec{x} = (5, 1, -2)$.

Nota: De existir convergencia, Gauss-Seidel converge más rápido que Jacobi.