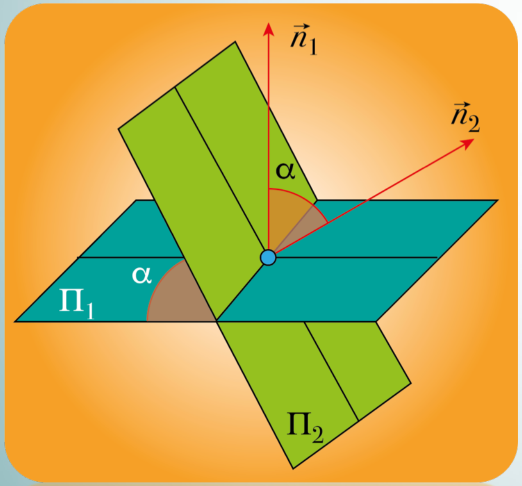
Álgebra y Geometría

Tema 4. Espacio euclídeo



Rodrigo García Manzanas

Ruth Carballo Fidalgo

DPTO. DE MATEMÁTICA APLICADA Y CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

Contenidos

PRODUCTO ESCALAR (I)

En este tema, trataremos de llevar a los espacios vectoriales nociones geométricas como longitud, distancia, ángulo y ortogonalidad. Todo esto se consigue al introducir un **producto escalar**, que es una operación entre dos *vectores* que da como resultado un *escalar*

Ejemplo: Como sabemos, el producto escalar usual de dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, en $\mathbb{R}^n$, se define como:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, u_2, ..., u_n) \cdot (v_1, v_2, ..., v_n) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + ... + u_n v_n$$

En $\mathbb{R}^2$, por tanto, tendríamos:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) = u_1 v_1 + u_2 v_2 \text{ (escalar)}$$

PRODUCTO ESCALAR (II)

Propiedades:

- Conmutativa: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- Distributiva: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- Reubicación del escalar: $\alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v})$, siendo α un escalar
- Definido positivo: $\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$. Sólo se da $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0$ si $\vec{v} = \vec{0}$

DEFINICIÓN

Un **espacio euclídeo** es cualquier espacio vectorial dotado de un producto escalar que cumpla las propiedades anteriores (no tiene porqué ser el producto escalar usual)

PRODUCTO ESCALAR (III)

Ejemplos:

- Un producto escalar en $\mathbb{R}^3$ que cumple las propiedades anteriores podría ser: $(u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3$
- En el espacio $\mathbb{M}_2$ (matrices 2×2 con términos reales), el producto ordinario de matrices no es un producto escalar, pues el resultado no es un escalar (es una matriz). Además, no es conmutativo, etc.
- En el espacio vectorial $\mathbb{C}[a, b]$ de las funciones continuas de una variable en el intervalo $[a, b]$ podemos definir el siguiente producto escalar que cumple todas las propiedades: $f \cdot g = \int_a^b f(x)g(x)dx$

Ejercicio: Razona si en $\mathbb{P}_2 = \{ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ son productos escalares los siguientes:

- El producto ordinario de polinomios
- $(ax^2, bx, c) \cdot (a'x^2, b'x, c') = aa' + bb' + cc'$

Norma o módulo

La norma o módulo de un vector $\vec{v}$ es un escalar, y se calcula como:

$$|\ \vec{v}\ | = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$$

Ejemplo: En $\mathbb{R}^2$, con el producto escalar usual, la norma del vector $(4,3)$ es $\sqrt{(4,3)\cdot(4,3)} = \sqrt{25} = 5$

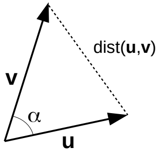
Propiedades:

- $|\vec{v}| \geq 0$. El único vector de módulo cero es el $\vec{0}$
- $|\vec{v}| = |-\vec{v}|$
- $|\ \alpha\vec{v}\ | = |\alpha|\ |\ \vec{v}\ |$, siendo $|\alpha|$ el valor absoluto del escalar α
- Para dos vectores cualesquiera $\vec{u}, \vec{v}$ siempre se cumplen:
  - Desigualdad triangular: $|\ \vec{u}+\vec{v}\ | \leq |\ \vec{u}\ | + |\ \vec{v}\ |$
  - Desigualdad de Cauchy-Schwarz: $|\ \vec{u}\cdot\vec{v}\ | \leq |\ \vec{u}\ ||\ \vec{v}\ |$. La igualdad sólo se cumple si $\vec{u}$ es múltiplo de $\vec{v}$

DISTANCIA Y ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES (I)

La **distancia** entre dos vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ es la norma del vector diferencia entre ambos:

$$dist(\vec{u},\vec{v}) = |\ \vec{u} - \vec{v}\ | = |\ \vec{v} - \vec{u}\ |$$



En $\mathbb{R}^2$, con el producto escalar usual, se cumple:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\ \vec{u}\ ||\ \vec{v}\ |\ cos(\alpha), \quad \text{con } 0 \leq \alpha \leq \pi$$

$$\alpha = arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\ \vec{u}\ ||\ \vec{v}\ |}$$

Este concepto de **ángulo** entre vectores es aplicable en cualquier espacio euclídeo

DISTANCIA Y ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES (II)

Ejercicio: Calcula sus módulos y la distancia y ángulo entre vectores para los siguientes casos:

- En $\mathbb{R}^3$, con el producto escalar usual, para los vectores $\vec{u} = (1, 0, 0)$ y $\vec{v} = (1, 0, 1)$
- En $\mathbb{C}[0, 1]$ (funciones continuas de una variable en el intervalo $[0, 1]$), con el producto escalar definido como $f \cdot g = \int_0^1 f(x)g(x)dx$, para los "vectores" $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 1$

ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS

En $\mathbb{R}^3$, la ecuación **vectorial** de un recta paralela al **vector director** $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ que pasa por el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ se puede escribir como $\boxed{(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \alpha(v_1, v_2, v_3)}$. Por tanto, como consecuencia del concepto de ángulo entre dos vectores que hemos visto, podemos calcular fácilmente el ángulo que forman dos rectas r_1 y r_2 con vectores directores $\vec{v}_1$ $\vec{v}_2$ en $\mathbb{R}^3$ (en caso de que se corten):

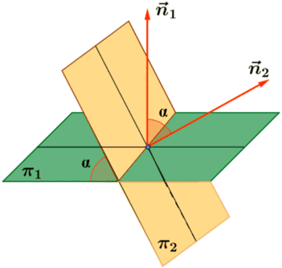
$$\alpha = arccos \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|}, \quad \text{con } 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

Ejercicio: ¿Qué ángulo forman entre sí las siguientes rectas?

- $r_1 : (1, 5, 2) + \alpha(2, 1, 1)$ y $r_2 : (0, 3, -1) + \beta(-1, 2, 1)$?
- $r_1 : \alpha(1, 0, 0)$ y $r_2 : (0, 1, 0) + \beta(0, 0, 1)$?

Ángulo entre dos planos

La ecuación **general** de un plano en $\mathbb{R}^3$ es $\boxed{ax + by + cz + d = 0}$, con $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}$. A menos que sean paralelos, dos planos cualesquiera π_1 y π_2 formarán un cierto ángulo $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ al cruzarse, que será exactamente el que forman los vectores normales (perpendiculares) a π_1 y π_2, que llamaremos $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$.



$$\alpha = arccos \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$$

Nota: Dado un plano $\pi : ax + by + cz + d = 0$, el vector normal al mismo más inmediato que podemos obtener es $\vec{n} = (a, b, c)$

Ejercicio: Calcula el ángulo que forman entre sí los siguientes planos:

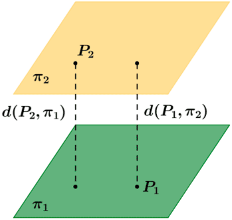
- $\pi_1 : 2x - y + z - 1 = 0$ y $\pi_2 : x + z + 3 = 0$
- $\pi_1 : 2x - 3y + z + 1 = 0$ y $\pi_2 : 4x - 6y + 2z + 5 = 0$

DISTANCIA ENTRE DOS PLANOS (PARALELOS)

Dado un plano $\pi : ax + by + cz + d = 0$ y un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ en $\mathbb{R}^3$, la distancia de P a π se puede calcular como:

$$dist(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Para calcular la distancia que separa dos planos paralelos bastaría por tanto con fijarse en un punto cualquiera de uno de ellos y calcular su distancia al otro utilizando la fórmula anterior.



$d(P_1, \pi_2) = d(P_2, \pi_1)$

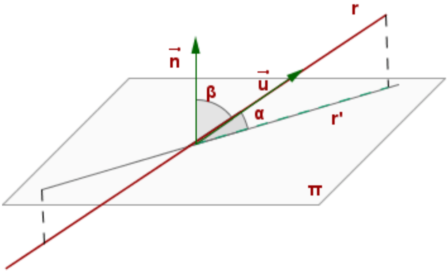
Ejercicio: Calcula la distancia entre:

- El plano $\pi : x + 2y + 3z + 1 = 0$ y el punto $P(0, 2, 1)$
- Los planos $\pi_1 : 2x - 3y + z + 1 = 0$ y $\pi_2 : 4x - 6y + 2z + 5 = 0$

ÁNGULO ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO

Ejercicio: En base a la figura que se muestra a continuación, calcula el ángulo que forman entre sí la recta r y el plano π:

$$r : \begin{cases} x + 3y - z + 3 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases} \qquad \pi : \; 2x - y + 3z + 1 = 0$$



ORTOGONALIDAD

Dos vectores $\vec{u}, \vec{v}$ son ortogonales si su producto escalar es cero:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

Un **conjunto** de vectores es **ortogonal** si cada vector es ortogonal a todos los demás

Ejemplo: En la base canónica de $\mathbb{R}^3$, todos los vectores son ortogonales entre sí

$$(1,0,0) \cdot (0,1,0) = 0$$
$$(1,0,0) \cdot (0,0,1) = 0$$
$$(0,1,0) \cdot (0,0,1) = 0$$

TEOREMA

Todo conjunto ortogonal es linealmente independiente

ORTONORMALIDAD

Normalizar un vector $\vec{v}$ es reducirlo a otro vector equivalente de norma 1, lo cual se consigue multiplicando $\vec{v}$ por $\frac{1}{|\vec{v}|}$

Ejemplo: Hemos visto que el vector $(4,3)$ tiene norma 5. El vector $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$, efectivamente, tiene norma 1

Se llama conjunto **ortonormal** a un conjunto *ortogonal* cuyos vectores tienen norma 1. Por lo tanto, sus elementos $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_n}\}$ cumplirán: $\vec{v_i} \cdot \vec{v_j} = 0$ y $\vec{v_i} \cdot \vec{v_i} = 1, \ \ \forall i, j = \{1, ..., n\}$

Ejercicio: Comprueba si son ortonormales los siguientes conjuntos. En caso de ser sólo ortogonales, ortonormalízalos.

- La base canónica de $\mathbb{R}^3$
- $\{(1,2,0),(4,-2,0)\}$

SUBESPACIO ORTOGONAL

Un vector $\vec{v}$ es ortogonal a un subespacio S ($\vec{v} \perp S$) si $\vec{v}$ es ortogonal a todos los vectores de S. Lógicamente, bastaría con comprobar que sea ortogonal a los vectores de una base de S

Ejemplo: En $\mathbb{R}^3$, el vector $(0, 0, 1)$ es ortogonal al plano XY

DEFINICIÓN

Un subespacio S es ortogonal a otro subespacio T ($S \perp T$) si todo vector de S es ortogonal a todo vector de T, es decir:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \forall \vec{u} \in S, \ \forall \vec{v} \in T$$

Basta con que los vectores de una base de S sean ortogonales a los vectores de una base de T

SUBESPACIO COMPLEMENTO ORTOGONAL

Dado un subespacio S, su **complementario/suplementario/complemento ortogonal** (o simplemente ortogonal, denotado por $S^\perp$) es el **único** subespacio que cumple:

- S y $S^\perp$ son subespacios complementarios/suplementarios. Es decir, $S \oplus S^\perp = U$ (siendo U el espacio total en el que estemos trabajando). Por tanto, $\boxed{dim S + dim S^\perp = n}$, con n la dimensión de U
- $S^\perp$ es ortogonal a S

Ejemplo: En $\mathbb{R}^3$, el subespacio formado por el plano XY tiene infinitos complementarios (toda recta que pase por el origen y no esté contenida en el propio plano), pero sólo uno de ellos es ortogonal, el eje Z

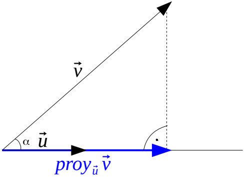
$S^\perp$ se construye buscando los vectores ortogonales a una base de S

Ejercicio: Obtén una base del complemento ortogonal del subespacio $S = \{(a, 0, 2a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ en $\mathbb{R}^4$

PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN VECTOR SOBRE UN SUBESPACIO

Para proyectar ortogonalmente un vector $\vec{v}$ sobre una recta (subespacio de $\mathbb{R}^n$ de dimensión 1) con vector director $\vec{u}$ bastaría con aplicar la siguiente fórmula:

$$proy_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}$$



Ejercicios:

- Demuestra que $proy_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}$
- En $\mathbb{R}^2$, proyecta el vector $(1, 2)$ sobre el $(3, 1)$

Generalizando, para proyectar un vector $\vec{v}$ sobre un subespacio S de $\mathbb{R}^n$, de dimensión m ($m < n$), podemos utilizar la **fórmula de la proyección**:

$$proy_S(\vec{v}) = proy_{\vec{u}_1}(\vec{v}) + ... + proy_{\vec{u}_m}(\vec{v}) =$$

$$= \frac{\vec{u}_1\cdot\vec{v}}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}\vec{u}_1 + ... + \frac{\vec{u}_m\cdot\vec{v}}{\vec{u}_m\cdot\vec{u}_m}\vec{u}_m$$

donde $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_m\}$ han de formar una **base ortogonal** de S

Ejercicio: En $\mathbb{R}^3$, proyecta el vector $(3, 2, 2)$ sobre el subespacio $S =< (2, 0, 1,), (0, 3, 0) >$

Cálculo de bases ortogonales: Método de Gram-Schmidt (I)

Acabamos de ver que para calcular la proyección de un vector sobre un subespacio S de $\mathbb{R}^n$, de dimensión m ($m < n$), se requiere una **base ortogonal** de S, $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_m\}$. Dicha base puede obtenerse a partir de otra cualquiera, $\{\vec{u'}_1, \vec{u'}_2, ..., \vec{u'}_m\}$, mediante el método de **Gram-Schmidt**

1. Tomamos como primer vector $\vec{u}_1 = \vec{u'}_1$
2. Para construir el segundo vector, tomamos $\vec{u'}_2$ y lo proyectamos sobre $\vec{u}_1$, quedándonos con la componente ortogonal a $\vec{u}_1$: $\vec{u}_2 = \vec{u'}_2 - proy_{\vec{u}_1}(\vec{u'}_2)$
3. Para construir el tercer vector, tomamos $\vec{u'}_3$ y lo proyectamos sobre $\vec{u}_1$ y sobre $\vec{u}_2$, quedándonos con las correspondientes componentes ortogonales: $\vec{u}_3 = \vec{u'}_3 - proy_{\vec{u}_1}(\vec{u'}_3) - proy_{\vec{u}_2}(\vec{u'}_3)$
4. etc.

Finalmente, si quisiéramos obtener una base no sólo ortogonal, si no también **ortonormal**, habría que normalizar los vectores $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_m\}$

CÁLCULO DE BASES ORTOGONALES: MÉTODO DE GRAM-SCHMIDT (II)

Ejemplo: Obtén una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ a partir de la siguiente: $\{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$

$$\vec{u}_1 = \vec{u'}_1 = (1,1,0)$$
$$\vec{u}_2 = \vec{u'}_2 - proy_{\vec{u}_1}(\vec{u'}_2) = \vec{u'}_2 - \frac{\vec{u}_1\cdot\vec{u'}_2}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}\vec{u}_1 = \left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2},1\right)$$
$$\vec{u}_3 = \vec{u'}_3 - proy_{\vec{u}_1}(\vec{u'}_3) - proy_{\vec{u}_2}(\vec{u'}_3) = \vec{u'}_3 - \frac{\vec{u}_1\cdot\vec{u'}_3}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}\vec{u}_1 - \frac{\vec{u}_2\cdot\vec{u'}_3}{\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2}\vec{u}_2 =$$
$$= \left(\frac{2}{3},\frac{-2}{3},\frac{2}{3}\right)$$

Base ortonormal:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2),\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)\right\}$$

Ejercicio: Obtén una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ a partir de la formada por los vectores $(1,1,-1)$, $(1,-1,1)$ y $(-1,1,1)$

Factorización QR

Toda matriz real $A_{m\times n}$ cuyas columnas sean linealmente independientes puede factorizarse de manera **única** como $A = QR$, donde las columnas de $Q_{m\times n}$ son una base **ortonormal** del subespacio que tiene por base las columnas de A, y $R_{n\times n}$ es una matriz triangular superior. En el caso de matrices A cuadradas, Q es **ortogonal** ($Q^{-1} = Q^t$)

Procedimiento para calcular la factorización QR:
Las columnas de Q son el resultado de aplicar Gram-Schmidt a las columnas de A y R se calcula para que se verifique la igualdad $A = QR$

Ejercicio: Halla la factorización QR de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

MATRIZ DE PROYECCIÓN (I)

La **matriz de proyección** permite obtener la proyección de un vector cualquiera $\vec{v}$ sobre un subespacio S de $\mathbb{R}^n$ sin necesidad de hallar una base ortogonal de S

$$proy_S(\vec{v}) = P_S\vec{v}$$

Se calcula como $\boxed{P_S = A(A^tA)^{-1}A^t}$, donde A es una matriz que contiene una **base cualquiera** de S en sus columnas

Nota: P_S es **única** y **no depende de la base de S escogida**. Esta matriz es especialmente útil si tenemos que proyectar varios vectores sobre un mismo subespacio

Ejercicio: En $\mathbb{R}^3$, proyecta el vector $(3, 2, 2)$ sobre el subespacio $S =< (2, 0, 1), (0, 3, 0) >$ haciendo uso de la matriz de proyección

MATRIZ DE PROYECCIÓN (II)

Toda matriz de proyección sobre un subespacio S de $\mathbb{R}^n$ es:

- Cuadrada de orden n
- Simétrica
- Idempotente ($P_S^2 = P_S$)

Y además, toda matriz que cumpla las tres propiedades anteriores, resulta ser matriz de proyección del subespacio de $\mathbb{R}^n$ que generan sus columnas

Ejemplo: La matriz P_S cumple las tres propiedades anteriores (comprueba la última). Es la matriz de proyección del subespacio S de $\mathbb{R}^3$ cuya base es $\{(1,1,0),(0,0,1)\}$

$$P_S = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz de proyección (III)

Ejercicio: Razona si la siguiente matriz puede ser una matriz de proyección. En tal caso, ¿a qué subespacio correspondería?

$$\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Observación

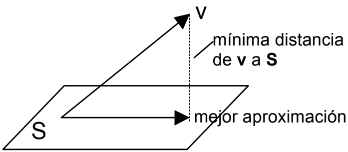
Si tenemos que proyectar un vector $\vec{v}$ sobre un subespacio S de $\mathbb{R}^n$, de dimensión m, y no disponemos de una base ortogonal de S, tendríamos dos opciones:

- Calcular una base ortogonal por Gram-Schmidt ($\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_m\}$) y utilizar la fórmula de la proyección: $proy_S(\vec{v}) = proy_{\vec{u}_1}(\vec{v}) + ... + proy_{\vec{u}_m}(\vec{v})$
- Hallar la matriz de proyección P_S y utilizarla para proyectar: $proy_S(\vec{v}) = P_S\vec{v}$

APLICACIONES PRÁCTICAS

Dado un vector $\vec{v}$ y un subespacio S de $\mathbb{R}^n$, de entre todos los vectores de S hay uno que es el más próximo a $\vec{v}$ (mejor aproximación a $\vec{v}$ en S), y es precisamente la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre S: $\boldsymbol{proy_S}(\vec{v})$. Para cualquier otro vector $\vec{w} \in S$ la distancia a $\vec{v}$ es mayor, es decir:

$$|\boldsymbol{proy_S}(\vec{v}) - \vec{v}| < |\vec{w} - \vec{v}|, \quad \forall\, \vec{w} \in \boldsymbol{S},\ \vec{w} \neq \boldsymbol{proy_S}(\vec{v})$$



Partiendo de esta idea se desarrollan a continuación un par de aplicaciones prácticas de interés: la resolución (aproximada) de sistemas incompatibles y el ajuste a una nube de puntos.

SOLUCIÓN APROXIMADA DE SISTEMAS INCOMPATIBLES (I)

MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS

Un sistema lineal $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene solución si existe $\vec{x}$ tal que $\vec{b}$ es C.L. de los vectores (columnas) de A, es decir, si $\vec{b}$ pertenece al subespacio generado por las columnas de A (llamémosle S). Que un sistema sea incompatible quiere decir que $\vec{b}$ no pertenece al subespacio S. En esta situación, podemos sustituir $\vec{b}$ por otro vector $\vec{c}$ que sí pertenezca al subespacio S. Lógicamente, $\vec{c}$ ha de ser la mejor aproximación de $\vec{b}$ en S. En definitiva, se trata de resolver el nuevo sistema compatible

$$A\vec{x}_{mc} = \vec{c} = proy_S(\vec{b})$$

donde S es el subespacio generado por las columnas de A

$\vec{c}$ cumple aproximadamente las ecuaciones del sistema y el error cuadrático cometido (que es lo que trata de minimizar este método) será:

$$error = |\ \vec{c} - \vec{b}\ |^2$$

SOLUCIÓN APROXIMADA DE SISTEMAS INCOMPATIBLES (II)

Ejemplo: Resuelve el siguiente sistema por mínimos cuadrados y estima el error cuadrático cometido:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y & = & 0 \\ x & = & 1 \\ y & = & 1 \end{array}\right. \qquad A\vec{x}=\vec{b} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{b}=(0,1,1)$ no pertenece al subespacio S generado por los vectores $(2,1,0)$ y $(3,0,1)$, por lo que tendremos que buscar nuestro $\vec{c}$ adecuado. Una base de S es la formada por los vectores $(2,1,0)$ y $(3,0,1)$, puesto que son L.I. Con esta base, podemos calcular la matriz de proyección P_S, y a partir de ella, el vector $\vec{c}$:

$$\vec{c}=proy_S(\vec{b})=P_s\vec{b}=A(A^tA)^{-1}A^t\vec{b}=\begin{pmatrix} 5/14 \\ 2/7 \\ -1/14 \end{pmatrix}, \text{ siendo } A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El nuevo sistema $A\vec{x}_{mc}=\vec{c}$ es compatible determinado, y su solución es $\vec{x}_{mc}=(\frac{2}{7},-\frac{1}{14})$ (puedes comprobarlo con MATLAB). El error cuadrático cometido será:

$$error=\left|\vec{c}-\vec{b}\right|^2=\left|\left(\frac{5}{14},\frac{2}{7},\frac{-1}{14}\right)-(0,1,1)\right|^2\simeq 1.79$$

SOLUCIÓN APROXIMADA DE SISTEMAS INCOMPATIBLES (III)

OBSERVACIÓN

Dado un sistema de ecuaciones incompatible $A\vec{x} = \vec{b}$, si las columnas de A son linealmente independientes, la solución aproximada por mínimos cuadrados será única, y se puede obtener como:

$$\vec{x}_{mc} = (A^t A)^{-1} A^t \vec{b}$$

Ejercicios:

- Demuestra la observación anterior
- Resuelve, por mínimos cuadrados, el siguiente sistema incompatible. ¿Cuál es el error cuadrático que se comete? (puedes utilizar MATLAB)

$$\left\{ \begin{array}{rcr} -x + 4y & = & 15 \\ y & = & 6 \\ -y & = & 4 \\ x - 2y & = & -5 \end{array} \right.$$

AJUSTE A UNA NUBE DE PUNTOS (I)

Dada una nube de puntos (por ejemplo, un conjunto de puntos obtenidos mediante resultados experimentales), podemos buscar la función (recta, parábola, etc.) que mejor se ajuste a dichos puntos. La idea es plantear el sistema que resulte de forzar a que la función aproximadora/interpoladora pase por todos los puntos de la nube, que en principio será incompatible, y resolverlo mediante mínimos cuadrados

Ejemplo: Busca la recta que mejor se ajuste a los puntos $(1,2)$, $(2,3)$ y $(3,5)$
La ecuación de una recta es de la forma $y = mx + n$. Si pasara por los tres puntos, debería cumplirse:

$$\left\{\begin{array}{ll} 2 & = m \cdot 1 + n \\ 3 & = m \cdot 2 + n \\ 5 & = m \cdot 3 + n \end{array}\right. \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}, \text{ S.I.}$$

Como las columnas de A son L.I. podemos hallar directamente la solución aproximada de mínimos cuadrados como:

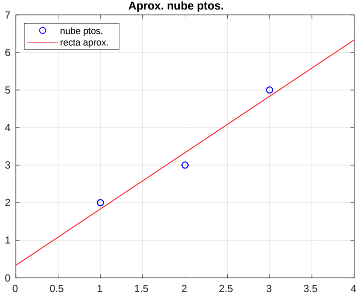
$$\vec{x}_{mc} = (A^t A)^{-1} A^t \vec{b} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ la recta que buscamos es } y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{3}$$

AJUSTE A UNA NUBE DE PUNTOS (II)

Podemos ver, con ayuda de MATLAB, cuán buena es nuestra aproximación

```
x0 = [1 2 3];  % x nube
y0 = [2 3 5];  % y nube
plot(x0, y0, 'ob') % dibujo nube

syms x  % variable simbólica
y = 3/2*x + 1/3;  % recta aproximadora
hold on
fplot(y, [0 4], 'r')  % dibujo recta
title('Aprox. nube ptos.')
legend('nube ptos.', 'recta aprox.',...
    'Location', 'northwest')
grid on
```



El error cuadrático cometido será:

$$error = \left|\vec{c} - \vec{b}\right|^2 = \left|A\vec{x}_{mc} - \vec{b}\right|^2 = \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right|^2 \simeq 0.167$$

A medida que aumenta el grado del polinomio interpolador, disminuye el error cometido en la aproximación. En este ejempl, si en lugar de una recta hubiésemos escogido como función aproximadora una parábola ($y = mx^2 + nx + p$), el error sería **cero**. **Para una nube con n puntos, siempre habrá un polinomio de grado $n-1$ que pase por todos ellos**.