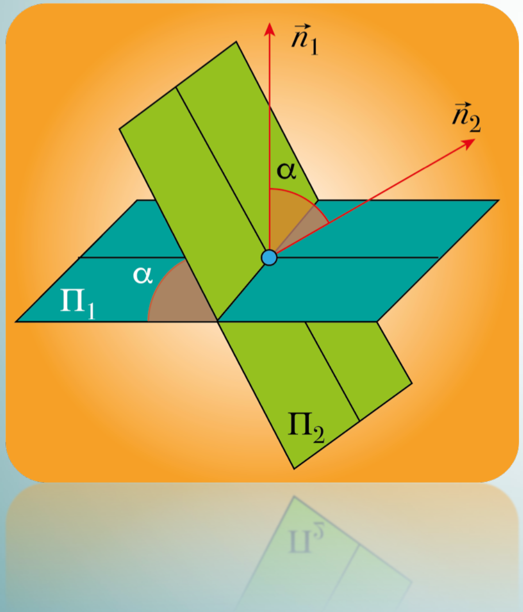
Álgebra y Geometría

Tema 6. Diagonalización



Rodrigo García Manzanas

Ruth Carballo Fidalgo

DPTO. DE MATEMÁTICA APLICADA Y CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

ENDOMORFISMO (I)

Un **endomorfismo** es una aplicación lineal en la que el espacio inicial y el final son el mismo, $f : V \longrightarrow V$. La matriz de un endomorfismo será por tanto cuadrada de orden n, siendo n la dimensión de V

Recuerda que $\boxed{dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) = n}$. Por tanto, un endomorfismo ha de ser *i)* inyectivo y suprayectivo a la vez (biyectivo), o *ii)* ninguna de las dos cosas

Ejercicio: Clasifica los siguientes endomorfismos:

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
  $(x, y) \rightsquigarrow (-x + y, 3y)$
- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
  $(x, y) \rightsquigarrow (2x, x)$

ENDOMORFISMO (II)

En un endomorfismo f estaremos en la siguiente situación:

$$V \xrightarrow{f} V$$

$$\begin{tikzcd} BC_V \arrow[r, "A"] \arrow[d, shift right, "P^{-1}"'] & BC_V \arrow[d, shift right, "P^{-1}"'] \\ B \arrow[r, "M"] \arrow[u, shift right, "P"'] & B \arrow[u, shift right, "P"'] \end{tikzcd}$$

Por tanto, $M = P^{-1}AP$ (o $A = PMP^{-1}$)

Por ser matrices (cuadradas) del mismo endomorfismo en bases distintas, se dice que A y M son **semejantes**. En este tipo de matrices se cumple:

- $tr(A) = tr(M)$
- $det(A) = det(M)$
- A y M tienen los mismos autovalores

En este tema se tratará de ver si, dada una matriz **cuadrada real** A, existe otra matriz *semejante* a ella que sea diagonal, D, tal que se cumpla la relación $D = P^{-1}AP$ (o $A = PDP^{-1}$). En otras palabras: dado un endomorfismo, trataremos de encontrar una base en la cual la matriz del mismo sea diagonal (P será por tanto la matriz de paso que contiene en sus columnas esa nueva base). Para ello se utilizarán los **valores y vectores propios**

VALORES Y VECTORES PROPIOS

Si un vector $\vec{v}$ no nulo cumple que $f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ (con λ escalar $\in \mathbb{R}$), se dice que $\vec{v}$ es un **vector propio** (o autovector) de f, y que λ es su **valor propio** (o autovalor) asociado. Además, todos los vectores propios $\vec{v}$ asociados a λ forman un subespacio vectorial, V_λ, al que llamaremos **subespacio propio** de λ

CÁLCULO DE VALORES Y VECTORES PROPIOS

1. Plantear el **polinomio característico** de A: $|A-\lambda I|$. Los autovalores serán las raíces de este polinomio de grado (máximo) n en λ

   Nota: Puede haber valores propios cuya multiplicidad sea mayor que 1. Por ejemplo, en el polinomio característico $(4-\lambda)^3(5+\lambda)$, el autovalor 4 tiene multiplicidad 3, y el -5 tiene multiplicidad 1. Utilizaremos la siguiente notación: $m(4)=3$, $m(-5)=1$

2. Para cada valor propio λ_i, resolver el sistema $(A-\lambda_i I)\vec{v}=\vec{0}$, con $\vec{v}\in V$. Las soluciones a este sistema serán los autovectores asociados a λ_i, es decir, V_{λ_i}

   Notas:

   - Date cuenta que $V_{\lambda_i}=Ker(A-\lambda_i I)$
   - $\boxed{dim(V_{\lambda_i})=n-rg(A-\lambda_i I)}$ y $\boxed{1\leq dim(V_{\lambda_i})\leq m(\lambda_i)}$

Ejercicio: Dado el endomorfismo $f:(x,y)\in\mathbb{R}^2\rightsquigarrow(3x+2y,y)\in\mathbb{R}^2$, calcula sus autovalores y los subespacios propios asociados a estos autovalores

Sea A la matriz de un endomorfismo. Entonces:

Propiedades de los autovectores

- Los autovectores asociados a autovalores distintos son L.I.

Propiedades de los autovalores (I)

- Si A es diagonal o triangular, sus autovalores son directamente los elementos de la diagonal
- La suma de todos los autovalores de una matriz, contando cada uno de ellos tantas veces como indica su multiplicidad, es igual a su traza
- El producto de todos los autovalores de una matriz, contando cada uno de ellos tantas veces como indica su multiplicidad, es igual a su determinante

PROPIEDADES DE LOS AUTOVALORES (II)

- Los autovalores de un endomorfismo son los mismos respecto de cualquier base. Por tanto, cualquier matriz de un endomorfismo, respecto de cualquier base, tiene la misma traza y el mismo determinante
- Una matriz es singular si $\lambda = 0$ es autovalor
- Los autovalores de A son los mismos que los de A^t
- Si los autovalores de A son $\{\lambda_1, ..., \lambda_r\}$:
  - Los de A^k son $\{\lambda_1^k, ..., \lambda_r^k\}$
  - Los de αA (con α escalar $\in \mathbb{R}$) son $\{\alpha\lambda_1, ..., \alpha\lambda_r\}$
  - Los de A^{-1} (simpre que A^{-1} exista) son $\left\{\frac{1}{\lambda_1}, ..., \frac{1}{\lambda_r}\right\}$

Procedimiento general para diagonalizar un endomorfismo (I)

Comprobar si A, **real**, es diagonalizable:

1. Resolver la ecuación $|A - \lambda I| = 0$ para obtener los valores propios. Si alguno de ellos no es real, el endomorfismo no es diagonalizable
2. Para cada λ_i $(i = \{1, ..., r\})$, hallar una base del subespacio propio asociado V_{λ_i} y obtener su dimensión, comprobando que $dim(V_{\lambda_i}) = m(\lambda_i)$. Si algún autovalor no verifica lo anterior, el endomorfismo no es diagonalizable

Ejercicio: Comprueba si los siguientes endomorfismos son diagonalizables:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, cuyo polinomio característico es $-(7-\lambda)^2(\lambda+2)$

En caso de serlo, obtén una base de sus subespacios propios

Procedimiento general para diagonalizar un endomorfismo (II)

Si efectivamente A, **real**, es diagonalizable:

1. La diagonal de D estará formada por los valores propios
   Nota: Para que D sea $n \times n$ se necesitarán n elementos en la diagonal, así que habrá que repetir cada valor propio λ_i tantas veces como indique su multiplicidad
2. La base respecto a la cual el endomorfismo es diagonalizable es la formada por la unión de las bases de todos los subespacios propios (date cuenta que $\sum_{i=1}^{r} dim(V_{\lambda_i}) = n$). P es una matriz que tiene, en columnas, los vectores de esta base (que será una base de autovectores de V)
   Nota: Ha de respetarse el mismo orden al colocar los valores propios en la diagonal de D y los correspondientes vectores propios en las columnas de P

En resumen: Si B es una base formada por vectores propios de f, la matriz de f en la base B es diagonal (D). Estaríamos en la siguiente situación:

ENDOMORFISMO DIAGONALIZABLE

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "f"] & & V \\
BC_V \arrow[rr, "A"] \arrow[d, shift right, "P^{-1}"'] & & BC_V \arrow[d, shift right, "P^{-1}"'] \\
B \text{ (vectores propios)} \arrow[u, shift right, "P"'] \arrow[rr, "D\ (diagonal)"] & & B \text{ (vectores propios)} \arrow[u, shift right, "P"']
\end{tikzcd}$$

Como ya sabemos, se cumplirá que $A = PDP^{-1}$

Ejercicio: Comprueba si son diagonalizables los siguientes endomorfismos:

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
  $(x, y) \rightsquigarrow (3x + 2y, y)$
- $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
  $(x, y, z) \rightsquigarrow (x - 4y, -y, 2y + z)$

En caso de serlo, obtén las matrices D y P y comprueba que se cumple la relación $A = PDP^{-1}$. ¿Qué pasa con la traza y el determinante de las matrices A y D?

Diagonalización ortogonal de matrices simétricas

Una matriz $A_{n\times n}$ es diagonalizable ortogonalmente si y sólo si existe P **ortogonal** tal que $P^{-1}AP = P^tAP = D$. Recuerda que para que P sea ortogonal sus columnas tienen que ser **ortonormales**.

Teorema

Toda matriz real simétrica es diagonalizable. Además, en este tipo de matrices, los subespacios propios asociados a distinto valor propio son ortogonales

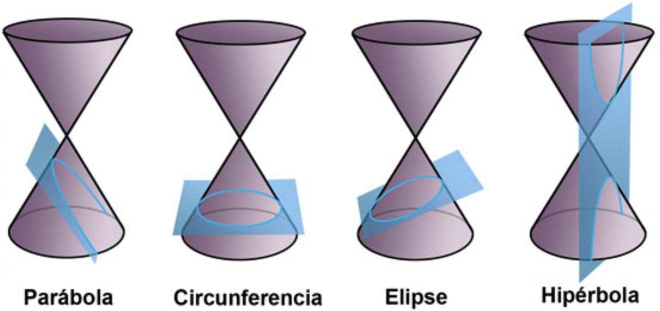
Ejercicio: Diagonaliza (ortogonalmente) la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Comprueba que se cumple la relación $P^tAP = D$ y que V_{λ_1} y V_{λ_2} son ortogonales.

Cónicas

Cónicas

Curvas que se obtienen al cortar un cono con diferentes planos, como se muestra en la siguiente figura:

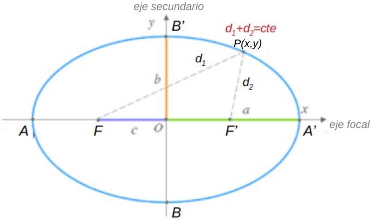


En este tema nos centraremos en el estudio de la elipse y la hipérbola

LA ELIPSE (I)

ELIPSE

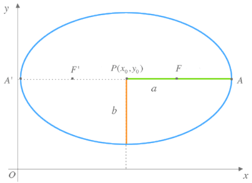
Lugar geométrico de los puntos del plano tal que la suma de las distancias a dos puntos fijos denominados focos, F y F', es constante



- Eje focal: Recta que pasa por los focos
  - Eje mayor: Segmento $\overline{AA'}$, de longitud $2a$ (a es la longitud del semieje mayor)
- Eje secundario: Recta mediatriz del segmento $\overline{FF'}$
  - Eje menor: Segmento $\overline{BB'}$, de logitud $2b$ (b es la longitud del semieje menor)
- Vértices: A, A', B y B' (puntos de intersección de la elipse con los ejes focal y secundario)
- Distacia focal: Segmento $\overline{FF'}$, de longitud $2c$, siendo $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ la distancia desde el origen a los focos
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$, con $0 \leq e \leq 1$

LA ELIPSE (II)

Elipse de eje focal horizontal centrada en un punto cualquiera $P(x_0, y_0)$

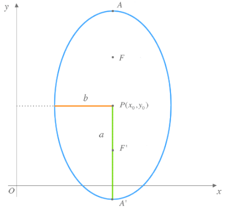


Ecuación **canónica**:

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1}$$

- $a > b$, a en eje focal, b en eje secundario
- Vértices: $V_{A,A'}(x_0 \pm a, y_0)$, $V_{B,B'}(x_0, y_0 \pm b)$
- Focos: $F(x_0 \pm c, y_0)$

Elipse de eje focal vertical centrada en un punto cualquiera $P(x_0, y_0)$



Ecuación **canónica**:

$$\boxed{\frac{(y-y_0)^2}{a^2} + \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1}$$

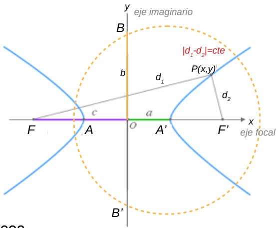
- $a > b$, a en eje focal, b en eje secundario
- Vértices: $V_{A,A'}(x_0, y_0 \pm a)$, $V_{B,B'}(x_0 \pm b, y_0)$
- Focos: $F(x_0, y_0 \pm c)$

Nota: En este tema sólo estudiaremos elipses centradas en el origen, $(x_0 = 0, y_0 = 0)$

LA HIPÉRBOLA (I)

HIPÉRBOLA

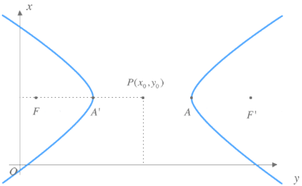
Lugar geométrico de los puntos del plano tal que la diferencia de distancias (en valor absoluto) a dos puntos fijos denominados focos, F y F', es constante



- Eje focal: Recta que pasa por los focos
  - Eje mayor: Segmento $\overline{AA'}$, de longitud $2a$ (a es la longitud del semieje mayor)
- Eje secundario (imaginario): Recta mediatriz del segmento $\overline{FF'}$
  - Eje menor: Segmento $\overline{BB'}$, de longitud $2b$ (b es la longitud semieje menor). Los puntos B y B' se obtienen como intersección del eje imaginario con la circunferencia que tiene por centro uno de los vértices y radio c
- Vértices: A y A' (puntos de intersección de la hipérbola con el eje focal)
- Distacia focal: Segmento $\overline{FF'}$, de longitud $2c$, siendo $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ la distancia desde el origen a los focos
- Excentricidad, $e = \frac{c}{a}$, con $e \geq 1$

LA HIPÉRBOLA (II)

Hipérbola de eje focal horizontal centrada en un punto cualquiera $P(x_0, y_0)$

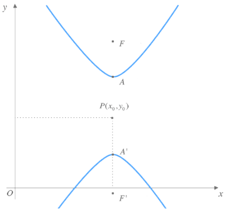


Ecuación **canónica**:

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1}$$

- a en eje focal, b en eje imaginario
- Vértices: $V_{A,A'}(x_0 \pm a, y_0)$
- Focos: $F(x_0 \pm c, y_0)$
- Asíntotas: $y - y_0 = \pm\frac{b}{a}(x - x_0)$

Hipérbola de eje focal vertical centrada en un punto cualquiera $P(x_0, y_0)$



Ecuación **canónica**:

$$\boxed{-\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1}$$

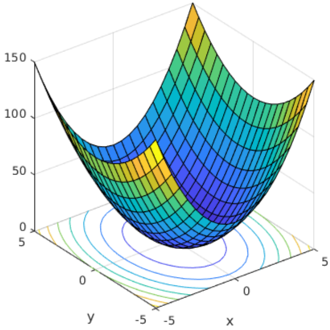
- a en eje focal, b en eje imaginario
- Vértices: $V_{A,A'}(x_0, y_0 \pm a)$
- Focos: $F(x_0, y_0 \pm c)$
- Asíntotas: $y - y_0 = \pm\frac{a}{b}(x - x_0)$

Nota: En este tema sólo estudiaremos hipérbolas centradas en el origen, $(x_0 = 0, y_0 = 0)$

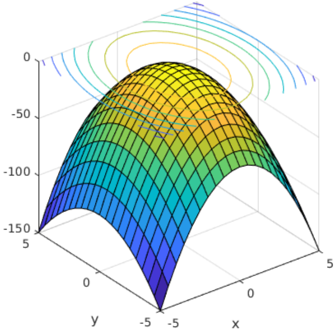
LAS CÓNICAS COMO FORMAS CUADRÁTICAS (I)

Es fácil ver gráficamente que las elipses y las hipérbolas se obtienen a partir de distintos tipos de formas cuadráticas:

- Las formas cuadráticas **definidas positivas** y las **definidas negativas** dan lugar a **elipses** al corte con un plano $z = cte \neq 0$



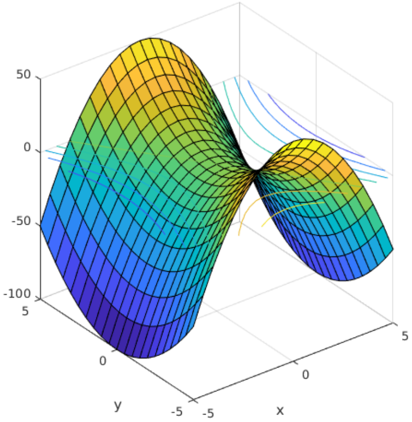
$Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$



$Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

LAS CÓNICAS COMO FORMAS CUADRÁTICAS (II)

- Las formas cuadráticas **mixtas** o **indefinidas** dan lugar a **hipérbolas** al corte con un plano $z = cte \neq 0$



$$Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

DIAGONALIZACIÓN DE CÓNICAS (I)

TEOREMA

Toda forma cuadrática $Q : \vec{x} \in \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \vec{x}A\vec{x}^t \in \mathbb{R}$ en la que existan términos cruzados puede reducirse a otra equivalente $Q(\vec{x'}) = \lambda_1 x'^2_1 + ... + \lambda_n x'^2_n$ mediante un cambio adecuado de coordenadas $P\vec{x'}^t = \vec{x}^t$, donde P es una matriz ortogonal ($P^t P = I$), siendo los coeficientes $\lambda_1, ..., \lambda_n$ (algunos pueden estar repetidos) los valores propios de la matriz A asociada a Q. Se cumplirá que $A = PDP^t$, donde D es la matriz diagonal que contiene dichos autovalores

Dado que los términos $x'^2_{i=\{1,...,n\}}$ serán forzosamente positivos, las formas cuadráticas se pueden clasificar atendiendo a los autovalores de A:

- Q **definida positiva** si $\lambda_{i=\{1,...,n\}} > 0 \Rightarrow$ elipses
- Q **definida negativa** si $\lambda_{i=\{1,...,n\}} < 0 \Rightarrow$ elipses
- Q **semidefinida positiva** si $\lambda_{i=\{1,...,n\}} \geq 0 \Rightarrow$ par de rectas (cón. degenerada)
- Q **semidefinida negativa** si $\lambda_{i=\{1,...,n\}} \leq 0 \Rightarrow$ par de rectas (cón. degenerada)
- Q **indefinida** si $\exists\, i, j \mid \lambda_i > 0, \lambda_j < 0 \Rightarrow$ hipérbolas

DIAGONALIZACIÓN DE CÓNICAS (II)

Imaginemos una cónica en $\mathbb{R}^2$ definida por una ecuación del tipo $Q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 = k$, con $b \neq 0$. Nuestro objetivo será eliminar el **término cruzado**, que nos indica que la cónica está **rotada** respecto de los ejes coordenados de la base canónica. Para ello necesitaremos encontrar una nueva base, B, en la cual la cónica esté orientada según los nuevos ejes coordenados. Esto nos permitirá escribir su ecuación en forma **canónica**, por lo que nos resultará muy fácil identificar de qué tipo de cónica se trata y cuáles sus elementos característicos. El procedimiento es el siguiente:

1. Buscamos la expresión matricial de la forma cuadrática:
$$Q(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ con } A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$$
2. Diagonalizamos **ortogonalmente** A:
A es simétrica, por lo que es ortogonalmente diagonalizable $\Rightarrow \exists\, P$ ortogonal tal que $P^t A P = D$. No olvides que habrá que normalizar los autovectores de A antes de colocarlos como columnas de P

DIAGONALIZACIÓN DE CÓNICAS (III)

3 P es la matriz de paso de la nueva base B a la base canónica de $\mathbb{R}^2$, por lo que:

$$P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} P^t = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la expresión matricial de Q, quedaría:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} PDP^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} P^t PD \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} =$$
$$\boxed{\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}$$

DIAGONALIZACIÓN DE CÓNICAS (IV)

4 Ya podemos obtener la expresión canónica de la cónica respecto de la nueva base B, que sería la compuesta por los vectores que aparecen en columnas en P

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = k \Rightarrow \boxed{\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = k}$$

5 Las columnas de P indican la dirección y sentido positivo de los nuevos ejes coordenados. Si $det(P) = 1$, dichos ejes tendrán la misma orientación relativa que los canónicos. Si $det(P) = -1$, podremos cambiar la ordenación de sus columnas (así como las de D) convenientemente para que $det(P)$ pase a ser 1

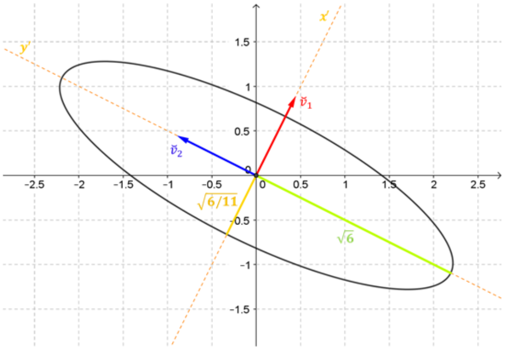
CANONIZACIÓN DE UNA ELIPSE ROTADA (I)

Ejemplo: ¿Qué tipo de cónica representa la ecuación $3x^2 + 8xy + 9y^2 = 6$? Determina cuáles son sus ejes principales y obtén su ecuación canónica (en relación a la base formada por dichos ejes).

1. La matriz de la forma cuadrática asociada es $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$, simétrica
2. Diagonalizamos **ortogonalmente** A, obteniendo las matrices $D = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Los autovalores en D nos indican que la cónica será una elipse. Los vectores $\vec{v_1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$ y $\vec{v_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1)$ marcan la dirección de sus **ejes principales**
3. En la nueva base **ortonormal** $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$, la ecuación de la cónica pasará a ser $11x'^2 + 1y'^2 = 6$, que podemos escribir en su forma canónica como $\frac{x'^2}{\frac{6}{11}} + \frac{y'^2}{6} = 1$. Está claro que se trata de una elipse con eje focal vertical

CANONIZACIÓN DE UNA ELIPSE ROTADA (II)

$$\frac{x'^2}{\frac{6}{11}} + \frac{y'^2}{6} = 1, \text{ con } a^2 = 6 \text{ , } b^2 = \frac{6}{11}$$



La presencia del término cruzado $8xy$ hace que la elipse no esté orientada según los ejes coordenados de la base canónica, $\{(1,0),(0,1)\}$. Fíjate además en que $det(P) = 1$, por lo que la base $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ y la canónica tienen la misma orientación relativa. Esto quiere decir que para ir desde $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_2$ habría que avanzar un ángulo $\frac{\pi}{2}$ en el sentido antihorario; lo mismo que haríamos para ir desde $(1,0)$ a $(0,1)$

CANONIZACIÓN DE UNA HIPÉRBOLA ROTADA (I)

Ejemplo: ¿Qué tipo de cónica representa la ecuación $x^2 + 4xy + y^2 = 9$? Determina cuáles son sus ejes principales y obtén su ecuación canónica (en relación a la base formada por dichos ejes).

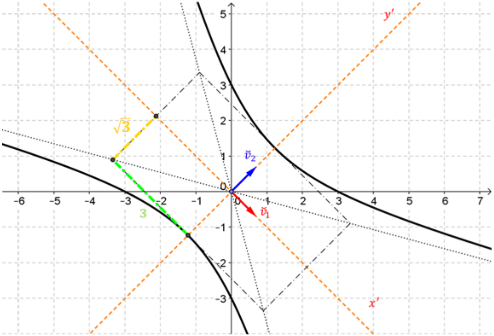
1. La matriz de la forma cuadrática asociada es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, simétrica

2. Diagonalizamos **ortogonalmente** A, obteniendo las matrices $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Los autovalores en D nos indican que la cónica será una hipérbola. Los vectores $\vec{v_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$ y $\vec{v_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ marcan la dirección de sus **ejes principales**

3. En la nueva base **ortonormal** $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$, la ecuación de la cónica pasaría a ser $-x'^2 + 3y'^2 = 9$, que podemos escribir en su forma canónica como $-\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{3} = 1$. Está claro que se trata de una hipérbola con eje focal vertical

CANONIZACIÓN DE UNA HIPÉRBOLA ROTADA (II)

$$-\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{3}=1, \text{ con } b^2=9\ ,\ a^2=3$$



La presencia del término cruzado $4xy$ hace que la hipérbola no esté orientada según los ejes coordenados de la base canónica, $\{(1,0),(0,1)\}$. Fíjate además en que $det(P)=1$, por lo que la base $\{\vec{v_1},\vec{v_2}\}$ y la canónica tienen la misma orientación relativa. Esto quiere decir que para llegar desde $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_2$ habría que avanzar un ángulo $\frac{\pi}{2}$ en el sentido antihorario; lo mismo que haríamos para ir desde $(1,0)$ hasta $(0,1)$

Ejercicios:

- Obtén una base en función de la cual la cónica $Q(x, y) = 5x^2 - 4xy + 5y^2 = 42$ se sitúe sobre los correspondientes ejes coordenados. ¿Qué tipo de cónica es? Con respecto a la base canónica:
  - ¿Cuál es el ángulo que está rotada?
  - ¿Cuáles son las coordenadas de sus vértices?
  - ¿Cuáles son las coordenadas de sus focos?
- Ídem para $Q(x, y) = x^2 - 4xy + y^2 = 6$