6.718"'(9(:1/ ;1%"<'

!"#$%&$'()*+(, -.&$'$&/O12(.&O1'.12(3445

=/>"&7/(: '"$<'(? 'O@'O'2
=A%B(C'"8'../(D&>'.7/

! "#$%&$ ' "(&)*+"* , $&" ' -&./$*O#1./$+$*2
3."(/.$4*+"*1$*3) ' #5&$/.6(

74&"*&" ' $*4"*#581./$*8$9)*:./"(/.$;
3%"$&.<"*3) ' ')(4*=>?@3?AO*BCD

Grado en Ingeniería Civil

G1954: Álgebra y Geometría

Práctica 10: Aplicaciones lineales (II)

Rodrigo García Manzanas (rodrigo.manzanas@unican.es)

Ruth Carballo Fidalgo (ruth.carballo@unican.es)

Objetivos

- Trabajar con reflexiones y rotaciones
- Dibujar vectores en el plano

Reflexiones

Para obtener el reflejado de un vector dado respecto a un cierto eje de simetría (simetría axial), bastaría con aplicarle a dicho vector la matriz de Householder $H = I - 2\frac{\vec{u}\,\vec{u}^t}{|\vec{u}|^2}$, donde $\vec{u}$ puede ser cualquier vector columna ortogonal al eje de reflexión/simetría. Por ejemplo, si quisiéramos hallar la matriz de reflexión con respecto al subespacio S de $\mathbb{R}^2$ cuya ecuación implícita es $x - y = 0$, comenzaríamos por encontrar un vector ortogonal (perpendicular) a S. Sabemos que este vector podría ser simplemente el $(1, -1)$. Por tanto, ya podríamos calcular la matriz H que necesitamos:

```
u = [1 -1]'  % vector ortogonal a S
```

```
u = 2×1
     1
    -1
```

```
H = eye(2) - 2*(u*u'/norm(u)^2)  % matriz de reflexión (o de Householder)
```

```
H = 2×2
    0.0000    1.0000
    1.0000    0.0000
```

```
% con respecto a S
```

Se puede comprobar fácilmente que la matriz H que acabamos de obtener es correcta. Por un lado, fíjate que al aplicarle H al vector $\vec{u}$, obtenemos $-\vec{u}$:

```
H*u + u  % comprobación 1 (H*u = -u)
```

```
ans = 2×1
10^-15 ×
    0.4441
   -0.4441
```

Por otro lado, al aplicarle H a un vector $\vec{v} \in S$, obtendremos el propio $\vec{v}$:

```
v = [5 5]'  % vector perteneciente a S (recta y=x)
```

```
v = 2×1
     5
     5
```

```
H*v - v  % comprobación 2 (H*v = v)
```

```
ans = 2×1
     0
     0
```

Veamos además que H cumple el resto de propiedades que caracterizan a una matriz de Householder:

```
issymmetric(H)  % H es simétrica
```

```
ans = logical
   1
```

```
H' - inv(H)  % H es ortogonal
```

```
ans = 2×2
10^-15 ×
    0.4441   -0.4441
   -0.4441    0.4441
```

```
H^2 - eye(2)  % H es involutiva
```

```
ans = 2×2
10^-15 ×
   -0.4441    0.4441
    0.4441   -0.4441
```

En $\mathbb{R}^2$, podríamos llevar cualquier vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$ sobre los ejes coordenados conservando su norma.

Por ejemplo, si quisiéramos llevar el vector $\vec{v} = (8, 5)$ sobre el semieje OX^+, resultando el $\vec{v'} = (|\vec{v}|, 0)$,

sólo habría que encontrar un vector $\vec{u}$ ortogonal al eje de reflexión requerido, que se puede calcular como

$\vec{u} = \vec{v} - \vec{v'}$ (o $\vec{u} = \vec{v'} - \vec{v}$). A partir de $\vec{u}$ es inmediato calcular la matriz de Householder H que habría que

aplicar a $\vec{v}$:

```
v = [8 5]'  % vector inicial
```

```
v = 2×1
```

```
     8
     5
```

```
vprima = [norm(v) 0]'  % vector final al que tenemos que llegar
```

```
vprima = 2×1
    9.4340
         0
```

```
u = v-vprima  % vec. ortogonal al eje de reflex. (también valdría el vprima-v)
```

```
u = 2×1
   -1.4340
    5.0000
```

```
H = eye(2) - 2*(u*u'/norm(u)^2)  % matriz de Householder que buscamos
```

```
H = 2×2
    0.8480    0.5300
    0.5300   -0.8480
```

```
H*v  % vector resultante
```

```
ans = 2×1
    9.4340
   -0.0000
```

Siguiendo el mismo razonamiento, si quisiéramos llevar $\vec{v}$ sobre el semieje OX^- tendríamos que imponer que $\vec{v}' = (-|\vec{v}|, 0)$:

```
vprima = [-norm(v) 0]'  % vector final al que tenemos que llegar
```

```
vprima = 2×1
   -9.4340
         0
```

```
u = v-vprima  % vec. ortogonal al eje de reflex. (también valdría el vprima-v)
```

```
u = 2×1
   17.4340
    5.0000
```

```
H = eye(2) - 2*(u*u'/norm(u)^2)  % matriz de Householder que buscamos
```

```
H = 2×2
   -0.8480   -0.5300
   -0.5300    0.8480
```

```
H*v  % vector resultante
```

```
ans = 2×1
   -9.4340
    0.0000
```

Del mismo modo, para llevar $\vec{v}$ sobre el semieje OY^{+} (conservando su norma), habría que imponer que $\vec{v'} = (0, |\vec{v}|)$:

```
vprima = [0 norm(v)]'  % vector final al que tenemos que llegar
```

```
vprima = 2×1
         0
    9.4340
```

```
u = v-vprima  % vec. ortogonal al eje de reflex. (también valdría el vprima-v)
```

```
u = 2×1
    8.0000
   -4.4340
```

```
H = eye(2) - 2*(u*u'/norm(u)^2)  % matriz de Householder que buscamos
```

```
H = 2×2
   -0.5300    0.8480
    0.8480    0.5300
```

```
H*v  % vecto resultante
```

```
ans = 2×1
   -0.0000
    9.4340
```

Por último, para llevar $\vec{v}$ sobre el semieje OY^{-} (conservando su norma), habría que imponer que $\vec{v'} = (0, -|\vec{v}|)$:

```
vprima = [0 -norm(v)]'  % vector final al que tenemos que llegar
```

```
vprima = 2×1
         0
   -9.4340
```

```
u = v-vprima  % vec. ortogonal al eje de reflex. (también valdría el vprima-v)
```

```
u = 2×1
    8.0000
   14.4340
```

```
H = eye(2) - 2*(u*u'/norm(u)^2)  % matriz de Householder que buscamos
```

```
H = 2×2
    0.5300   -0.8480
   -0.8480   -0.5300
```

```
H*v  % vector resultante
```

```
ans = 2×1
   -0.0000
   -9.4340
```

Rotaciones

En $\mathbb{R}^2$, podremos rotar cualquier vector un ángulo α sin más que aplicarle la siguiente matriz, llamada matriz de Givens.

$$G = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) \\ \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

<u>*Nota*</u>: Recuerda que α positivos (negativos) dan lugar a giros en el sentido antihorario (horario).

Por tanto, para obtener la matriz de Givens que coloca a $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ sobre el semieje OX^+ (conservando su norma), bastaría con resolver el siguiente sistema (compatible determinado), en el que las incógnitas son $sen(\alpha)$ y $cos(\alpha)$:

$$\begin{bmatrix} -v_2 & v_1 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{sen}(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left|\vec{v}\right| \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lógicamente, si lo que nos interesa es colocar $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ sobre el semieje OX^- (conservando su norma), el sistema a resolver sería:

$$\begin{bmatrix} -v_2 & v_1 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{sen}(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left|\vec{v}\right| \\ 0 \end{bmatrix}$$

Siguiendo el mismo razonamiento, para obtener la matriz de Givens que coloca a $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ sobre el semieje OY^+ (conservando su norma), bastaría con resolver el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} -v_2 & v_1 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{sen}(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \left|\vec{v}\right| \end{bmatrix}$$

Y para colocar a $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ sobre el semieje OY^- (conservando su norma), el sistema a resolver sería:

$$\begin{bmatrix} -v_2 & v_1 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{sen}(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\left|\vec{v}\right| \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, la matriz de Givens que permite colocar el vector $\vec{v} = (8, 5)$ sobre el semiee OX^+ haríamos lo siguiente:

```
% Sobre el semieje OX+
v = [8 5]'
```

```
v = 2×1
     8
     5
```

```
sol = [-v(2) v(1); v(1) v(2)]\[norm(v) 0]'
```

```
sol = 2×1
   -0.5300
    0.8480
```

```
s = sol(1)  % sen(alpha)
```

```
s = -0.5300
```

```
c = sol(2)  % sen(alpha)
```

```
c = 0.8480
```

```
G = [c -s; s c]  % matriz de Givens necesaria
```

```
G = 2×2
    0.8480    0.5300
   -0.5300    0.8480
```

Podemos ver que G es una matriz ortogonal con determinante 1:

```
G' - inv(G)  % G es ortogonal
```

```
ans = 2×2
10^-15 ×
   -0.2220    0.1110
   -0.1110   -0.1110
```

```
det(G)
```

```
ans = 1.0000
```

Además:

```
vprima = G*v  % vector rotado
```

```
vprima = 2×1
    9.4340
         0
```

```
norm(v) - norm(vprima)  % comprobación: la norma se conserva
```

```
ans = 0
```

Representación gráfica

En primer lugar vamos a ver la función *quiver*, que permite dibujar vectores en el plano sin más que especificar las coordenadas del punto de aplicación (en nuestro caso será siempre el origen) y el valor de sus componentes.

```
figure  % abre una nueva ventana gráfica
quiver(0,0,8,5,'k')  % dibuja el vector (8,5) en color negro
```

Sin embargo, fíjate que por defecto *quiver* reescala el vector que se le pasa (el objetivo es evitar solapes que ensucien el gráfico en el caso de dibujar dos o más vectores a la vez). Para representar el vector son su norma real hay que fijar el argumento opcional de entrada *AutoScale* a *off*.

```
figure  % abre una nueva ventana gráfica
quiver(0,0,8,5,'k','AutoScale','off')  % dibuja el vector (8,5) en color negro,
% con su norma real
```

Si quisiéramos dibujar más de un vector en un único gráfico podríamos utilizar la orden *hold on* para indicarle a MATLAB que continue dibujando en la última venta gráfica activa.

```
figure  % abre una nueva ventana gráfica
quiver(0,0,-pi/2,2,'k','AutoScale','off')  % dibuja el vector (-pi/2,2) en
% color negro, con su norma real
hold on  % continua dibujando sobre la misma ventana gráfica
quiver(0,0,2,-1,'b','AutoScale','off')  % dibuja el vector (2,-1) en color azul,
% con su norma real
```

Para cerrar la última ventana gráfica activa puedes utilizar la función *close.*

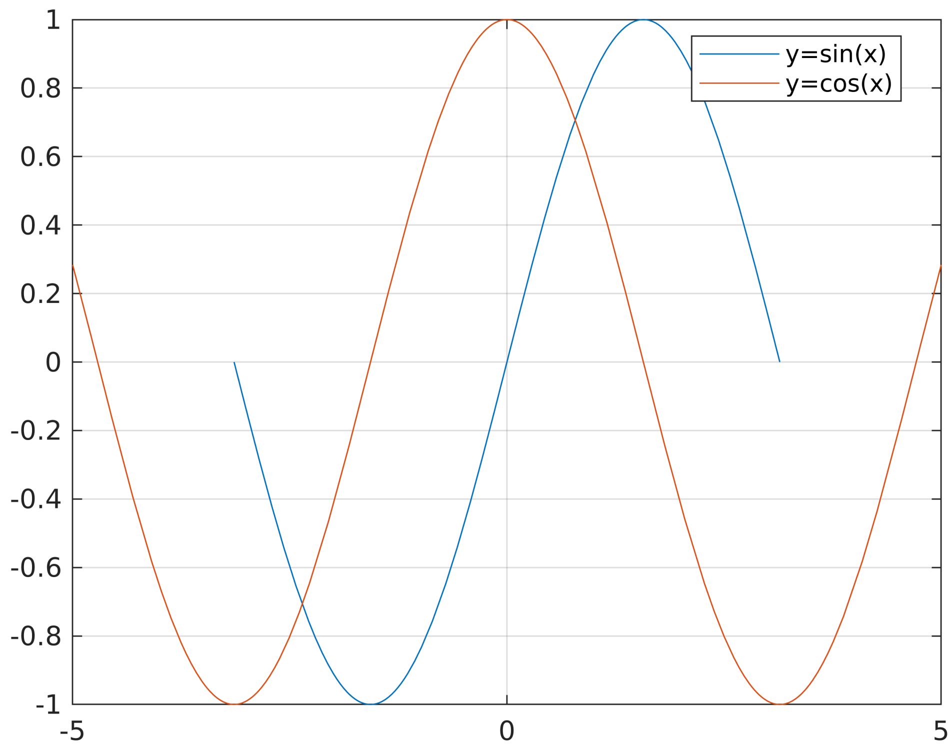
```
close
```

Para cerrar simultáneamente todas las ventanas gráficas que estén abiertas*, close all.*

```
close all
```

En segundo lugar vamos a ver la función *fplot*, que permite representar gráficamente cualquier función matemática definida como tipo *handle,* para lo cual hay que especificar la variable independiente mediante el símbolo @*.*

```
figure  % abre una nueva ventana gráfica
fplot(@(x) sin(x), [-pi pi])  % dibujo la función sin(x) en el intervalo [-pi,pi]
hold on  % continuo dibujando sobre la misma ventana gráfica
fplot(@(x) cos(x))  % dibuja la función cos(x) en un intervalo que asigna
% automáticamente MATLAB
legend('y=sin(x)','y=cos(x)','Location','best')  % añado leyenda
grid on  % añado rejilla en el fondo
```



Ahora ya estamos en condiciones de representar gráficamente el efecto de las reflexiones y los giros en $\mathbb{R}^2$.

Por ejemplo, podríamos dibujar qué ocurre con el vector $\overrightarrow{v} = (1, 7)$ si lo quisiéramos reflejar con respecto a la recta $y = -\pi x$.

```
v = [1 7]'  % vector a reflejar
```

```
v = 2×1
     1
     7
```

```
u = [-pi -1]'  % vector ortogonal al eje de simetría
```

```
u = 2×1
   -3.1416
   -1.0000
```

```
H = eye(2) - 2*(u*u' / norm(u)^2)  % matriz de Householder
```

```
H = 2×2
   -0.8160   -0.5781
   -0.5781    0.8160
```

```
vprima = H*v  % vector reflejado
```

```
vprima = 2×1
   -4.8624
    5.1340
```

```
norm(v) - norm(vprima)  % comprobación de que la norma se conserva
```

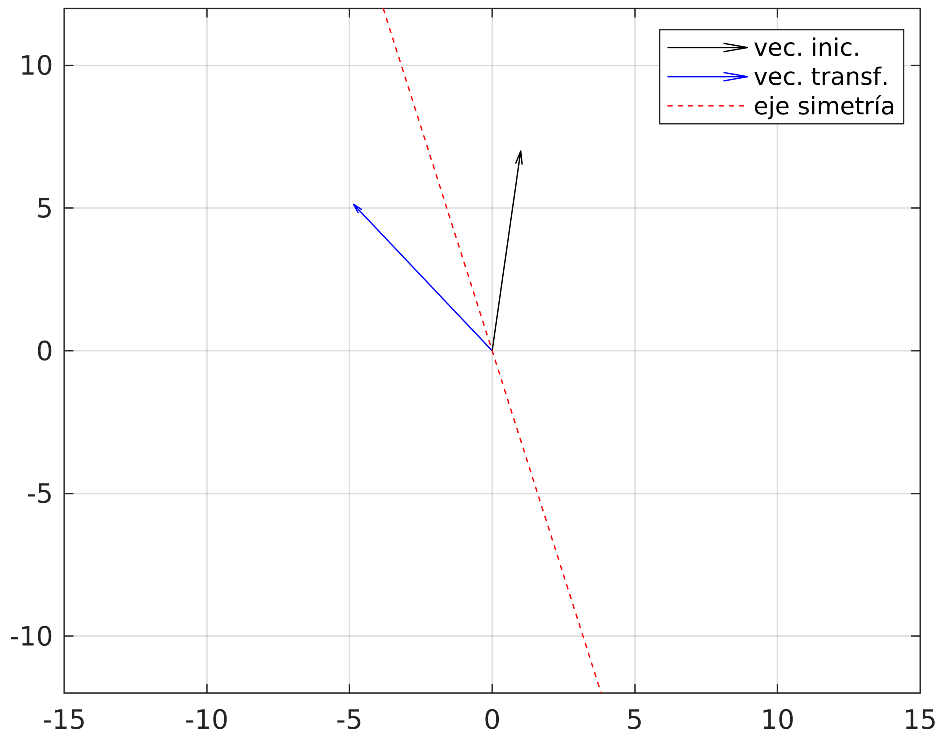
```
ans = -8.8818e-16
```

```
H*u + u  % comprobación: H convierte el vector u en -u
```

ans = 2×1
10^{-15} ×

```
        0
  -0.2220
```

```
figure
quiver(0,0,v(1),v(2),'k','AutoScale','off')  % vector inicial
hold on
quiver(0,0,vprima(1),vprima(2),'b','AutoScale','off')  % vector transformado
hold on
fplot(@(x) -pi*x,'r','LineStyle','--')  % eje de simetría
axis equal  % iguala el tamaño de los dos ejes coordenados
% para facilitar la visualización
legend({'vec. inic.','vec. transf.','eje simetría'},'Location','best')  % añado leyenda
grid on  % añado rejilla en el fondo
```



Ejercicios propuestos

Ejercicio 1:

En $\mathbb{R}^2$, halla la matriz de reflexión que sitúa al vector $\vec{v} = (-1, 2)$ sobre:

- El semieje OX^-
- El semieje OY^-
- La recta $y = -x$, en el segundo cuadrante

En todos los casos, halla las coordenadas del nuevo vector tras la transformación aplicada.

Ejercicio 2:

Repite el ejercicio 1, pero utilizando matrices de giro.

Ejercicio 3:

En $\mathbb{R}^2$, encuentra la matriz de Householder que permite reflejar el vector $\vec{v} = (-1, -3)$ con respecto a la recta $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x$, en el cuarto cuadrante. Representa, en una misma figura, el vector inicial $\vec{v}$, el eje de simetría y el vector $\vec{v'}$ resultante.

Ejercicio 4:

En $\mathbb{R}^2$, encuentra la matriz de Givens que permite situar el vector $\vec{v} = (-1, -3)$ sobre la recta $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x$, en el cuarto cuadrante. Representa, en una misma figura, el vector inicial $\vec{v}$ y el $\vec{v'}$ resultante.