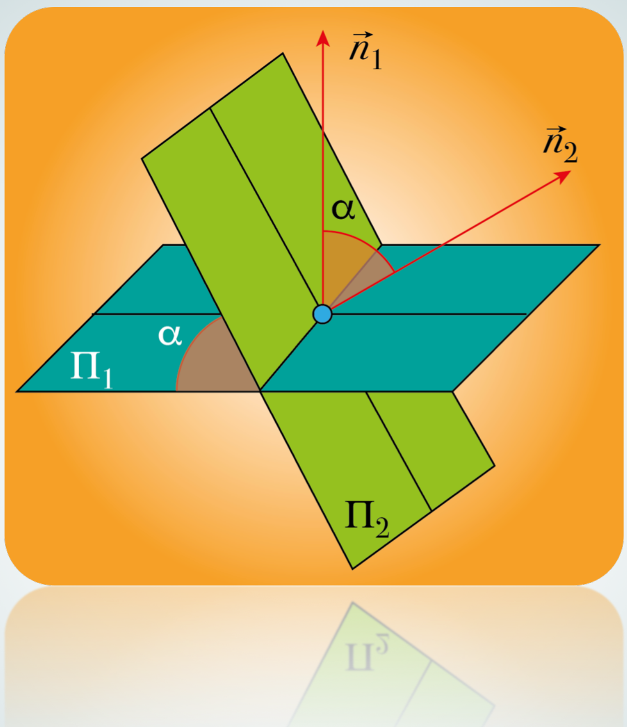
Álgebra y Geometría

Práctica 11. Diagonalización



Rodrigo García Manzanas
Ruth Carballo Fidalgo

Departamento de Matemática Aplicada y
Ciencias de la Computación

Grado en Ingeniería Civil

G1954: Álgebra y Gometría

Práctica 11: Diagonalización

Rodrigo García Manzanas (rodrigo.manzanas@unican.es)

Ruth Carballo Fidalgo (ruth.carballo@unican.es)

Objetivos

- Cálculo de autovalores y autovectores
- Diagonalización

Cálculo de autovalores y autovectores

Imaginemos que tenemos el siguiente endomorfismo:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\rightsquigarrow (3x - 3z, 3y + 9z, -3z) \end{aligned}$$

Comenzaremos por definir la matriz asociada a f en la base canónica (matriz estándar):

```
A = [3 0 -3; 0 3 9; 0 0 -3];  % matriz estándar de f
```

Para hallar los autovalores de f (o A), podemos recurrir a la función *eig*:

```
autoval = eig(A)
```

```
autoval = 3×1
     3
     3
    -3
```

Vemos que f tiene como autovalores $\lambda = 3$ (doble) y $\lambda = -3$ (simple). El siguiente paso sería calcular los subespacios propios asociados a estos autovalores, para lo cual tendremos que resolver el sistema homogéneo con matriz de coeficientes $A - \lambda_i I$, donde $\lambda_i = \{3, -3\}$. La solución a este sistema será directamente una base del subespacio propio asociado a λ_i:

```
% Subespacio propio asociado al autovalor 3
baseV3 = null(A - autoval(1)*eye(3), 'r')  % dim(V3)=2=m(3)
```

```
baseV3 = 3×2
     1     0
     0     1
     0     0
```

Lógicamente, cualquier vector que se pueda expresar como combinación lineal de los vectores de la base de V_3 que hemos hallado será autovector de f para el autovalor 3. Se puede ver por tanto que cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ cuya tercera componente sea nula sería autovector de f asociado al autovalor 3.

```
% Subespacio propio asociado al autovalor -3
baseVmenos3 = null(A - autoval(3)*eye(3), 'r')  % dim(Vmenos3)=1=m(-3)
```

```
baseVmenos3 = 3×1
    0.5000
   -1.5000
    1.0000
```

De la base de V_{-3} podemos concluir que, por ejemplo, el vector $(4, -12, 8)$ sería autovector de f asociado al autovalor -3. Date cuenta que $(4, -12, 8)$ es 8 veces el vector $(0.5, -1.5, 1)$.

```
rref([baseVmenos3, [4 -12 8]'])
```

```
ans = 3×2
     1     8
     0     0
     0     0
```

Por ser autovector asociado al autovalor $\lambda = -3$, se cumplirá $A\begin{bmatrix} 4 \\ -12 \\ 8 \end{bmatrix} = -3\begin{bmatrix} 4 \\ -12 \\ 8 \end{bmatrix}$. Veámoslo:

```
A*[4 -12 8]' - (-3)*[4 -12 8]'
```

```
ans = 3×1
     0
     0
     0
```

Diagonalización

Para que un endomorfismo en un espacio vectorial real sea diagonalizable han de cumplirse dos condiciones:

1. Todos sus autovalores tienen que ser reales
2. La dimensión de cada subespacio propio tiene que coincidir con la multiplicidad del autovalor al que está asociado

En nuestro ejemplo, podemos ver que estos dos puntos se cumplen. Por tanto, f será diagonalizable. Como ya sabemos, diagonalizar f consiste en encontrar una matriz diagonal D y otra P tales que $A = PDP^{-1}$. La diagonal de D estará formada por los autovalores de f y P contendrá en sus columnas una base de autovectores del espacio en el que estemos trabajando, en este caso $\mathbb{R}^3$. Como sabes, ha de respetarse el mismo orden al colocar los valores propios en la diagonal de D y los correspondientes vectores propios en las columnas de P.

```
D = diag(autoval)
```

```
D = 3×3
     3     0     0
     0     3     0
     0     0    -3
```

```
P = [baseV3 baseVmenos3]
```

```
P = 3×3
    1.0000         0    0.5000
         0    1.0000   -1.5000
         0         0    1.0000
```

Podemos comprobar fácilmente que, efectivamente, la unión de las bases de los subespacios propios encontrados forman una base (de autovectores) de $\mathbb{R}^3$:

```
rank(P)  % los tres vectores son L.I. -> forman base de R³
```

```
ans = 3
```

La comprobación de que las matrices D y P que hemos obtenido son las correctas sería la siguiente:

```
A - P*D*inv(P)
```

```
ans = 3×3
     0     0     0
     0     0     0
     0     0     0
```

Otra comprobación equivalente en la que evitamos el cálculo de inversas (muy conveniente para el tratamiento de problemas "a mano") sería la siguiente:

```
A*P - P*D
```

```
ans = 3×3
     0     0     0
     0     0     0
     0     0     0
```

Además de los autovalores del endomorfismo, la función *eig* permite también hallar sus autovectores asociados del siguente modo:

```
[P2, D2] = eig(A)
```

```
P2 = 3×3
    1.0000         0    0.2673
         0    1.0000   -0.8018
         0         0    0.5345
D2 = 3×3
     3     0     0
     0     3     0
     0     0    -3
```

La matriz $D2$ es la D que habíamos obtenido anteriormente, es decir, la matriz que contiene en su diagonal los autovalores de A. Por su parte, $P2$ es una matriz cuyas columnas están formadas por autovectores de A (lógicamente, la primera/segunda/tercera columna de $P2$ correspondería al autovector asociado al autovalor que se sitúa en la primera/segunda/tercera columna de $D2$). Sin embargo, fíjate que esta matriz $P2$ no coincide con la P que habíamos obtenido anteriormente. La única diferencia es que la base que devuelve la función *eig* para cada subespacio propio es una base ortonormal (vectores ortogonales entre sí y unitarios).

```
% La base devuelta por "eig" para el subespacio propio asociado al
% autovalor 3 es ortonormal:
dot(P2(:,1), P2(:,2))  % vectores ortogonales
```

```
ans = 0
```

```
norm(P2(:,1))  % norma 1
```

```
ans = 1
```

```
norm(P2(:,2))  % norma 1
```

```
ans = 1
```

```
% En el caso del subespacio propio asociado al autovalor -3, dado que sólo
% tenemos un vector, dicho vector será unitario
norm(P2(:,3))  % norma 1
```

```
ans = 1
```

<u>Importante</u>**:** Ten en cuenta que el hecho de que el comando *eig* devuelva dos matrices no implica necesariamente que el endomorfismo con el que se esté trabajando sea diagonalizable. Por ejemplo, imagina que quisiéramos diagonalizar la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$:

```
A = [2 1 0; 0 2 1; 0 0 2];  % matriz estándar
[P, D] = eig(A)  % autovalores y autovectores
```

```
P = 3×3
    1.0000   -1.0000    1.0000
         0    0.0000   -0.0000
         0         0    0.0000
D = 3×3
     2     0     0
     0     2     0
     0     0     2
```

Aparentemente, ya tendríamos las matrices D y P necesarias para diagonalizar A. Sin embargo, estas matrices no satisfacen la relación $A = PDP^{-1}$:

```
A - P*D*inv(P)
```

```
Warning: Matrix is close to singular or badly scaled. Results may be inaccurate. RCOND =
 9.860761e-32.
ans = 3×3
```

```
     0     1     0
     0     0     1
     0     0     0
```

Y esto ocurre porque P es una matriz singular ($det(P) = 0$). En otras palabas, las columnas de P no forman una base de autovectores, por lo que A no es diagonalizable. En efecto, podemos ver que la dimension del subespacio propio asociado al autovalor 2 (triple) no coincide con su multiplicidad algebraica.

```
baseV2 = null(A-2*eye(3), 'r')  % dim(V2)=1, m(2)=3
```

```
baseV2 = 3×1
     1
     0
     0
```

```
rank(A-2*eye(3))  % dim(V2) = 3-rg(A-2*I)
```

```
ans = 2
```

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1:

Comprueba si el siguiente endomorfismo es diagonalizable:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z, t) &\rightsquigarrow (x - 2y, y - z, z + t, -3t) \end{aligned}$$

Ejercicio 2:

Dada una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuyo $Ker(f) =< (1, 2, 0), (0, 3, 1) >$ y bajo la cual el eje OX se transforma en el eje OZ:

- *a)* Halla su matriz estándar A
- *b)* Obtén una base de la imagen de f
- *c)* Obtén una base de la imagen del subespacio S de $\mathbb{R}^3$ cuya forma paramétrica es $(\alpha, -\beta, \alpha + \beta)$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- *d)* Obtén una base de la imagen del subespacio T de $\mathbb{R}^3$ cuya ecuación implícita es $x = \frac{1}{2}y$
- *e)* Calcula los autovalores y autovectores de f
- *f)* En caso de existir, da una base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de f. ¿Cuál será la matriz de f en esta base?
- *g)* Obtén M, la matriz de f en la base $B = \{(1, 0, -3), (0, -2, 1), (-1, 1, 0)\}$
- *h)* ¿Qué relación existe entre la traza y el determinante de A y M?

Ejercicio 3:

Dado el endoformismo f cuya matriz estándar es la siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} \end{bmatrix}$$

- *a)* Clasifica f
- *b)* Comprueba si f es diagonalizable. En caso de serlo, encuentra las matrices D y P tales que $A = PDP^{-1}$
- *c)* ¿Qué tienen de particular los subespacios propios de f?
- *d)* ¿Cuáles serían las coordenadas del vector $(0, -4, 1)$ respecto de una base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores unitarios de f?