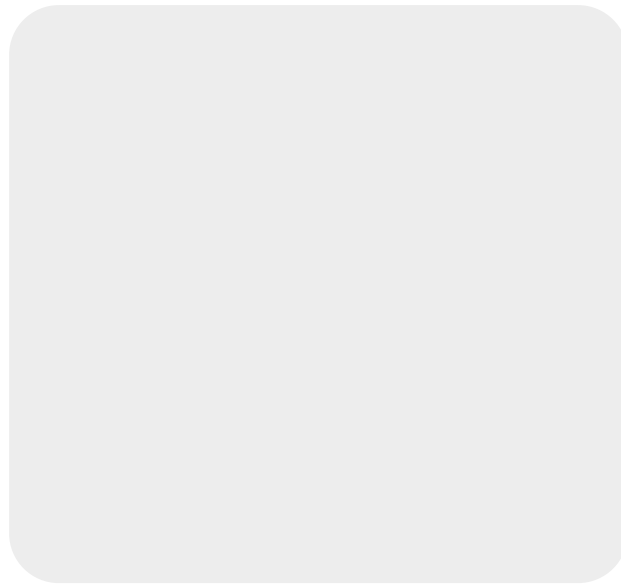


738-9'' (: (: -1. -%''<'

! "#\$%&\$' ()*(+&, %- . ' , (/ - (- \$0' \$&12- , (3&2- ' 3- , (456



=1/"&81(; ' "\$<' (> ' 2?' 2' ,
=0%@(A' "9' 331(B&/ ' 381

! "#\$%&\$' " (&)*+'' , \$&'' -&./\$*0#1./\$+*\$2
3." (/.\$4*+''1\$*3)' #5&\$/.6(

74&''&'' \$*4''#581./\$*8\$9)*:./" (/.\$;
3%'' \$&.<''3)' ') (4*=>?@3?AO*BCD

Práctica 3: Sistemas de ecuaciones lineales (I)

Rodrigo García Manzanos (rodrigo.manzanos@unican.es)

Ruth Carballo Fidalgo (ruth.carballo@unican.es)

Objetivos

- Clasificar y resolver distintos tipos de sistemas de ecuaciones lineales

Resolución de sistemas compatibles determinados

Siempre que estemos frente a un sistema de ecuaciones lineales, lo primero que haremos es clasificarlo (si es incompatible, no habrá nada más que hacer). Para ello, partiendo de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada del sistema, aplicaremos el teorema de Rouché-Fröbenius. Vamos a verlo con el siguiente ejemplo:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x + y - z = 2 \\ 4x - 2y + z = 3 \end{cases}$$

```
% clasifico el sistema
A = [1 1 -1; 3 1 -1; 4 -2 1]; % matriz de coeficientes
b = [0 2 3]'; % vector de términos independientes
Aamp = [A, b]; % matriz ampliada
[rank(A), rank(Aamp)] % R-F: sistema compatible determinado
```

```
ans = 1x2
      3      3
```

Una vez hemos comprobado que el sistema es compatible determinado (habrá una única solución), vamos a ver distintas formas de resolver este tipo de sistemas:

Método 1: Utilizando la forma escalonada reducida por filas de la matriz ampliada del sistema (método de Gauss-Jordan).

```
rref(Aamp) % solución: (x=1, y=2, z=3)
```

```
ans = 3x4
      1      0      0      1
      0      1      0      2
```

0 0 1 3

Método 2: Con la función *linsolve* (usa distintos tipos de factorización de matrices para resolver el sistema). Requiere como entradas la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes.

```
sol = linsolve(A, b) % solución: (x=1, y=2, z=3)
```

```
sol = 3x1
 1.0000
 2.0000
 3.0000
```

Método 3: Con el operador "\". Al igual que para *linsolve*, necesitaremos la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes.

```
sol = A\b % solución: (x=1, y=2, z=3)
```

```
sol = 3x1
 1.0000
 2.0000
 3.0000
```

Método 4: Definiendo las incógnitas del sistema como simbólicas y resolviendo su expresión matricial con la función *solve*.

```
syms x y z real % defino las incógnitas del sistema como variables simbólicas
X = [x y z]'; % vector de incógnitas simbólicas
sol = solve(A*X == b); % resuelvo el sistema en su forma matricial
% Puedo acceder a los distintos campos de la estructura 'sol' mediante '.'
[sol.x, sol.y, sol.z] % solución: (x=1, y=2, z=3)
```

```
ans = (1 2 3)
```

Método 5: Usando A^{-1} para despejar las incógnitas del sistema.

```
sol = inv(A)*b % solución: (x=1, y=2, z=3)
```

```
sol = 3x1
 1
 2
 3
```

Método 6: Resolución por Cramer (cálculo de determinantes).

```
A = [1 1 -1; 3 1 -1; 4 -2 1]; % matriz de coeficientes
b = [0 2 3]'; % vector de términos independientes
% resuelvo por Cramer
Ax = [b, A(:,2:3)];
Ay = [A(:,1), b, A(:,3)];
Az = [A(:,1:2), b];
sol = [det(Ax)/det(A), det(Ay)/det(A), det(Az)/det(A)] % solución: (x=-1, y=2, z=3)
```

```
sol = 1x3
 1.0000  2.0000  3.0000
```

```
A*sol' - b % compruebo que la solución obtenida es la correcta
```

```
ans = 3x1
10^-14 x
-0.0444
-0.1332
-0.1332
```

Resolución de sistemas compatibles indeterminados

En el caso de sistemas compatibles indeterminados (infinitas soluciones) no se pueden emplear los métodos vistos anteriormente. Vamos a ilustrar cómo se pueden resolver este tipo de sistemas con el siguiente ejemplo:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 7 \\ x + y + 2t = 8 \\ 2x + 2y + 3z = 10 \\ -x - y - 2z + 2t = 0 \end{cases}$$

Como siempre, lo primero que haremos es clasificar el sistema haciendo uso del comando *rank* y el teorema de Rouché-Fröbenius.

```
% clasifico el sistema
A = [1 1 1 1; 1 1 0 2; 2 2 3 0; -1 -1 -2 2]; % matriz de coeficientes
b = [7 8 10 0]'; % vector de términos independientes
Aamp = [A, b]; % matriz ampliada
[rank(A), rank(Aamp)] % R-F: sistema compatible indeterminado
```

```
ans = 1x2
3 3
```

A continuación, calcularemos la escalonada reducida por filas de la matriz del sistema para identificar las *incógnitas principales* (columnas pivotaes) y los *parámetros libres* (columnas no pivotaes). Recuerda que el nº de parámetros libres será igual al nº total de incógnitas menos el nº de incógnitas principales.

```
rref(A) % escalonada reducida por filas
```

```
ans = 4x4
1 1 0 0
0 0 1 0
0 0 0 1
0 0 0 0
```

```
% incógnitas principales: {x, z, t}
% parámetro libre: {y}
```

Una vez hemos determinado cuáles vamos a considerar como incógnitas principales, resolvemos el sistema en modo simbólico con la función *solve* para dichas variables (*x*, *z*, *t* en este caso). La solución vendrá dada en función de la/s variables/s que hayamos escogido como parámetro/s libre/s (*y* en este caso).

```
syms x y z t real % defino las incógnitas del sistema como simbólicas
X = [x y z t]'; % construyo el vector de incógnitas simbólicas
sol = solve(A*X == b, [x z t]); % resuelvo el sistema en las incógnitas
% que he identificado como principales
sol = [sol.x y sol.z sol.t] % esta será la solución del sistema,
```

```
sol = (2 - y y 2 3)
```

```
% que vendrá dada en función de la(s) variable(s) que hayamos definido  
% como parámetro(s) libre(s); en este caso 'y'
```

Para comprobar que la solución a la que hemos llegado es correcta, podemos sustituir en la misma el parámetro libre por cualquier valor y ver que, efectivamente, se cumplen todas las ecuaciones del sistema.

```
A*subs(sol, y, 47.86)' - b % le doy al parámetro libre el valor 47.86
```

```
ans =
```

```
(  
0  
0  
0  
0  
)
```

```
% y compruebo que la solución es correcta
```

```
A*subs(sol, y, -32)' - b % le doy al parámetro libre el valor -32
```

```
ans =
```

```
(  
0  
0  
0  
0  
)
```

```
% y compruebo que la solución es correcta
```

```
A*subs(sol, y, pi/sqrt(2))' - b % le doy al parámetro libre el valor pi/sqrt(2)
```

```
ans =
```

```
(  
0  
0  
0  
0  
)
```

```
% y compruebo que la solución es correcta
```

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1:

Comprueba que el siguiente sistema es compatible determinado y resuélvelo utilizando los métodos 1-5 que hemos visto para este tipo de sistemas. Verifica que la solución que has obtenido es la correcta.

$$\begin{cases} -x - 2y - 3z = -3 \\ 2x + 3y + 2z = -2 \\ x + 2y + 4z = 3 \end{cases}$$

Ejercicio 2:

Clasifica y resuelve, si es posible, el siguiente sistema. Verifica que la solución que has obtenido es correcta.

$$\begin{cases} 3y - 6z + 6t + 4p = -5 \\ 3x - 7y + 8z - 5t + 8p = 9 \\ 3x - 9y + 12z - 9t + 6p = 15 \end{cases}$$