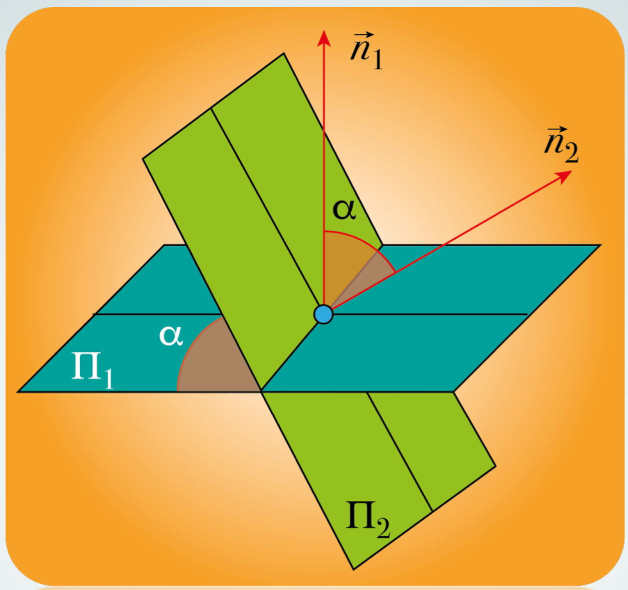
Álgebra y Geometría

Práctica 3. Sistemas de ecuaciones lineales (I)



Rodrigo García Manzanas
Ruth Carballo Fidalgo

Departamento de Matemática Aplicada y
Ciencias de la Computación

Este tema se publica bajo Licencia:
Creative Commons BY-NC-SA 4.0

Grado en Ingeniería Civil

G1954: Álgebra y Geometría

Práctica 3: Sistemas de ecuaciones lineales (I)

Rodrigo García Manzanas (rodrigo.manzanas@unican.es)

Ruth Carballo Fidalgo (ruth.carballo@unican.es)

Objetivos

- Clasificar y resolver distintos tipos de sistemas de ecuaciones lineales

Resolución de sistemas compatibles determinados

Siempre que estemos frente a un sistema de ecuaciones lineales, lo primero que haremos es clasificarlo (si es incompatible, no habrá nada más que hacer). Para ello, partiendo de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada del sistema, aplicaremos el teorema de Rouché-Fröbenius. Vamos a verlo con el siguiente ejemplo:

$$\begin{cases} x + y - z &= 0 \\ 3x + y - z &= 2 \\ 4x - 2y + z &= 3 \end{cases}$$

```
% clasifico el sistema
A = [1 1 -1; 3 1 -1; 4 -2 1]; % matriz de coeficientes
b = [0 2 3]';  % vector de términos independienets
Aamp = [A, b];  % matriz ampliada
[rank(A), rank(Aamp)]  % R-F: sistema compatible determinado
```

```
ans = 1×2
     3     3
```

Una vez hemos comprobado que el sistema es compatible determinado (habrá una única solución), vamos a ver distintas formas de resolver este tipo de sistemas:

<u>Método 1</u>: Utilizando la forma escalonada reducida por filas de la matriz ampliada del sistema (método de Gauss-Jordan).

```
rref(Aamp)  % solución: (x=1, y=2, z=3)
```

```
ans = 3×4
     1     0     0     1
     0     1     0     2
```

```
     0     0     1     3
```

Método 2: Con la función *linsolve* (usa distintos tipos de factorización de matrices para resolver el sistema). Requiere como entradas la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes.

```
sol = linsolve(A, b)  % solución: (x=1, y=2, z=3)
```

```
sol = 3×1
    1.0000
    2.0000
    3.0000
```

Método 3: Con el operador "\". Al igual que para *linsolve,* necesitaremos la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes.

```
sol = A\b  % solución: (x=1, y=2, z=3)
```

```
sol = 3×1
    1.0000
    2.0000
    3.0000
```

Método 4: Definiendo las incógnitas del sistema como simbólicas y resolviendo su expresión matricial con la función *solve*.

```
syms x y z real  % defino las incógnitas del sistema como variables simbólicas
X = [x y z]';  % vector de incógnitas simbólicas
sol = solve(A*X == b);  % resuelvo el sistema en su forma matricial
% Puedo acceder a los distintos campos de la estructura 'sol' mediante '.'
[sol.x, sol.y, sol.z]  % solución: (x=1, y=2, z=3)
```

ans = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Método 5: Usando A^{-1} para despejar las incógnitas del sistema.

```
sol = inv(A)*b  % solución: (x=1, y=2, z=3)
```

```
sol = 3×1
     1
     2
     3
```

Método 6: Resolución por Cramer (cálculo de determinantes).

```
A = [1 1 -1; 3 1 -1; 4 -2 1];  % matriz de coeficientes
b = [0 2 3]';  % vector de términos independientes
% resuelvo por Cramer
Ax = [b, A(:,2:3)];
Ay = [A(:,1), b, A(:,3)];
Az = [A(:,1:2), b];
sol = [det(Ax)/det(A), det(Ay)/det(A), det(Az)/det(A)]  % solución: (x=-1, y=2, z=3)
```

```
sol = 1×3
    1.0000    2.0000    3.0000
```

```
A*sol' - b  % compruebo que la solución obtenida es la correcta
```

```
ans = 3×1
10^-14 ×
   -0.0444
   -0.1332
   -0.1332
```

Resolución de sistemas compatibles indeterminados

En el caso de sistemas compatibles indeterminados (infinitas soluciones) no se pueden emplear los métodos vistos anteriormente. Vamos a ilustrar cómo se pueden resolver este tipo de sistemas con el siguiente ejemplo:

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+y+z+t & = & 7 \\ x+y+2t & = & 8 \\ 2x+2y+3z & = & 10 \\ -x-y-2z+2t & = & 0 \end{array}\right.$$

Como siempre, lo primero que haremos es clasificar el sistema haciendo uso del comando *rank* y el teorema de Rouché-Fröbenius.

```
% clasifico el sistema
A = [1 1 1 1; 1 1 0 2; 2 2 3 0; -1 -1 -2 2]; % matriz de coeficientes
b = [7 8 10 0]';  % vector de términos independienets
Aamp = [A, b];  % matriz ampliada
[rank(A), rank(Aamp)]  % R-F: sistema compatible indeterminado
```

```
ans = 1×2
     3     3
```

A continuación, calcularemos la escalonada reducida por filas de la matriz del sistema para identificar las *incógnitas principales* (columnas pivotales) y los *parámetros libres* (columnas no pivotales). Recuerda que el nº de parámetros libres será igual al nº total de incógnitas menos el nº de incógnitas principales.

```
rref(A)  % escalonada reducida por filas
```

```
ans = 4×4
     1     1     0     0
     0     0     1     0
     0     0     0     1
     0     0     0     0
```

```
% incógnitas principales: {x, z, t}
% parámetro libre: {y}
```

Una vez hemos determinado cuáles vamos a considerar como incógnitas principales, resolvemos el sistema en modo simbólico con la función *solve* para dichas variables (*x, z, t* en este caso). La solución vendrá dada en función de la/s variables/s que hayamos escogido como parámetro/s libre/s (*y* en este caso).

```
syms x y z t real  % defino las incógnitas del sistema como simbólicas
X = [x y z t]';  % construyo el vector de incógnitas simbólicas
sol = solve(A*X == b, [x z t]);  % resuelvo el sistema en las incógnitas
% que he identificado como principales
sol = [sol.x y sol.z sol.t]  % esta será la solución del sistema,
```

sol = $\begin{pmatrix} 2-y & y & 2 & 3 \end{pmatrix}$

```
% que vendrá dada en función de la(s) variable(s) que hayamos definido
% como parámetro(s) libre(s); en este caso 'y'
```

Para comprobar que la solución a la que hemos llegado es correcta, podemos sustituir en la misma el parámetro libre por cualquier valor y ver que, efectivamente, se cumplen todas las ecuaciones del sistema.

```
A*subs(sol, y, 47.86)' - b  % le doy al parámetro libre el valor 47.86
```

ans =

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
% y compruebo que la solución es correcta
A*subs(sol, y, -32)' - b  % le doy al parámetro libre el valor -32
```

ans =

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
% y compruebo que la solución es correcta
A*subs(sol, y, pi/sqrt(2))' - b  % le doy al parámetro libre el valor pi/sqrt(2)
```

ans =

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
% y compruebo que la solución es correcta
```

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1:

Comprueba que el siguiente sistema es compatible determinado y resuélvelo utilizando los métodos 1-5 que hemos visto para este tipo de sistemas. Verifica que la solución que has obtenido es la correcta.

$$\begin{cases} -x - 2y - 3z & = & -3 \\ 2x + 3y + 2z & = & -2 \\ x + 2y + 4z & = & 3 \end{cases}$$

Ejercicio 2:

Clasifica y resuelve, si es posible, el siguiente sistema. Verifica que la solución que has obtenido es correcta.

$$\begin{cases} 3y - 6z + 6t + 4p & = & -5 \\ 3x - 7y + 8z - 5t + 8p & = & 9 \\ 3x - 9y + 12z - 9t + 6p & = & 15 \end{cases}$$