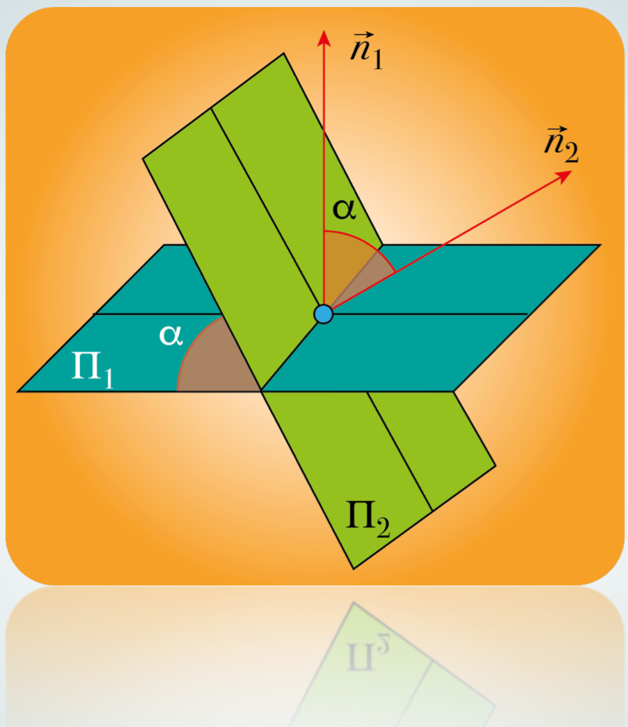
Álgebra y Geometría

Práctica 5. Espacios vectoriales (I)



Rodrigo García Manzanas
Ruth Carballo Fidalgo

Departamento de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación

Grado en Ingeniería Civil

G1954: Álgebra y Geometría

Práctica 5: Espacios vectoriales (I)

Rodrigo García Manzanas (rodrigo.manzanas@unican.es)

Ruth Carballo Fidalgo (ruth.carballo@unican.es)

Objetivos

- Determinar si un conjunto de vectores es libre o ligado
- Obtener una base de un subespacio
- Pasar de la forma implícita de un subespacio a la paramétrica (y viceversa)

Dependencia e independencia lineal

Imagina el conjunto de vectores de $S = \{(5, -9, 6, 4), (-3, 4, -2, -1), (0, -7, 8, 7), (2, 0, 4, 1)\}$ de $\mathbb{R}^4$. Sabemos que será libre si para expresar el vector $(0, 0, 0, 0)$ como combinación lineal de los vectores propuestos es necesario que todos los coeficientes de la combinación sean nulos. Esto equivale a comprobar que el correspondiente sistema homogéneo tenga tan sólo la solución trivial. Si por el contrario el sistema tuviera infinitas soluciones, S sería un conjunto ligado. Por tanto, bastará con calcular el rango de los vectores de S (para ello se suelen colocar en columnas):

```
% defino los vectores del conjunto
u1 = [5 -9 6 4]';
u2 = [-3 4 -2 -1]';
u3 = [0 -7 8 7]';
u4 = [2 0 4 1]';

% clasifico el sistema homogéneo de interés
S = [u1 u2 u3 u4]  % matriz de coefs.
```

```
S = 4×4
     5    -3     0     2
    -9     4    -7     0
     6    -2     8     4
     4    -1     7     1
```

```
rank(S)  % R-F: S.C.I. -> el conjunto S será ligado
```

```
ans = 3
```

El comando *rank* nos indica cuál es el número de vectores independientes (en este caso tres, por lo que habrá un cuarto vector linealmente dependiente), pero no cuáles. Sin embargo, sabemos que podemos resolver sistemas homogéneos directamente con *null*. De la solución devuelta por este comando podemos extraer las relaciones de dependencia que se establecen entre los vectores del conjunto.

```
null(S, 'r')
```

```
ans = 4×1
    -3
    -5
     1
     0
```

La relación de dependencia que liga entre sí los vectores de S será $-3\overrightarrow{u_1} - 5\overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_3} = 0$. Comprobémoslo:

```
-3*u1 - 5*u2 + u3
```

```
ans = 4×1
     0
     0
     0
     0
```

Nota: *Si el conjunto fuese libre, null devolvería como respuesta "empty matrix", que indica que la única solución del sistema es la trivial.*

Por un lado, este resultado nos indica que $\overrightarrow{u_4}$ es linealmente independiente. Por otro, que sólo dos de los vectores en la tripla $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ son independientes, pues el tercero será función de los otros dos. Por lo tanto, tendríamos tres conjuntos candidatos a base de S: $base_1 = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_4}\}$, $base_2 = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_4}\}$, $base_3 = \{\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_4}\}$.

Un modo fácil de obtener **una** base de un conjunto de vectores es a través de la escalonada reducida de la matriz que forman (se suelen colocar por columnas). Las columnas pivotales identificarán a los vectores linealmente independientes, que formarán base. El resto de columnas expresan la forma en la que el resto de vectores dependen de los independientes.

```
rref(S)  % identifico u1, u2 y u4 como L.I. (columnas pivotales)
```

```
ans = 4×4
     1     0     3     0
     0     1     5     0
     0     0     0     1
     0     0     0     0
```

```
% el vector u3 es combinación lineal de u1 y u2, en la siguiente forma:
% u3=3*u1+5*u2 (que es la misma relación de dependencia que habíamos
% obtenido antes con null)
```

Obtención de una base de un subespacio

Si el subespacio viene dado por sus ecuaciones paramétricas, una base del mismo sería directamente la formada por los vectores cuyas componentes sean los coeficientes de los parámetros. Por ejemplo, para el subespacio S de $\mathbb{R}^5$:

$$S = \{(2\alpha + 3\beta, 2\beta - \gamma, -3\alpha + \beta, -\gamma, \beta) : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

Una base sería $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$, con $\vec{u_1} = (2, 0, -3, 0, 0)$, $\vec{u_2} = (3, 2, 1, 0, 1)$ y $\vec{u_3} = (0, -1, 0, -1, 0)$.

***<u>Nota</u>:** Como convenio, colocaremos siempre los vectores de cualquier base en columnas.*

```
baseS = [2 0 -3 0 0; 3 2 1 0 1; 0 -1 0 -1 0]'  % coloco los vectores
```

```
baseS = 5×3
     2     3     0
     0     2    -1
    -3     1     0
     0     0    -1
     0     1     0
```

```
% de la base en columnas
```

Si, por el contrario, lo que se conoce del subespacio son sus ecuaciones implícitas, podrá obtenerse una base del mismo resolviendo el sistema homogéneo que constituyen dichas ecuaciones. Por ejemplo, en el caso del subespacio T de $\mathbb{R}^4$:

$$T : \begin{cases} x - y + 2z + 3t & = & 0 \\ 3x - 2y + z - t & = & 0 \end{cases}$$

```
T = [1 -1 2 3; 3 -2 1 -1];  % matriz de coefs. del sistema homogéneo
baseT = null(T, 'r')  % las columnas forman una base de T: {(3,5,1,0),
```

```
baseT = 4×2
     3     7
     5    10
     1     0
     0     1
```

```
% (7,10,0,1)}
```

Paso de la forma implícita de un subespacio a la paramétrica

Sea S un subespacio de $\mathbb{R}^4$ dado en su forma implícita, $S : \left.\begin{array}{r} x + y - z - t = 0 \\ 2x + 2y - z - t = 0 \end{array}\right\}$. Acabamos de ver que para obtener una base del mismo bastará con resolver el sistema homogéneo que forman sus ecuaciones implícitas.

```
S = [1 1 -1 -1; 2 2 -1 -1];  % matriz de coefs. del sistema homogéneo
baseS = null(S, 'r')  % cada columna es un vector de la base de S
```

```
baseS = 4×2
    -1     0
```

```
     1     0
     0    -1
     0     1
```

Por tanto, la forma paramétrica que busco será $S = \{(-\alpha, \alpha, -\beta, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Paso de la forma paramétrica de un subespacio a la implícita

Sea S un subespacio de $\mathbb{R}^4$ dado en su forma paramétrica, por ejemplo $S = \{(\alpha, \alpha, \beta, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Sabemos que cualquier vector de S (y en particular los vectores de la base) verificarán las ecuaciones implícitas del subespacio, cuya forma general será $Ax + By + Cz + Dt = 0$. Por tanto, bastará con resolver el sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes estará formada por los vectores de la base (colocados en filas), y en el que las incógnitas serán precisamente los coeficientes de las ecuaciones implícitas que buscamos: A, B, C, D.

```
baseS = [1 1 0 0; 0 0 1 1]';  % base de S (en columnas)
coefImpS = null(baseS', 'r')  % las columnas dan directamente los coefs.
```

```
coefImpS = 4×2
    -1     0
     1     0
     0    -1
     0     1
```

```
% de las eqs. implícitas
```

La expresión del subespacio en implícitas será por tanto $S : \left.\begin{array}{r} -x + y = 0 \\ -z + t = 0 \end{array}\right\}$

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1:

Comprueba si los siguientes conjuntos de vectores de $\mathbb{R}^5$ forman sistemas libres o ligados.

- *a)* $A = \{(1, 0, 1, 2, 1), (0, 1, 0, -1, 3), (1, 0, -1, 0, 5)\}$
- *b)* $B = \{(-2, 4, 0, -1, 2), (2, 1, 2, -1, -1), (1, 0, 2, 1, 0), (0, 1, -2, -3, 1)\}$

Ejercicio 2:

Encuentra las relaciones de dependencia lineal (en caso de haberlas) que se dan en el conjunto de vectores $S = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4}\}$, siendo $\vec{u_1} = (1, 0, 1, 2)$, $\vec{u_2} = (0, 1, 1, 1)$, $\vec{u_3} = (4, 3, 7, 11)$ y $\vec{u_4} = (-2, 1, -1, -3)$. Comprueba que son correctas.

Ejercicio 3:

Halla una base de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^5$:

- *a)* $S = \{(x, y, z, t, p) : x + y = 0, z + t = 0\}$
- *b)* $T = \{x = -2\beta, y = 3\alpha - \gamma, z = \alpha - \gamma, t = -4\alpha + \beta - 2\gamma, p = \beta - 3\gamma : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$

Ejercicio 4:

Encuentra la forma paramétrica de los siguientes subespacios:

- *a)* En $\mathbb{R}^4$, $S : \left.\begin{matrix} x + y + z + t = 0 \\ y - 2z - t = 0 \end{matrix}\right\}$
- *b)* En $\mathbb{R}^3$, $S : x - 2y = 0$
- *c)* En $\mathbb{R}^4$, $S : \left.\begin{matrix} x = z \\ y = t \end{matrix}\right\}$

Ejercicio 5:

Encuentra la forma implícita de los siguientes subespacios:

- *a)* En $\mathbb{R}^4$, $S = \{(\alpha + \beta, \alpha + 2\beta, -\beta, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
- *b)* En $\mathbb{R}^3$, $S = \{(\alpha + 2\beta, -2\alpha + 5\beta, -5\alpha + 8\beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
- *c)* En $\mathbb{R}^2$, $S = \{(-\alpha + \beta, -2\alpha - \beta : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

Ejercicio 6:

Dado el subespacio $S = \{(1, 0, -3, 2), (0, 1, 2, -3), (-3, -4, 1, 6), (1, -3, -8, 7), (2, 1, -6, 9)\}$ de $\mathbb{R}^4$:

- *a)* Obtén una base de S
- *b)* Halla el valor (o valores) de a tal que $(a, 4, -5, -10)$ se pueda expresar como combinación lineal de los vectores de la base que has encontrado. ¿Cuáles son los coeficientes de la combinación?
- *c)* Halla la forma paramétrica de S
- *d)* Halla la forma implícita de S