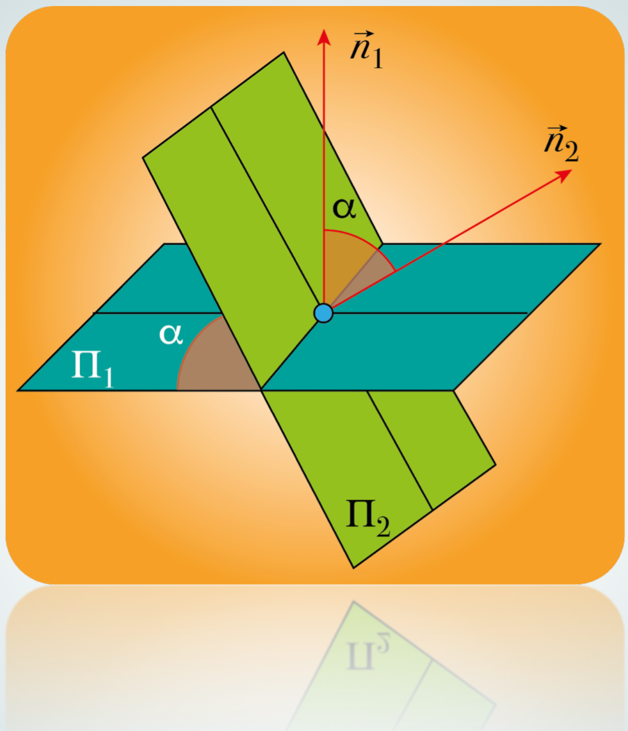
Álgebra y Geometría

Práctica 6. Espacios vectoriales (II)



Rodrigo García Manzanas
Ruth Carballo Fidalgo

Departamento de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación

Grado en Ingeniería Civil

G1954: Álgebra y Geometría

Práctica 6: Espacios vectoriales (II)

Rodrigo García Manzanas (rodrigo.manzanas@unican.es)

Ruth Carballo Fidalgo (ruth.carballo@unican.es)

Objetivos

- Calcular la suma e intersección de subespacios
- Comprobar si dos subespacios están o no en suma directa
- Obtener subespacios complementarios

Intersección de subespacios

Sean S y T dos subespacios de $\mathbb{R}^4$ dados por sus ecuaciones implícitas:

$$S : \left.\begin{array}{r} x+y-z-t=0 \\ 2x+2y-z-t=0 \end{array}\right\} \qquad T : \left.\begin{array}{r} x-y=0 \\ z-t=0 \end{array}\right\}$$

El subespacio $S \cap T$ se calcula resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de S y las de T, ya que cualquier elemento de la intersección estará a la vez en S y en T, y por tanto, verificará ambos conjuntos de ecuaciones simultáneamente.

```
coefImpS = [1 1 -1 -1; 2 2 -1 -1];  % coefs. eqs. implícitas S
coefImpT = [1 -1 0 0; 0 0 1 -1];  % coefs. eqs. implícitas S
baseSinterT = null([coefImpS; coefImpT], 'r')  % resuelvo el sistema homogéneo -->
```

```
baseSinterT =

  4×0 empty double matrix
```

```
% sólo tiene la solución trivial, por lo que el subespacio intersección
% está compuesto tan sólo por el vector 0 --> S y T están en suma directa
```

Suma de subespacios

Para calcular el subespacio $S+T$, obtendremos en primer lugar una base de S y otra de T. A partir de ellas, es inmediato formar un sistema generador de $S+T$ (sólo habrá que unir ambas bases). Finalmente, para obtener una base de $S+T$, sólo nos quedará identificar los vectores del sistema generador que sean linealmente independientes (si hubiera algún vector linealmente dependiente de los demás, habría que eliminarlo).

```
baseS = null(coefImpS, 'r')  % base de S --> dim(S)=2
```

```
baseS = 4×2
    -1     0
     1     0
     0    -1
     0     1
```

```
baseT = null(coefImpT, 'r')  % base de T --> dim(T)=2
```

```
baseT = 4×2
     1     0
     1     0
     0     1
     0     1
```

```
genST = [baseS baseT]  % sistema generador de S+T
```

```
genST = 4×4
    -1     0     1     0
     1     0     1     0
     0    -1     0     1
     0     1     0     1
```

```
rank(genST)  % rango máximo --> sistema libre
```

```
ans = 4
```

```
% Por tanto, genST será una base del subespacio suma (S+T), es decir:
baseST = genST  % dim(S+T)=4
```

```
baseST = 4×4
    -1     0     1     0
     1     0     1     0
     0    -1     0     1
     0     1     0     1
```

```
% Al haber 4 vectores en esta base, esto quiere decir que S+T será
% todo R^4 --> S y T son subespacios complementarios, puesto que
% dim(S)+dim(T) = dim(S+T) y S+T=R^4
```

Búsqueda de subespacios complementarios

Sea el subespacio $S:\left.\begin{array}{c}-143x-54y-44r=0\\ t=0\end{array}\right\}$ de $\mathbb{R}^5$. Para encontrar un subespacio complementario (o suplementario) de S comenzaremos por obtener una base de S:

```
coefImpS = [-143 -54 0 0 -44; 0 0 0 1 0];
baseS = null(coefImpS, 'r')  % dim(S)=3
```

```
baseS = 5×3
   -0.3776         0   -0.3077
    1.0000         0         0
         0    1.0000         0
         0         0         0
```

```
         0         0    1.0000
```

```
rank(baseS)
```

```
ans = 3
```

A partir de aquí, se trata de extender esta base añadiendo nuevos vectores que sean linealmente independientes de los anteriores hasta formar una base del espacio total, $\mathbb{R}^5$ en este caso. Para ello podemos elegir cualquier vector, por ejemplo, los de la base canónica de $\mathbb{R}^5$.

```
rank([baseS, [1 0 0 0 0]'])  % ya tenemos el primer vector
```

```
ans = 4
```

```
% de la base del complementario: (1,0,0,0,0)
rank([baseS, [1 0 0 0 0]', [0 1 0 0 0]'])  % el vector
```

```
ans = 4
```

```
% (0,1,0,0,0) no nos sirve, ya que no es L.I. de los demás
rank([baseS, [1 0 0 0 0]', [0 0 1 0 0]'])  % el vector
```

```
ans = 4
```

```
% (0,0,1,0,0) no nos sirve, ya que no es L.I. de los demás
rank([baseS, [1 0 0 0 0]', [0 0 0 1 0]'])  % ya tenemos el
```

```
ans = 5
```

```
% segundo vector que necesitábamos para la base del
% complementario: (0,0,0,1,0)
```

Los vectores que hemos añadido a los de la base de S forman una base del complementario que buscábamos: $\{(1,0,0,0,0),(0,0,0,1,0)\}$

<u>Nota</u>**:** Recuerda que dados dos subespacios S y T cualesquiera siempre se cumplirá la fórmula de Grassmann:
dim(S+T)=dim(S)+dim(T)-dim(S $\cap$ T)

<u>Ejercicios propuestos</u>

Ejercicio 1:

En $\mathbb{R}^4$, dados los subespacios $S:\{(x,y,z,t): x=z, y=t\}$ y $T:\{(\alpha,0,\alpha,\beta): \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$, se pide:

- *a)* Halla una base del subespacio $S+T$. ¿Cuál es su dimensión?
- *b)* Halla una base del subespacio $S\cap T$. ¿Cuál es su dimensión?
- *c)* ¿Están S y T en suma directa?

Ejercicio 2:

Dado el subespacio $S:\{(x,y,z,t,r): x+y+z-t=0, x-y+z-t=0\}$ de $\mathbb{R}^5$, se pide:

- *a)* Halla otro subespacio T tal que $S \bigoplus T = \mathbb{R}^5$. ¿Cuáles son las dimensiones de S y T?
- *b)* Obtén las ecuaciones implícitas de T.
- *c)* Comprueba que S y T están en suma directa.

Ejercicio 3:

Sean S y T los subespacios de $\mathbb{R}^4$ formados por los vectores de la forma $(a+b,0,a,b)$ y $(m,p,0,m)$, respectivamente. Se pide:

- *a)* Halla el subespacio $S \cap T$.
- *b)* Halla el subespacio $S+T$.
- *c)* En caso de que S y T no estén en suma directa, halla dos subespacios complementarios de $S+T$.

Ejercicio 4

Dados los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^5$:

$$S:\begin{cases} 10x-22y+32z-7t+4r &= 0\\ 11x-3y+11z-4t-27r &= 0\\ 3x-y+9z-8t+14r &= 0\end{cases} \qquad T:(14\alpha-12\beta, 7\alpha, -12\alpha-51\beta, 18\beta, 19\alpha-4\beta)$$

Se pide:

- *a)* $S+T$
- *b)* $S \cap T$
- *c)* ¿Son S y T subespacios complementarios?