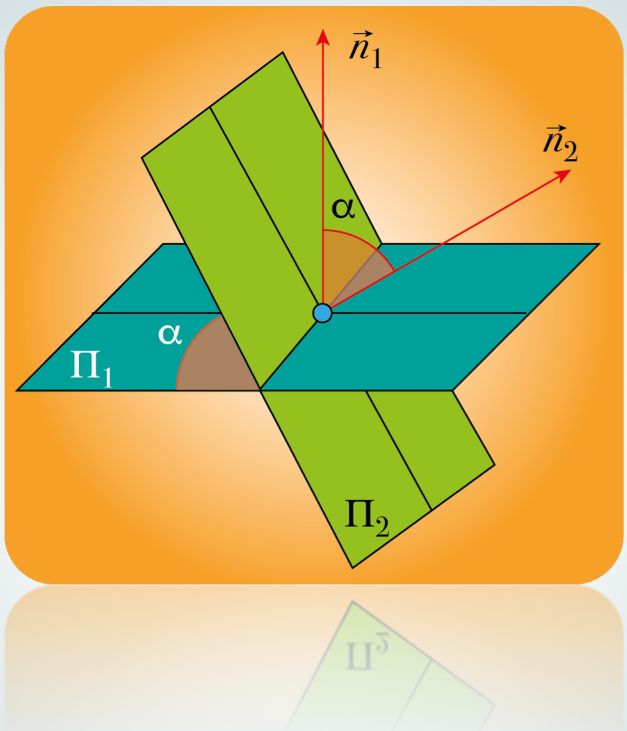
Álgebra y Geometría

Práctica 7. Espacios euclídeo (I)



Rodrigo García Manzanas
Ruth Carballo Fidalgo

Departamento de Matemática Aplicada y
Ciencias de la Computación

Grado en Ingeniería Civil

G1954: Álgebra y Geometría

Práctica 7: Espacio euclídeo (I)

Rodrigo García Manzanas (rodrigo.manzanas@unican.es)

Ruth Carballo Fidalgo (ruth.carballo@unican.es)

Objetivos

- Operar con productos escalares en MATLAB
- Obtener el complemento ortogonal de un subespacio dado
- Calcular bases ortogonales (y ortonormales)
- Calcular y utilizar la matriz de proyección sobre un cierto subespacio

Producto escalar

En MATLAB, se puede calcular el producto escalar usual de $\mathbb{R}^n$ con la función *dot*. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^3$, el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{u} = (4, 0, 3)$ y $\overrightarrow{v} = (1, -2, 3)$ se obtendría así:

```
u = [4 0 3]'; % vector u
v = [1 -2 3]';  % vector v
dot(u, v)  % producto escalar usual
```

```
ans = 13
```

Si estamos trabajando con productos escalares que impliquen el cálculo de integrales, debemos saber que la función *int* de MATLAB se utiliza para el cálculo integral (en modo simbólico). Por ejemplo, si quisiéramos calcular $\int_0^1 x^2 dx$, haríamos:

```
syms x real  % hay que definir la variable simbólica sobre la que integro
int(x^2, 0, 1)  % hay que que darle a 'int' la función a integrar
```

ans =

$\frac{1}{3}$

```
% y los límites de integración
```

La norma o módulo de un vector puede calcularse fácilmente con la función *norm.* Eso sí, *norm* considera el producto escalar usual, por lo que, si estuviésemos trabajando con otro tipo de producto, habría que calcularla "a mano".

```
norm_u = norm(u)  % norma del vector u (considerando el producto escalar usual)
```

```
norm_u = 5
```

```
sqrt(dot(u, u))  % comprobamos que obtenemos el mismo resultado
```

```
ans = 5
```

Por tanto, normalizar el vector $\vec{u}$ sería tan fácil como:

```
u_norm = u/norm(u)  % vector normalizado
```

```
u_norm = 3×1
    0.8000
         0
    0.6000
```

```
norm(u_norm)  % efectivamente, el módulo del vector normalizado es 1
```

```
ans = 1
```

Cálculo de subespacios ortogonales

Sea S un subespacio de $\mathbb{R}^4$ dado en su forma paramétrica, $S = \{(\alpha, \alpha, \beta, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Para encontrar el complemento ortogonal (o simplemente ortogonal) de S, $S^\perp$, tendremos que buscar todos los vectores ortogonales a S. Partiremos, para ello, de una base de S:

```
baseS = [1 1 0 0; 0 0 1 1]';  % base de S
```

$S^\perp$ estará formado por los vectores (x, y, z, t) que satisfagan las siguientes ecuaciones:

$$(1, 1, 0, 0) \cdot (x, y, z, t) = 0$$
$$(0, 0, 1, 1) \cdot (x, y, z, t) = 0$$

Si consideramos el producto escalar usual, esto se puede escribir en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto, para hallar una base de $S^\perp$ bastaría con resolver el sistema homogéneo que tiene como matriz de coeficientes los vectores de la base de S (colocados por filas):

```
baseS_ortog = null(baseS', 'r')  % base de S_ortog:
```

```
baseS_ortog = 4×2
```

```
    -1     0
     1     0
     0    -1
     0     1
```

```
% {(-1,1,0,0), (0,0,-1,1)}
```

Como vemos, la base de $S^{\perp}$ está compuesta por dos vectores, por lo que $dim(S^{\perp}) = 2$. Esto era de esperar, puesto que ya vimos que $dim(S) = 2$, y sabemos que, por ser ortogonales, $dim(S) + dim(S^{\perp}) = 4$. Efectivamente:

```
rank([baseS baseS_ortog])  % la unión de la base de S
```

```
ans = 4
```

```
% y la base de S_ortog forman una base del espacio total, R⁴
```

Podemos comprobar fácilmente S y $S^{\perp}$ son en efecto ortogonales viendo que el producto escalar de los vectores de sus bases (las combinaciones de todos con todos) es 0:

```
baseS'*baseS_ortog  % las dimensiones tienen que ser
```

```
ans = 2×2
     0     0
     0     0
```

```
% las adecuadas para el producto matricial
```

Cálculo de bases ortogonales (y ortonormales)

Si el subespacio viene dado por sus ecuaciones implícitas, la función *null* (sin el argumento de entrada opcional *'r'*) actuando sobre la matriz de los coeficientes nos devuelve una base ortonormal. Por ejemplo, para el subespacio $S = \{(x, y, z, t, r) : 2x - y - z = 0, 2x - 3z + t = 0\}$:

```
coefImpS = [2 -1 -1 0 0; 2 0 -3 1 0];  % coefs. eqs. implícitas S
baseS = null(coefImpS, 'r')  % base de S
```

```
baseS = 5×3
    1.5000   -0.5000         0
    2.0000   -1.0000         0
    1.0000         0         0
         0    1.0000         0
         0         0    1.0000
```

```
dot(baseS(:,1), baseS(:,2))  % vemos que NO es ORTOGONAL --> NO será ORTONORMAL
```

```
ans = -2.7500
```

```
baseortonS = null(coefImpS)  % base ORTONORMAL de S
```

```
baseortonS = 5×3
    0.5553   -0.0771         0
    0.6653   -0.3967         0
    0.4453    0.2426         0
    0.2253    0.8819         0
         0         0    1.0000
```

```
% Comprobación ORTOGONALIDAD
dot(baseortonS(:,1), baseortonS(:,2))
```

```
ans = -2.7756e-17
```

```
dot(baseortonS(:,1), baseortonS(:,3))
```

```
ans = 0
```

```
dot(baseortonS(:,2), baseortonS(:,3))
```

```
ans = 0
```

```
% Comprobación ORTONORMALIDAD
norm(baseortonS(:,1))
```

```
ans = 1
```

```
norm(baseortonS(:,2))
```

```
ans = 1
```

```
norm(baseortonS(:,3))
```

```
ans = 1
```

Si el subespacio viene dado por su forma paramétrica, y siempre que estemos trabajando con el producto escalar usual, podremos obtener una base ortonormal partiendo de una base cualquiera del subespacio. Para ello utilizaremos la función *orth* (que implementa internamente el método de Gram-Schmidt), que ortonormaliza los vectores columna de una matriz. Por ejemplo, siguiendo con el mismo subespacio del ejemplo anterior, $S = \{(1.5\alpha - 0.5\beta, 2\alpha - \beta, \alpha, 0, \gamma) : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$:

```
baseS = [1.5 2 1 0 0; -0.5 -1 0 1 0; 0 0 0 0 1]';  % base NO ORTONORMAL de S
baseorton2S = orth(baseS)  % base ORTONORMAL de S
```

```
baseorton2S = 5×3
   -0.5410    0.1471         0
   -0.7676   -0.1037         0
   -0.3143    0.3979         0
    0.1390    0.8996         0
         0         0   -1.0000
```

Fíjate que la base devuelta por *orth* es distinta a la que se obtiene con *null,* pero igual de válida.

```
% Comprobación ORTOGONALIDAD
dot(baseorton2S(:,1), baseorton2S(:,2))
```

```
ans = -2.7756e-17
```

```
dot(baseorton2S(:,1), baseorton2S(:,3))
```

```
ans = 0
```

```
dot(baseorton2S(:,2), baseorton2S(:,3))
```

```
ans = 0
```

```
% Comprobación ORTONORMALIDAD
norm(baseorton2S(:,1))
```

```
ans = 1
```

```
norm(baseorton2S(:,2))
```

```
ans = 1
```

```
norm(baseorton2S(:,3))
```

```
ans = 1
```

Nota: Si los vectores columna que se le pasan a *orth* no fuesen linealmente independientes, la propia función se encarga de eliminar los que sean dependientes y ortonormaliza el resto.

Matriz de proyección

La matriz de proyección sobre un subespacio S se obtiene como $P_S = A(A^tA)^{-1}A^t$, donde A es una matriz que contiene en sus columnas los vectores de una base (cualquiera, no tiene porqué ser ortogonal/ortonormal) de S. Por tanto, si quisiéramos hallar la matriz de proyección sobre el subespacio $S =< (2, -1, 1), (-1, 2, 1) >$, haríamos lo siguiente:

```
baseS = [2 -1 1; -1 2 1]';  % base de S (es un sist. gen. y los vectores son L.I.).
dot(baseS(:,1), baseS(:,2))  % vemos que esta base NO es ortogonal
```

```
ans = -3
```

```
PS = baseS*inv(baseS'*baseS)*baseS'  % matriz de proyección sobre S
```

```
PS = 3×3
    0.6667   -0.3333    0.3333
   -0.3333    0.6667    0.3333
    0.3333    0.3333    0.6667
```

Podemos ver que P_S cumple las tres propiedades que ha de cumplir toda matriz de proyección:

```
% 1) Es cuadrada
% 2) Es simétrica
% 3) Es idempotente (Ps=Ps²)
PS - PS^2
```

```
ans = 3×3
10^-15 ×
   -0.1110         0         0
         0   -0.1110         0
         0         0         0
```

Acabamos de ver, por tanto, que P_S es la matriz de proyección sobre el subespacio cuya base es $\{(2, -1, 1), (-1, 2, 1)\}$. Una vez hemos calculado P_S, sería inmediato proyectar cualquier vector $\vec{v}$ sobre

S; tan sólo habría que aplicarle la matriz P_s (es decir, multiplicar P_S por $\vec{v}$). Por ejemplo, para proyectar ortogonalmente el vector $(3, 4, 5)$ sobre S:

```
v = [3 4 5]';  % vector a proyectar
PS*v  % proyección de v sobre S
```

```
ans = 3×1
    2.3333
    3.3333
    5.6667
```

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1:

En $\mathbb{C}[0, 1]$, con el producto escalar definido como $f \cdot g = \int_0^1 f(x)g(x)dx$, calcula el módulo y la distancia y ángulo entre vectores para $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 1$.

Ejercicio 2:

En $\mathbb{M}_{2\times2}$, con el producto escalar $A \cdot B = tr(A^tB)$, normaliza las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Nota: La traza de una matriz es la suma de todos los elementos en su diagonal principal. En MATLAB, se calcula directamente con la función *trace*.

Ejercicio 3:

En $\mathbb{R}^4$, obtén una base del complemento ortogonal del subespacio $S = \{(\alpha, 0, 2\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Verifica que $S^\perp$ es ortogonal a S y que S y $S^\perp$ son subespacios complementarios/suplementarios.

Ejercicio 4:

En $\mathbb{R}^3$, proyecta ortogonalmente el vector $(3, 2, 2)$ sobre el subespacio $S =< (2, 0, 1), (0, 3, -1), (2, 3, 0) >$ utilizando la matriz de proyección. Calcula dicha matriz partiendo de dos bases de S distintas, una de ellas ortonormal y la otra no. ¿Qué sucede?

Ejercicio 5:

Utilizando matrices de proyección, calcula la proyección ortogonal del vector $\vec{v} = (3, 4, 5)$ sobre el subpespacio $S : \{x - y + z = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$ y sobre $S^{\perp}$. Comprueba que ambas proyecciones son ortogonales entre sí y que $\vec{v}$ puede expresarse como la suma de ambas. ¿Qué pasa si sumas la matriz de proyección sobre S y la matriz de proyección sobre $S^{\perp}$?