5-607"'(8(90. : 0%";'

!"#$%&$'()*(+, -&$'$&. /01(-&/0'-01(234

<.="&6.(9'"$;'(> '/?'/'1
<@%A(B'"7'--.(C&='-6.

!"#$%&$ ' "(&)*+"* , $&" ' -&./$*0#1./$+$*2
3."(/.$4*+"*1$*3) ' #5&$/.6(

74&"*&" ' $*4"*#581./$*8$9)*:./"(/.$;
3%"$&.<"*3) ' ')(4*=>?@3?A0*BCD

Grado en Ingeniería Civil

G1954: Álgebra y Geometría

Práctica 9: Aplicaciones lineales (I)

Rodrigo García Manzanas (rodrigo.manzanas@unican.es)

Ruth Carballo Fidalgo (ruth.carballo@unican.es)

Objetivos

- Obtención de la matriz de una aplicación lineal
- Cálculo del núcleo y la imagen de una aplicación lineal

Matriz asociada a una aplicación

Sea f la siguiente aplicación lineal:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\rightsquigarrow (x' = 2x, y' = -3y + z) \end{aligned}$$

Siempre podremos reescribirla en la forma $\vec{x'} = A\vec{x}$ del siguiente modo:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Siendo A su matriz asociada en bases canónicas (o matriz estándar). Fíjate que al ser una aplicación que va de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$, A es de tamaño 2×3. Una vez tenemos A, es muy fácil calcular el transformado (es decir, la imagen), de cualquier vector del espacio inicial $\mathbb{R}^3$. Por ejemplo, la imagen de $(5, -7, -\pi)$ en $\mathbb{R}^2$ será:

```
A = [2 0 0; 0 -3 1]  % matriz estándar de f
```

```
A = 2×3
     2     0     0
     0    -3     1
```

```
A*[5 -7 -pi]'  % imagen por f del vector (5, -7, -pi)
```

```
ans = 2×1
   10.0000
   17.8584
```

Se puede comprobar fácilmente que las columnas de A se corresponen con la imagen por f de los vectores de la base canónica del espacio inicial:

```
A*[1 0 0]'  % primera columna de A (imagen del primer vector de la BC de R³)
```

```
ans = 2×1
     2
     0
```

```
A*[0 1 0]'  % segunda columna de A (imagen del segundo vector de la BC de R³)
```

```
ans = 2×1
     0
    -3
```

```
A*[0 0 1]'  % tercera columna de A (imagen del tercer vector de la BC de R³)
```

```
ans = 2×1
     0
     1
```

Imaginemos ahora que nos pidieran la matriz asociada a f en otras bases que no fueran las canónicas, por ejemplo $B = \{(1,0,1),(0,-1,-3),(-2,1,0)\}$ en $\mathbb{R}^3$ y $B' = \{(1,1),(2,-1)\}$ en $\mathbb{R}^2$. Para hallar dicha matriz, M, necesitaremos la matriz de paso de B a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ (P) y la matriz de paso de B' a la base canónica de $\mathbb{R}^2$ (Q). Sabemos que $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ y $Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. A partir de aquí sería inmediato obtener M, pues sabemos que se cumple la relación $M = Q^{-1}AP$.

<u>*Nota*</u>: Por ser ambas matrices que representan la misma aplicación en bases distintas, se dice que A y M son *equivalentes*.

```
P = [1 0 1; 0 -1 -3; -2 1 0]'  % matriz de paso de B a la BC de R³
```

```
P = 3×3
     1     0    -2
     0    -1     1
     1    -3     0
```

```
Q = [1 1; 2 -1]'  %  matriz de paso de B' a la BC de R²
```

```
Q = 2×2
     1     2
     1    -1
```

```
M = inv(Q)*A*P  % matriz de f en la bases B y B'
```

```
M = 2×3
    1.3333         0   -3.3333
    0.3333         0   -0.3333
```

Núcleo e imagen

Una vez tenemos la matriz de la aplicación, es muy fácil hallar su núcleo (o *kernel*). Recuerda que el núcleo lo forman los vectores del espacio inicial cuya imagen por f es el $\vec{0}$ del espacio final. Por tanto, nuestro problema se reducirá a resolver el sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes es precisamente la matriz de la aplicación, A, lo que nos devolverá directamente una base de $Ker(f)$:

```
baseKer = null(A, 'r')  % base de Ker(f) --> dim(Ker(f))=1
```

```
baseKer = 3×1
         0
    0.3333
    1.0000
```

Para comprobar que la base que hemos obtenido es correcta, podríamos ver que la imagen del vector que la forma es el $\vec{0}$ de $\mathbb{R}^2$:

```
A*baseKer  % al aplicarle A a la base de Ker(f), obtengo el vector 0 de R²
```

```
ans = 2×1
     0
     0
```

Por otro lado, sabemos que $Im(f)$ es el subespacio generado por las columnas de A, por lo cual, una base de $Im(f)$ será la formada por las columnas de A que sean linealmente independientes:

```
null(A, 'r')  % sólo hay dos columnas L.I. en A, la primera y otra,
```

```
ans = 3×1
         0
    0.3333
    1.0000
```

```
% a escoger entre la segunda y la tercera
base1Im = A(:, 1:2);  % esta sería una base de Im(f) --> dim(Im(f))=2
base2Im = A(:, [1, 3]);  % esta sería otra base de Im(f) --> dim(Im(f))=2
```

Date cuenta de que se cumple la relación de dimensiones $dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) = n$, donde n es la dimensión del espacio inicial. En nuestro caso particular tendríamos $1 + 2 = 3$. Además, por definición, $rg(f) = rg(A) = dim(Im(f))$.

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1:

Dada la siguiente aplicación lineal:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) &\rightsquigarrow (x + 2y + t, y + 3z - t, 0) \end{aligned}$$

- *a)* Obtén la forma implícita del núcleo y de la imagen de f
- *b)* Clasifica f
- *c)* Halla los vectores que tienen como imagen el vector $(2, 2, 0)$
- *d)* Halla los vectores que tienen como imagen el vector $(2, 2, 2)$
- *e)* Calcula una base de la imagen del subespacio S de $\mathbb{R}^4$ engendrado por los vectores $\{(0, 0, 3, 2), (4, 6, 3, -1), (1, 0, 0, 2)\}$

Ejercicio 2:

Dada la siguiente aplicación lineal:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\rightsquigarrow (3x - 2y, x - z) \end{aligned}$$

- *a)* ¿Cuál es el rango de f?
- *b)* Obtén una base del núcleo de f
- *c)* Obtén una base de la imagen de f
- *d)* Clasifica f
- *e)* Obtén una base de la imagen del subespacio $S \in \mathbb{R}^3$ cuya ecuación implícita es $x + y + z = 0$
- *f)* Obtén la matriz de f en las bases $B = \{(1, 0, -1), (0, 2, 3), (0, -1, 0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $B' = \{(1, 0), (-1, 2)\}$ de $\mathbb{R}^2$

Ejercicio 3:

Sea $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ una aplicación lineal que verifica las siguientes condiciones:

- f^2 es la función nula
- Los vectores $(1, 1, 1, 1)$ y $(1, 1, 1, 0)$ se transforman por f en $(1, 1, 0, 0)$ y $(1, 0, 0, 0)$, respectivamente

Halla su matriz estándar.

Ejercicio 4:

Dada una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que su núcleo es el subespacio de ecuaciones $\{x + y + z = 0, t = 0\}$ y los vectores $\{(1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ se transforman por f en sí mismos. Obtén:

- *a)* Su matriz asociada en la base canónica de $\mathbb{R}^4$ (matriz estándar)
- *b)* La imagen del subespacio S de $\mathbb{R}^4$ cuyas ecuaciones implícitas son $\{x + y + z = 0, t = 0, x - y + 2t = 0\}$. ¿Qué puedes decir sobre S?
- *c)* La matriz de f en la base $B = \{(-1, 0, 0, 0), (1, 0, -2, 3), (1, -1, 0, 2), (-1, -1, -1, 0)\}$ de $\mathbb{R}^4$