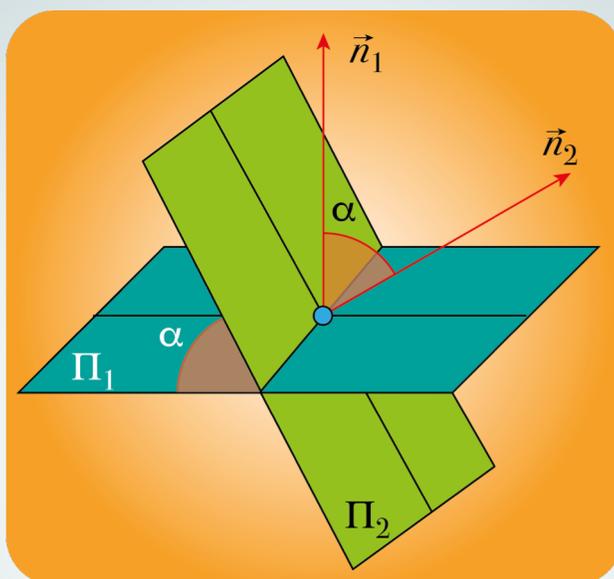


Álgebra y Geometría

Práctica 9. Aplicaciones lineales (I)



Rodrigo García Manzananas
Ruth Carballo Fidalgo

Departamento de Matemática Aplicada y
Ciencias de la Computación

Este tema se publica bajo Licencia:

[Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Práctica 9: Aplicaciones lineales (I)

Rodrigo García Manzanas (rodrigo.manzanas@unican.es)

Ruth Carballo Fidalgo (ruth.carballo@unican.es)

Objetivos

- Obtención de la matriz de una aplicación lineal
- Cálculo del núcleo y la imagen de una aplicación lineal

Matriz asociada a una aplicación

Sea f la siguiente aplicación lineal:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \rightsquigarrow (x' = 2x, y' = -3y + z)$$

Siempre podremos reescribirla en la forma $\vec{x}' = A \vec{x}$ del siguiente modo:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Siendo A su matriz asociada en bases canónicas (o matriz estándar). Fíjate que al ser una aplicación que va de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^2 , A es de tamaño 2×3 . Una vez tenemos A , es muy fácil calcular el transformado (es decir, la imagen), de cualquier vector del espacio inicial \mathbb{R}^3 . Por ejemplo, la imagen de $(5, -7, -\pi)$ en \mathbb{R}^2 será:

```
A = [2 0 0; 0 -3 1] % matriz estándar de f
```

```
A = 2x3
     2     0     0
     0    -3     1
```

```
A*[5 -7 -pi]' % imagen por f del vector (5, -7, -pi)
```

```
ans = 2x1
     10.0000
     17.8584
```

Se puede comprobar fácilmente que las columnas de A se corresponden con la imagen por f de los vectores de la base canónica del espacio inicial:

```
A*[1 0 0]' % primera columna de A (imagen del primer vector de la BC de R³)
```

```
ans = 2x1
     2
     0
```

```
A*[0 1 0]' % segunda columna de A (imagen del segundo vector de la BC de R³)
```

```
ans = 2x1
     0
    -3
```

```
A*[0 0 1]' % tercera columna de A (imagen del tercer vector de la BC de R³)
```

```
ans = 2x1
     0
     1
```

Imaginemos ahora que nos pidieran la matriz asociada a f en otras bases que no fueran las canónicas, por ejemplo $B = \{(1, 0, 1), (0, -1, -3), (-2, 1, 0)\}$ en \mathbb{R}^3 y $B' = \{(1, 1), (2, -1)\}$ en \mathbb{R}^2 . Para hallar dicha matriz, M , necesitaremos la matriz de paso de B a la base canónica de \mathbb{R}^3 (P) y la matriz de paso de B' a la base

canónica de \mathbb{R}^2 (Q). Sabemos que $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ y $Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. A partir de aquí sería inmediato obtener

M , pues sabemos que se cumple la relación $M = Q^{-1}AP$.

Nota: Por ser ambas matrices que representan la misma aplicación en bases distintas, se dice que A y M son *equivalentes*.

```
P = [1 0 1; 0 -1 -3; -2 1 0]' % matriz de paso de B a la BC de R³
```

```
P = 3x3
     1     0    -2
     0    -1     1
     1    -3     0
```

```
Q = [1 1; 2 -1]' % matriz de paso de B' a la BC de R²
```

```
Q = 2x2
     1     2
     1    -1
```

```
M = inv(Q)*A*P % matriz de f en la bases B y B'
```

```
M = 2x3
  1.3333     0   -3.3333
  0.3333     0   -0.3333
```

Núcleo e imagen

Una vez tenemos la matriz de la aplicación, es muy fácil hallar su núcleo (o *kernel*). Recuerda que el núcleo lo forman los vectores del espacio inicial cuya imagen por f es el $\vec{0}$ del espacio final. Por tanto, nuestro problema se reducirá a resolver el sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes es precisamente la matriz de la aplicación, A , lo que nos devolverá directamente una base de $\text{Ker}(f)$:

```
baseKer = null(A, 'r') % base de Ker(f) --> dim(Ker(f))=1
```

```
baseKer = 3x1
          0
          0.3333
          1.0000
```

Para comprobar que la base que hemos obtenido es correcta, podríamos ver que la imagen del vector que la forma es el $\vec{0}$ de \mathbb{R}^2 :

```
A*baseKer % al aplicarle A a la base de Ker(f), obtengo el vector 0 de R^2
```

```
ans = 2x1
      0
      0
```

Por otro lado, sabemos que $\text{Im}(f)$ es el subespacio generado por las columnas de A , por lo cual, una base de $\text{Im}(f)$ será la formada por las columnas de A que sean linealmente independientes:

```
null(A, 'r') % sólo hay dos columnas L.I. en A, la primera y otra,
```

```
ans = 3x1
      0
      0.3333
      1.0000
```

```
% a escoger entre la segunda y la tercera
```

```
base1Im = A(:, 1:2); % esta sería una base de Im(f) --> dim(Im(f))=2
```

```
base2Im = A(:, [1, 3]); % esta sería otra base de Im(f) --> dim(Im(f))=2
```

Date cuenta de que se cumple la relación de dimensiones $\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = n$, donde n es la dimensión del espacio inicial. En nuestro caso particular tendríamos $1 + 2 = 3$. Además, por definición, $\text{rg}(f) = \text{rg}(A) = \dim(\text{Im}(f))$.

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1:

Dada la siguiente aplicación lineal:

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) \rightsquigarrow (x + 2y + t, y + 3z - t, 0)$$

- a) Obtén la forma implícita del núcleo y de la imagen de f
- b) Clasifica f
- c) Halla los vectores que tienen como imagen el vector $(2, 2, 0)$
- d) Halla los vectores que tienen como imagen el vector $(2, 2, 2)$
- e) Calcula una base de la imagen del subespacio S de \mathbb{R}^4 engendrado por los vectores $\{(0, 0, 3, 2), (4, 6, 3, -1), (1, 0, 0, 2)\}$

Ejercicio 2:

Dada la siguiente aplicación lineal:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \rightsquigarrow (3x - 2y, x - z)$$

- a) ¿Cuál es el rango de f ?
- b) Obtén una base del núcleo de f
- c) Obtén una base de la imagen de f
- d) Clasifica f
- e) Obtén una base de la imagen del subespacio $S \in \mathbb{R}^3$ cuya ecuación implícita es $x + y + z = 0$
- f) Obtén la matriz de f en las bases $B = \{(1, 0, -1), (0, 2, 3), (0, -1, 0)\}$ de \mathbb{R}^3 y $B' = \{(1, 0), (-1, 2)\}$ de \mathbb{R}^2

Ejercicio 3:

Sea $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ una aplicación lineal que verifica las siguientes condiciones:

- f^2 es la función nula
- Los vectores $(1, 1, 1, 1)$ y $(1, 1, 1, 0)$ se transforman por f en $(1, 1, 0, 0)$ y $(1, 0, 0, 0)$, respectivamente

Halla su matriz estándar.

Ejercicio 4:

Dada una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que su núcleo es el subespacio de ecuaciones $\{x + y + z = 0, t = 0\}$ y los vectores $\{(1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ se transforman por f en sí mismos. Obtén:

- a) Su matriz asociada en la base canónica de \mathbb{R}^4 (matriz estándar)
- b) La imagen del subespacio S de \mathbb{R}^4 cuyas ecuaciones implícitas son $\{x + y + z = 0, t = 0, x - y + 2t = 0\}$.
¿Qué puedes decir sobre S ?
- c) La matriz de f en la base $B = \{(-1, 0, 0, 0), (1, 0, -2, 3), (1, -1, 0, 2), (-1, -1, -1, 0)\}$ de \mathbb{R}^4