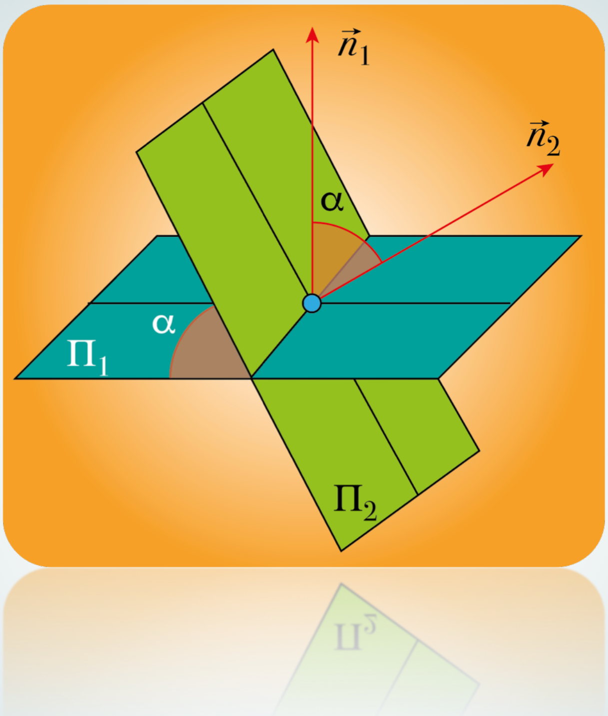
Álgebra y Geometría

Problemas Tema 5. Aplicaciones lineales



Rodrigo García Manzanas
Ruth Carballo Fidalgo

Departamento de Matemática Aplicada y
Ciencias de la Computación

Universidad de Cantabria · *Grado en Ingeniería Civil*

G1954: Álgebra y Geometría

Tema 5: Aplicaciones lineales

1) Comprueba si las siguientes aplicaciones son o no lineales:

a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(x, y) \rightsquigarrow (x + 1, y + 1, x + 1)$

b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x, y) \rightsquigarrow (y, x)$

2) Dada la aplicación lineal

$$\begin{gathered} f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) \rightsquigarrow (x + 2y + t, y + 3z - t, 0) \end{gathered}$$

a) Obtén una base de $Ker(f)$

b) Obtén una base de $Im(f)$

c) Obtén una base de la imagen de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

- $S =< (1, 0, 1, 0), (2, 3, 0, -1) >$
- $T =< (0, 0, 3, 2), (4, 6, 3, -1), (1, 0, 0, 2) >$

3) a) Dada la aplicación lineal

$$\begin{gathered} f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) \rightsquigarrow (x + y + z, z, y, x) \end{gathered}$$

halla todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ cuya imagen sea $(4, 1, 3, 0)$

b) Dada la aplicación lineal

$$\begin{gathered} f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \rightsquigarrow (x + y, y - z) \end{gathered}$$

halla todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ cuya imagen sea $(1, 1)$

4) Clasifica (inyectiva sí/no, suprayectiva sí/no, biyectiva sí/no) las siguientes aplicaciones:

a) $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x, y, z, t) \rightsquigarrow (x - z, y - t)$

b) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(x, y, z) \rightsquigarrow (-x - y, 2x + 2y, z)$

c) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(x, y, z) \rightsquigarrow (3x + y, 3y + z, 3z)$

d) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \rightsquigarrow \frac{1}{2-x}$

5) Halla una base de la imagen del subespacio S de $\mathbb{R}^3$ dado por la ecuación $z = 2y$, mediante la aplicación lineal cuya matriz estándar es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6) Dada la aplicación lineal

$$\begin{gathered} f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \rightsquigarrow (2x + 3z, x + 2y) \end{gathered}$$

a) Halla la matriz de f tomando como bases $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ en $\mathbb{R}^3$ y la canónica en $\mathbb{R}^2$

b) Halla la matriz de f tomando como bases la canónica en $\mathbb{R}^3$ y $B' = \{(-2, 0), (2, 1)\}$ en $\mathbb{R}^2$

7) Dadas las bases $B = \{(1,4),(1,3)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $B' = \{(2,0,1),(0,-1,0),(3,0,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$:

a) Halla la matriz en bases B y B' de una aplicación $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, si su matriz estándar es $A = \left(\begin{smallmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

b) Halla la matriz en bases canónicas de otra aplicación $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, si su matriz en bases B y B' es $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)$

8) Dada la aplicación lineal

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\rightsquigarrow (-x,-y,x+z) \end{aligned}$$

Halla la matriz de f en la base $B = \{(1,0,2),(1,0,-1),(0,3,0)\}$

9) Obtén la forma cuadrática asociada a las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

10) Obtén la matriz asociada a las siguientes formas cuadráticas:

a) $Q(x,y,z) = -x^2 + 3z^2 - 2xy + 4xz - 2yz$

b) $Q(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 2xy + 6xz - 4yz$

c) $Q(x,y) = -x^2 - 4xy$

Solución:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$