Universidad de Cantabria · *Grado en Ingeniería Civil*

G1954: Álgebra y Geometría

Tema 6: Diagonalización

1) Clasifica los siguientes endomorfismos:

a) En $\mathbb{R}^3$, dado por la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) En $\mathbb{R}^2$, dado por la ecuación $f(x,y) = (2x+5, 4x+10)$

c) En $\mathbb{R}^2$, la aplicación identidad

2) Halla los valores propios de los siguientes endomorfismos:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

3) Dado el endomorfismo
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
determina si los siguientes vectores son o no vectores propios. En caso afirmativo, halla su valor propio asociado

a) $\vec{u} = (0,3,0)$

b) $\vec{v} = (1,0,-1)$

c) $\vec{w} = (2,2,1)$

4) Del endomorfismo
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$
se sabe que es diagonalizable y que $\lambda = 2$ es autovalor, siendo $\{(1,2,0),(0,6,1)\}$ una base de su subespacio propio asociado. Halla, sin resolver su polinomio característico, todos los autovalores de A

5) De una matriz A_{2x2}, se sabe que es diagonalizable y que los valores propios son 0 y 3, con vectores propios respectivamente (1,1) y (4,1). ¿Cuál es esa matriz?

6) Diagonaliza, si es posible, los siguientes endomorfismos:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, cuyo polinomio característico es $(-2-\lambda)^2(1-\lambda)$

d) $f(x,y,z) = (x+y, y, y+z)$, en $\mathbb{R}^3$

e) $f(x,y,z) = (3x-3z, 3y+9z, -3z)$, en $\mathbb{R}^3$

7) Calcula A^8, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

8) Una cierta aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ admite como vectores propios los vectores $(1,0,0)$, $(0,-2,0)$ y $(1,0,1)$.

a) ¿Es f diagonalizable?

b) Sabiendo que $f(1,1,2) = (0,1,1)$, halla los valores propios de f

9) Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, diagonalizable, de la cual se sabe que:

- El vector $(1,0,0)$ se transforma por f en sí mismo
- $S : \{x + 2y = 0\}$ es un subespacio propio de f
- La traza de la matriz estándar de f es 5

Se pide:

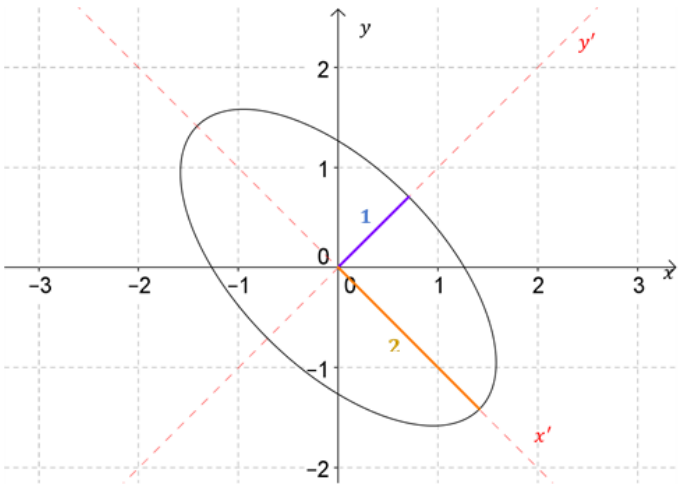
a) ¿Cuáles son los autovalores de f?

b) ¿Cuál es la matriz estándar de f?

10) Obtén una base en función de la cual la cónica $Q(x,y) = 2x^2 + 4xy + 5y^2 = 4$ se sitúe sobre los correspondientes ejes coordenados. ¿Qué tipo de cónica es? Con respecto a la base canónica:

- ¿Cuál es el ángulo que está rotada?
- ¿Cuáles son las coordenadas de sus vértices?
- ¿Cuáles son las coordenadas de sus focos?

11) A partir de la figura, halla la forma cuadrática $Q(x,y)$ y el el plano $z = cte$ a partir de los cuales se obtiene la elipse que se muestra a continuación:



▶

12) Obtén una base en función de la cual la cónica $Q(x,y) = 3x^2 - 8xy + 3y^2 = 14$ se sitúe sobre los correspondientes ejes coordenados. ¿Qué tipo de cónica es? Con respecto a la base canónica:

- ¿Cuál es el ángulo que está rotada?
- ¿Cuáles son las coordenadas de sus vértices?
- ¿Cuáles son las coordenadas de sus focos?