Grado en Ingeniería Civil

G1954: Álgebra y Geometría

2-Febrero-2022 • Conv. extraordinaria: Teoría

Nombre y apellidos: ....

El test está formado por **20 preguntas**. Cada una de ellas tiene tres posibles respuestas, de las cuales sólo una es correcta. **Cada respuesta correcta sumará 0.5 puntos**, de forma que la puntuación máxima que se puede alcanzar en el test es de 10. Por contra, **cada respuesta errónea restará 0.125 puntos** (1/4 de 0.5). Si prefieres no arriesgar, siempre tienes la opción de dejar la pregunta sin responder, que no sumará ni restará. Dispones de **90 minutos**.

---

1. Sabiendo que un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ tiene coordenadas $(1, \beta)$ en la base $B = \{(1,2), (4,-1)\}$ y coordenadas $(6, \alpha)$ en la base $B' = \{(1,1), (1,-1)\}$, ¿cuánto valdrían α y β?

   (a) $\alpha = 3$ y $\beta = 7$

   (b) $\alpha = 7$ y $\beta = 3$

   (c) $\alpha = -1$ y $\beta = 2$

---

2. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, que se puede escalonar aplicando, en este orden, las operaciones elementales $F_{2,3}$ y $F_{2,1(-1/2)}$. ¿Cuál de las matrices mostradas a continuación corresponderá al resultado del producto matricial $E_2 E_1$?

   Nota: E_1 (E_2) sería la matriz elemental correspondiente a la primera (segunda) operación elemental aplicada.

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

---

3. Se sabe que existe una recta que pasa por los puntos $(3, y_1)$, $(5, y_2)$ y $(6, y_3)$. De entre los siguientes, ¿cuáles podrían ser estos tres puntos?

   (a) $(3, \alpha)$, $(5, 2\beta)$ y $(6, \frac{5}{2}\alpha)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

   (b) $(3, \alpha)$, $(5, \frac{3}{2}\alpha)$ y $(6, 3\alpha)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

   (c) $(3, 2)$, $(5, 4)$ y $(6, 5)$

---

4. Sean $\vec{v}_1 = (1,1,-1)$, $\vec{v}_2 = (2,1,0)$ y $\vec{w} = (-1,0,\alpha+1)$ tres vectores de $\mathbb{R}^3$. ¿Cuándo pertenecerá $\vec{w}$ al subespacio generado por $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$?

   (a) Cuando $\alpha = 0$
   (b) Nunca
   (c) Cuando $\alpha = -2$

5. ¿Qué tipo de cónica tiene por ecuación $Q(x,y) = -2x^2 + 8xy - 2y^2 = 12$?

   (a) Una hipérbola de eje focal horizontal, rotada 45° (en sentido antihorario) con respecto a la base canónica
   (b) Una hipérbola de eje focal vertical, rotada 90° (en sentido antihorario) con respecto a la base canónica
   (c) Una hipérbola de eje focal horizontal, rotada 45° (en sentido horario) con respecto a la base canónica

6. Sea A una matriz cuadrada de orden n cuyos elementos son $a_{ij} = 0$ si $i > j$ y $a_{ij} = 1$ si $i \leq j$. Entonces:

   (a) A siempre es diagonalizable
   (b) A nunca es diagonalizable
   (c) A es diagonalizable si n es par

7. Dada la aplicación lineal
   $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
   $(x,y) \rightsquigarrow (x+y, x-y, y)$
   ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es FALSA?

   (a) f es inyectiva
   (b) Los vectores $f(1,0)$ y $f(0,1)$ son linealmente independientes
   (c) $dim(Im(f)) = 1$

8. En la base canónica de $\mathbb{R}^4$, ¿cuál de las siguientes matrices es la que representa a la forma cuadrática $Q(x,y,z,t) = -8xz$?

   (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (c) $Q(x,y,z,t) = -8xz$ no es una forma cuadrática

9. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
   $(x,y,z) \rightsquigarrow (-x+y, z)$
   ¿Cuál es la matriz de f en la bases canónica de $\mathbb{R}^3$ y $B = \{(1,-1),(0,-1)\}$ de $\mathbb{R}^2$?

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

10. Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ cuya forma paramétrica es $(\alpha, \beta, \alpha + 2\beta)$. ¿Cuál de las siguientes es una base de $S^{\perp}$?

   (a) $\{(-1, -2, 1)\}$
   (b) $\{(1, 0, 1)\}$
   (c) $\{(1, 0, 1), (0, 1, 2)\}$

11. ¿Pueden tener dos vectores distintos la misma proyección ortogonal sobre un mismo subespacio?

   (a) Sólo si son vectores simétricos respecto a ese subespacio
   (b) No
   (c) Sí

12. Sea S un subespacio de $\mathbb{R}^5$ de dimensión 2, y $S^{\perp}$ su complemento ortogonal. Entonces:

   (a) $dim(S^{\perp}) < 3$
   (b) $dim(S + S^{\perp})^{\perp} = 2$
   (c) $(S + S^{\perp})^{\perp} = \vec{0}$

13. En $\mathbb{R}^3$, sean los subespacios $S : \{x = y\}$ y $T =< (0, 1, 0) >$. ¿Son S y T suplementarios?

   (a) Sí
   (b) No
   (c) Con los datos que da el enunciado es imposible determinar si S y T son suplementarios

14. Como sabes, en los métodos iterativos para la resolución de sistemas de ecuaciones se descompone la matriz de coeficientes del sistema, A, en dos matrices M y N tales que $A = M - N$. ¿Cuáles serían esas matrices si utilizásemos el método de Gauss-Seidel para resolver el siguiente sistema?

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 3x - y & = & 7 \\ x + 6y - z & = & 12 \\ -5y + 9z & = & -3 \end{array} \right.$$

   (a) $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & 9 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

   (c) $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

15. ¿Cuál de los siguientes sistemas de ecuaciones NO es lineal?

   (a) $\left\{ \begin{array}{rcl} x - 5y + z & = & 4 \\ 2x - 3z + 7 & = & z \end{array} \right.$

   (b) $\left\{ \begin{array}{rcr} 2x^2 - y + 2z & = & 1 \\ x - 2y & = & -1 \end{array} \right.$

   (c) $\left\{ \begin{array}{rcr} 2x - \sqrt{2}y + 9z & = & e^4 \\ ln(5)x - 2y & = & ln(1) \end{array} \right.$

16. Sea A la matriz de coeficientes de un sistema lineal cuyo conjunto de soluciones es de la forma $(2\alpha+4, \alpha, 0, \alpha)$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces:

   (a) $rg(A) = 3$

   (b) $rg(A) = 4$

   (c) No puede conocerse el $rg(A)$ con esta información

17. Si descomponemos $A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ como suma de una matriz simétrica S y otra antisimétrica T, entonces T sería:

   (a) $T = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

   (b) $T = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$

   (c) $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

18. Sean A y B matrices cuadradas de orden 4, y B singular. Entonces:

   (a) $rg(AB) < 4$

   (b) $rg(AB) = 4$

   (c) $rg(AB) = 3$

19. Sea el endomorfismo $f : U \longrightarrow U$, $\lambda \in \mathbb{R}$ un escalar y $\vec{u} \neq 0$ un vector del espacio vectorial U. En estas condiciones:

   (a) Si $f(\lambda\vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$, entonces λ es valor propio de f

   (b) Si $f(\lambda\vec{u}) = \vec{u}$, entonces λ^{-1} es valor propio de f

   (c) Si $f(\lambda\vec{u}) = \vec{u}$, entonces 1 es valor propio de f

20. En el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 1 se define el producto escalar $f \cdot g = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. De acuerdo a este producto, ¿cuánto ha de valer a para que los polinomios $f(x) = x$ y $g(x) = x + a$ sean ortogonales?

   (a) $a = -1/3$

   (b) $a = -3$

   (c) $a = -2/3$

Grado en Ingeniería Civil

G1954: Álgebra y Geometría

2-Febrero-2022 • Conv. extraordinaria: MATLAB

Nombre y apellidos: ....

El test está formado por **12 preguntas**. Cada una de ellas tiene tres posibles respuestas, de las cuales sólo una es correcta. **Cada respuesta correcta sumará $\frac{10}{12}$ (0.8333) puntos**, de forma que la puntuación máxima que se puede alcanzar en el test es de 10. Por contra, **cada respuesta errónea restará 0.2083 puntos** (1/4 de 0.8333). Si prefieres no arriesgar, siempre tienes la opción de dejar la pregunta sin responder, que no sumará ni restará. Dispones de **75 minutos**.

---

1. Sea S un subespacio de $\mathbb{R}^6$ que tiene por sistema generador el siguiente:
$<(-8,0,-4,0,7,-11),(-26,12,-12,4,39,-33),(1,-6,0,-2,-9,0)>$
¿Cuál es la forma implícita de S?

   __Nota__: El orden de las variables en $\mathbb{R}^6$ es (x,y,z,t,u,v)

   (a) $\left\{\begin{array}{rcl} -1.5x-y+z & = & 0 \\ 0.5y+t+v & = & 0 \\ 0.5x-y+u & = & 0 \end{array}\right.$

   (b) $\left\{\begin{array}{rcl} -0.5x-0.0833y+z & = & 0 \\ -0.3333y+t & = & 0 \\ 0.8750x-1.3542y+u & = & 0 \\ -1.3750x-0.2292y+v & = & 0 \end{array}\right.$

   (c) $-1.5x+0.5y+z=0$

---

2. ¿Cuál es el error cuadrático que se cometería al resolver el siguiente sistema (incompatible) por mínimos cuadrados?

   $\left\{\begin{array}{rcl} 4x-4y & = & 0 \\ x+y & = & 5 \\ x-3y & = & 6 \end{array}\right.$

   (a) 11.1111

   (b) 53.7778

   (c) 1.6666

---

3. ¿Para qué valor/es de a se puede expresar el vector $(-940,-259,a,642)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ y $\vec{u_3}$?

   $\vec{u_1}=(-5,0,1,2)$

   $\vec{u_2}=(0,7,-1,-4)$

   $\vec{u_3}=(0,0,-1,-2)$

   (a) Para $a=284$

   (b) Para $a=\{188,-37,-59,0\}$

   (c) Para ningún valor de a

---

4. En $\mathbb{C}[0, \frac{\pi}{2}]$, con el producto escalar definido como $f \cdot g = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)g(x)dx$, ¿cuál es la distancia entre $f(x) = \sqrt{2}x^5 - x^3 + 6$ y $g(x) = xsen(x)$?

   (a) $sen(\frac{\pi}{2})$
   (b) 1.4142
   (c) 8.6831

---

5. En $\mathbb{R}^2$, ¿cuál es la matriz de rotación (Givens) que sitúa al punto $(-\sqrt{3}, 0)$ sobre la recta $y = x$ (en el primer cuadrante)?

   (a) $\begin{pmatrix} -0.5799 & -0.8147 \\ 0.8147 & -0.5799 \end{pmatrix}$
   (b) $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
   (c) $\frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

---

6. En $\mathbb{R}^3$, ¿cuál es la matriz de reflexión con respecto al subespacio $S : \{2x - z = 0\}$?

   (a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   (b) $\begin{pmatrix} 0.4620 & 0 & 0.8451 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.8451 & 0 & -0.3275 \end{pmatrix}$
   (c) $\begin{pmatrix} -0.6 & 0 & 0.8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.6 \end{pmatrix}$

---

7. Obtén un ajuste del tipo $y = ax^b$ para la siguiente nube de puntos:

x	1.4	2.2	3.3	4.1	5.1	6.3	7.1	7.7
y	4.4	8.3	14.4	20.5	27.3	34.6	42.3	46.1

   ¿Cuáles son los parámetros a y b que se obtienen en el ajuste?

   (a) $a = -3.9868$, $b = 2.7945$
   (b) $a = 1.3342$, $b = 0.3612$
   (c) $a = 2.7945$, $b = 1.3830$

---

8. Sea f un endomorfismo en $\mathbb{R}^3$ del que se sabe que:

   - $Ker(f) : \{\sqrt{2}x = y, 5x = -z\}$
   - La imagen por f del vector $(0, 1, -4)$ es el $(\sqrt{5}, 0, -1)$
   - La imagen por f del vector $(0, -1, 2)$ es el $(\sqrt{2}, 2, -1)$

   ¿Cuál sería la imagen por f del vector $(-\pi, -6, 9)$?

   (a) $(20.1290, 12.9364, -11.3793)$
   (b) $(-22.2105, 0, 9.9329)$
   (c) $(3.0589, -2.4322, 5.6781)$

---

9. Sea S el siguiente subespacio de $\mathbb{R}^5$:

$$S : \left\{ \begin{array}{rcl} -143x - 54y - 44u & = & 0 \\ t & = & 0 \end{array} \right.$$

¿Podría ser $\{(1,0,0,0,0),(0,0,0,1,0)\}$ una base de un complementario de S?

<u>*Nota*</u>: El orden de las variables en $\mathbb{R}^5$ es (x, y, z, t, u)

(a) No
(b) Sí
(c) No puede existir un complementario de S

10. Sean S y T los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^5$:

$$S : \left\{ \begin{array}{rcl} -23x + 41y - 2u & = & 0 \\ 92y + 2t & = & 0 \end{array} \right.$$

$T = \{(\alpha, 0, \beta + \gamma, 0, \beta + 2\gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$

¿Cuál es una base de $S \cap T$?

<u>*Nota*</u>: El orden de las variables en $\mathbb{R}^5$ es (x, y, z, t, u)

(a) $\{(0,0,1,0,0),(-0.0870,0,0,0,1)\}$
(b) $\{(0,-0.5,46,1)\}$
(c) $S \cap T$ tiene dimensión 0

11. ¿Cuál es la solución del siguiente sistema?

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 3x + 5y - 4z & = & 7 \\ -3x - 2y + 4z & = & -1 \\ 6x + y - 8z & = & -4 \end{array} \right.$$

(a) Este sistema no tiene solución
(b) $(-1, 2, 0)$
(c) $(\frac{4}{3}z - 1, 2, z)$

12. Dado el siguiente sistema, en el que $k \in \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x + (k-6)y + kz & = & 3 \\ -9y - kz & = & -2 \\ x - 9y + 7kz & = & -8 \end{array} \right.$$

(a) Para $k = 1$, el sistema no tiene solución
(b) Para $k = 0$ el sistema tiene infinitas soluciones
(c) El sistema no tiene solución para $k = -57$