

# Energía y Telecomunicaciones

## Tema 2.4. Circuitos trifásicos. Material Complementario



**Alberto Arroyo Gutiérrez**  
**Mario Mañana Canteli**  
**Raquel Martínez Torre**  
**Jesús Mirapeix Serrano**  
**Cándido Capellán Villacián**

Departamento de Ingeniería Eléctrica  
y Energética

Este tema se publica bajo Licencia:  
[Creative Commons BY-NC-CA 4.0.](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-ca/4.0/)

## 1.1. Introducción:

### **Ventajas de los sistemas trifásicos frente a los monofásicos:**

- Si se fija constante el valor de tensión, el transporte de una determinada energía resulta más económico en un sistema trifásico ya que, en igualdad de condiciones, el sistema trifásico requiere un 25% menos de cobre.
- La potencia instantánea es constante, lo cual reduce vibración y esfuerzos en el rotor de los motores trifásicos.
- Los motores trifásicos no requieren de sistemas externos para su arranque.
- Se obtiene corriente continua con menos rizado.

## 1.2. Representación instantánea de señales trifásicas:

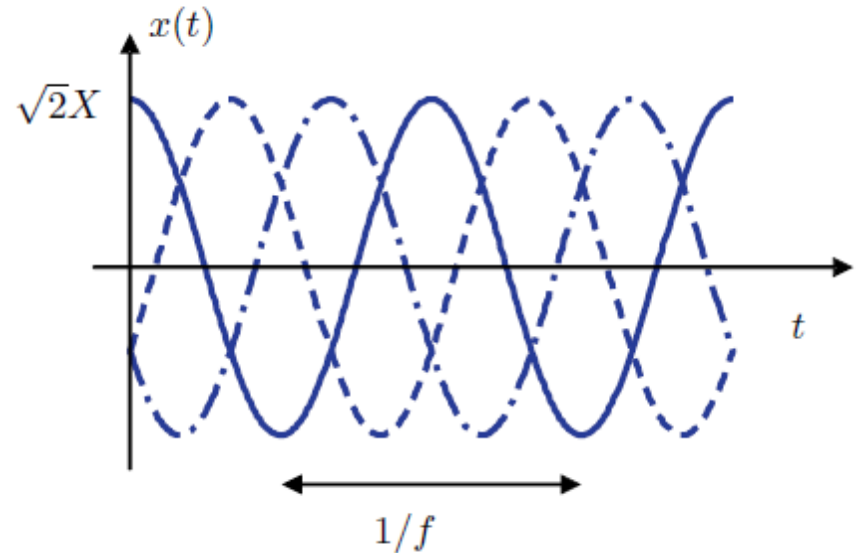
La notación empleada es la siguiente:

$$x_a(t) = \sqrt{2}X \cos(2\pi ft)$$

$$x_b(t) = \sqrt{2}X \cos(2\pi ft - \frac{2\pi}{3})$$

$$x_c(t) = \sqrt{2}X \cos(2\pi ft + \frac{2\pi}{3})$$

$$x_a + x_b + x_c = 0$$



**$x_i(t)$ :** valor instantáneo en el instante  $t$  de la tensión o intensidad en la fase.

**$X$ :** valor eficaz de la tensión o intensidad.

**$f$ :** frecuencia de la tensión o intensidad.

## 1.3. Representación fasorial:

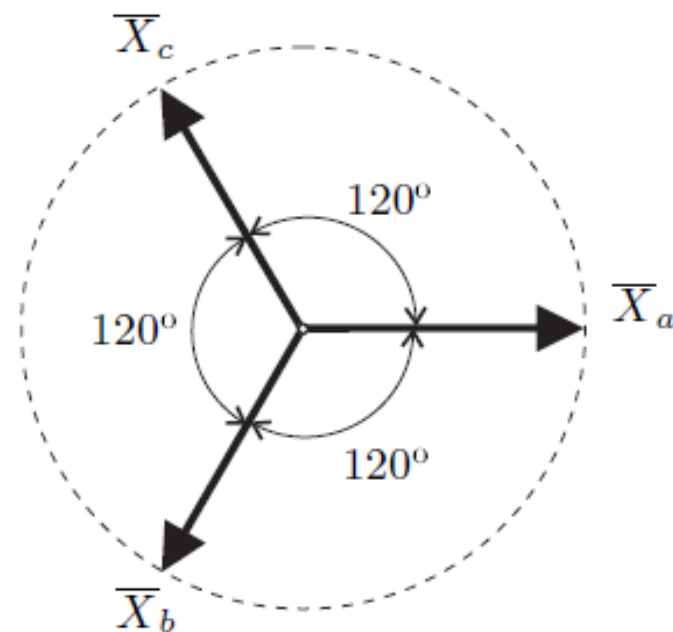
La representación fasorial de las anteriores ecuaciones es la siguiente:

$$\bar{X}_a(t) = X_{\angle 0} = X(1 + j0)$$

$$\bar{X}_b(t) = X_{\angle -\frac{2\pi}{3}} = X\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\bar{X}_c(t) = X_{\angle +\frac{2\pi}{3}} = X\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\bar{X}_a + \bar{X}_b + \bar{X}_c = 0$$



## 1.4. Circuito trifásico independiente:

La forma más inmediata de construir un sistema trifásico de tensiones es mediante la unión de tres generadores monofásicos independientes de igual frecuencia y valor eficaz, pero con distinta fase inicial.

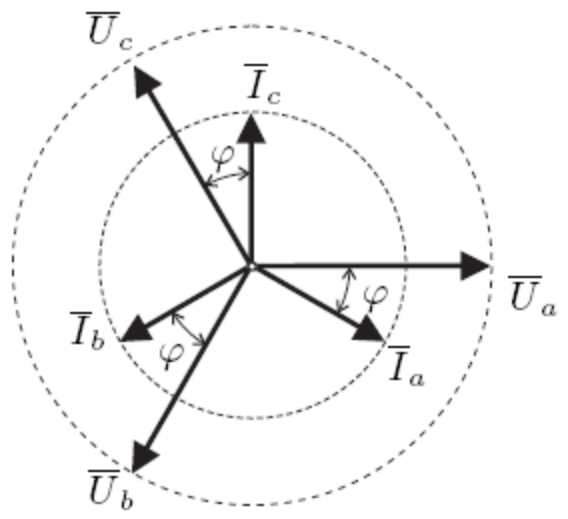
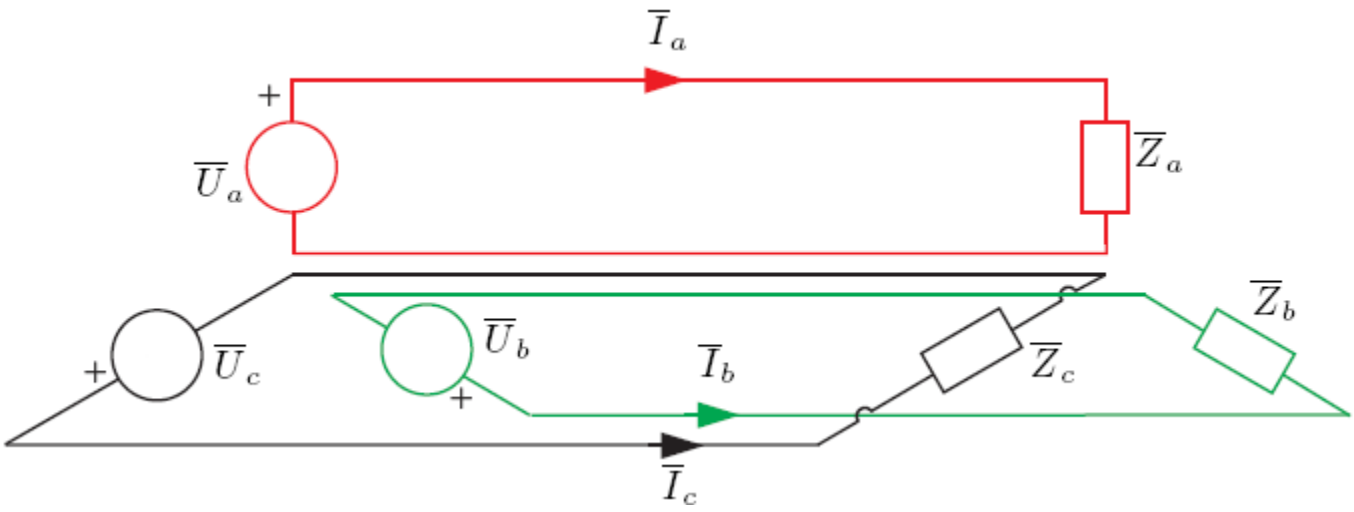
El análisis del circuito se reduce al análisis de las tres mallas de los circuitos monofásicos independientes. Aplicando la ley de Ohm, las corrientes de circulación se obtienen como:

$$\bar{I}_i = \frac{\bar{V}_i}{\bar{Z}_i}$$

Donde se cumple que las cargas forman un sistema equilibrado, es decir, todas las impedancias tienen el mismo módulo y fase:

$$\bar{Z}_a = \bar{Z}_b = \bar{Z}_c = \bar{Z} \angle \varphi$$

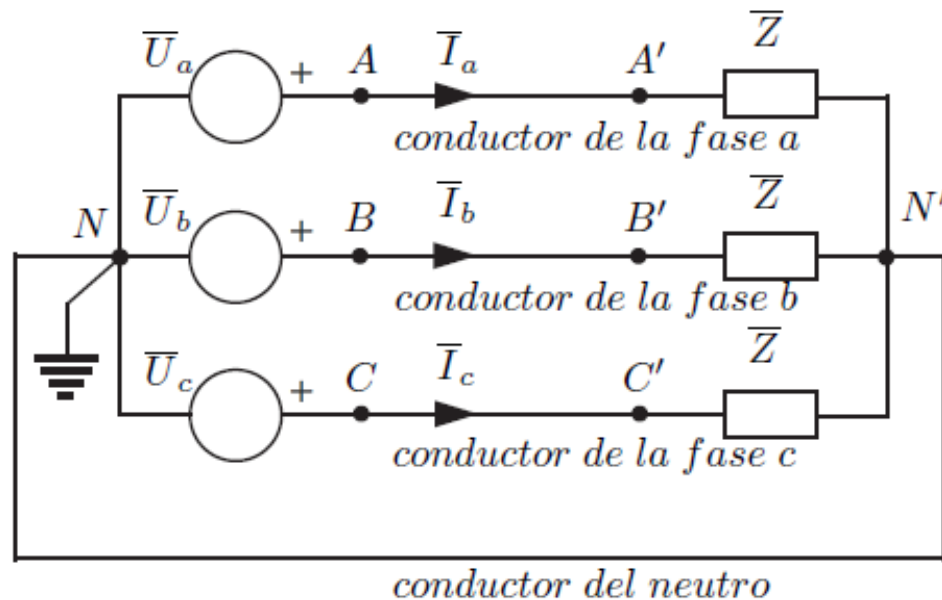
Con lo que las corrientes tienen el mismo módulo, se encuentran desfasadas  $120^\circ$  y su suma es cero.



## 1.5. Conexión en estrella equilibrada:

Una forma sencilla de construir un sistema de tensiones trifásicos es la conexión en estrella. Sin embargo, son necesarios seis conductores, con lo que el gasto en cobre aumenta.

Para minimizar este gasto, se unifican los caminos de vuelta de las intensidades en un conductor denominado neutro. Si las intensidades forman un sistema simétrico, la corriente de retorno es cero:



## 1.5. Conexión en estrella equilibrada:

Se denominan tensiones de fase o simples, a las tensiones  $V_a, V_b, V_c$ . Por cuestiones prácticas, el neutro N del generador se utiliza como potencial de referencia, en muchas ocasiones, se conecta directamente a tierra, por lo que  $V_N = 0$ .

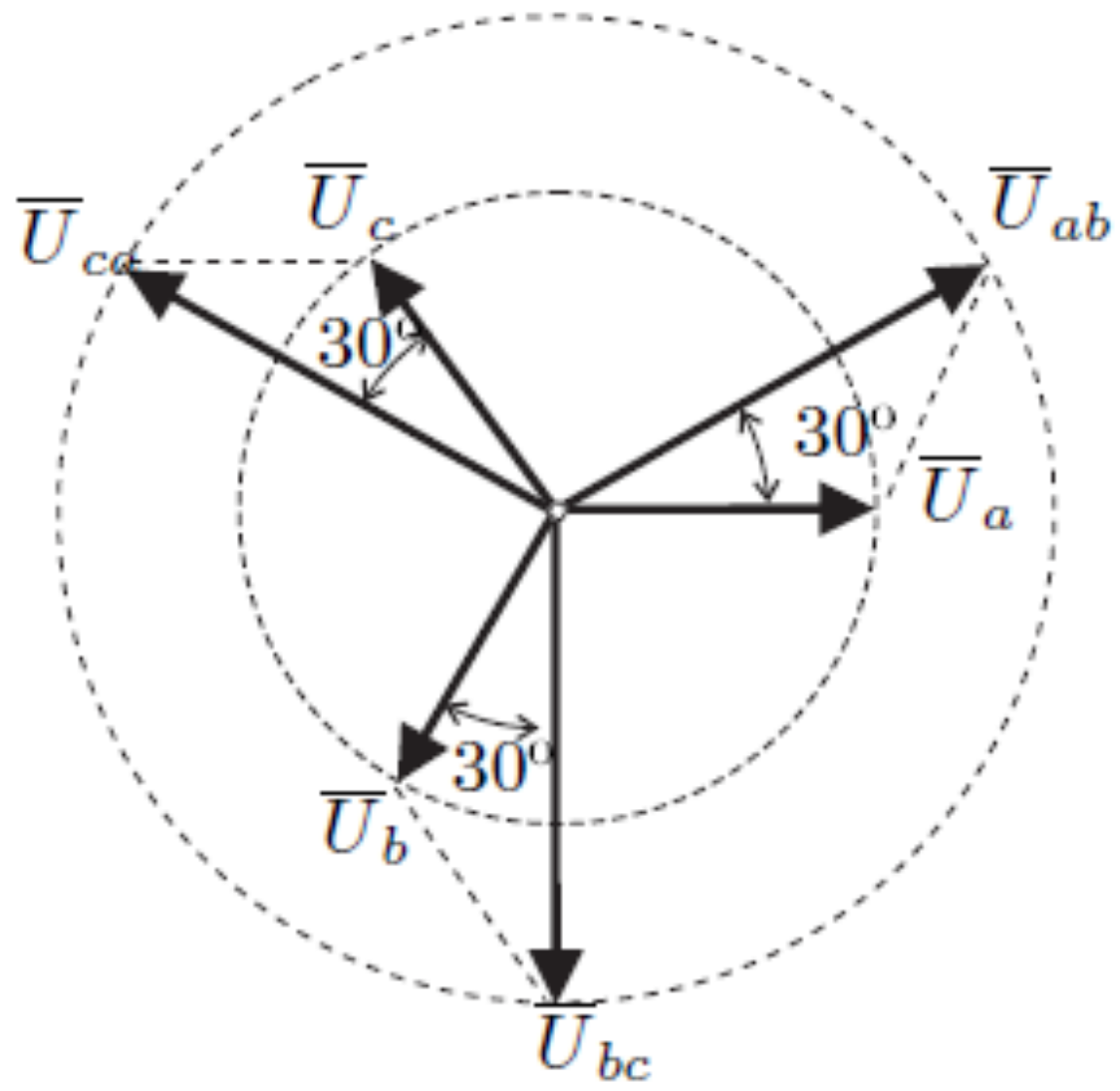
Se denominan tensiones de línea o compuestas a las tensiones  $V_{ab}, V_{bc}, V_{ca}$ , de forma que:

$$\begin{aligned} V_{ab} &= V_a - V_b = V(1 + j0) - V\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \\ &= V\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) = V\sqrt{3}\angle_{30^\circ} \end{aligned}$$

De forma análoga:

$$\begin{aligned} \text{€} \quad V_{ca} &= V\sqrt{3}\angle_{150^\circ} & V_{bc} &= V\sqrt{3}\angle_{-90^\circ} \end{aligned}$$





## 1.5. Conexión en estrella equilibrada:

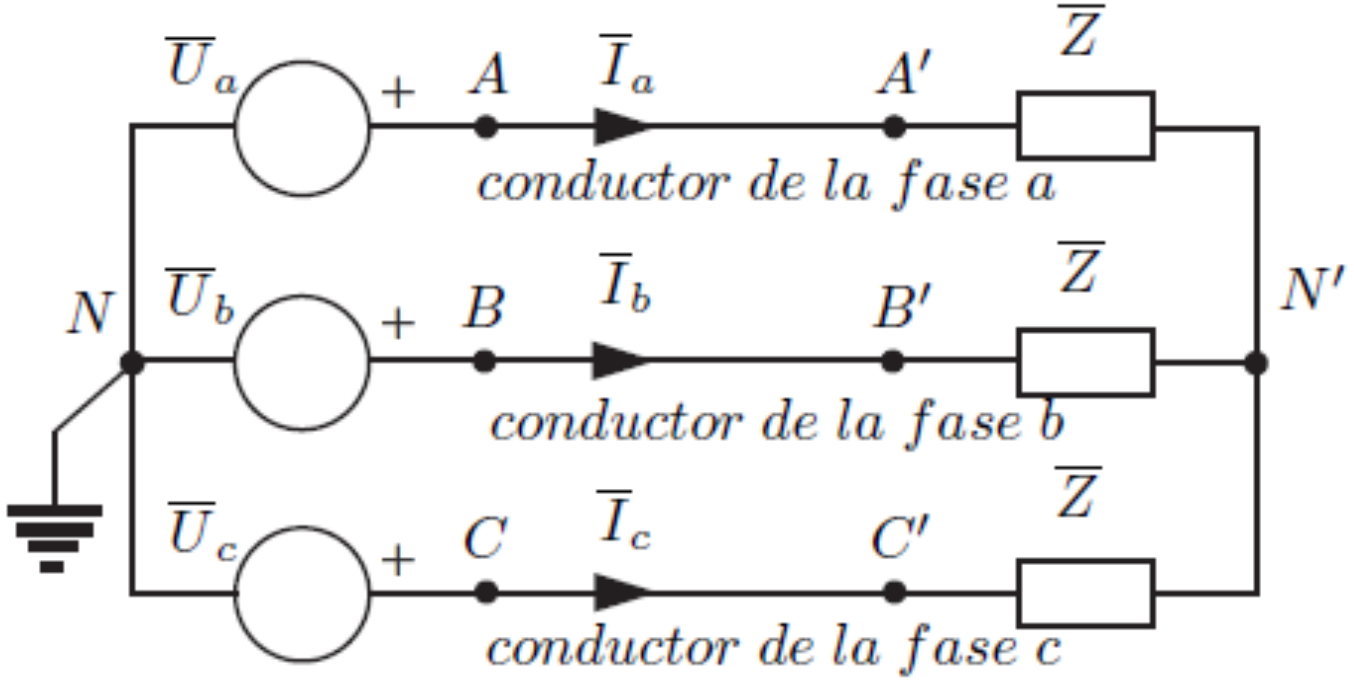
A las corrientes  $I_a$ ,  $I_b$ ,  $I_c$  que circulan por los conductores de fase que conectan el generador con la carga se denominan intensidades de línea y, en el caso de una carga conectada en estrella, coinciden con las intensidades que circulan por cada una de las fases de la carga (intensidades de fase).

En un sistema trifásico Y – Y de alimentación simétrica y carga equilibrada, la intensidad por el conductor del neutro se puede calcular como suma de las intensidades de fase:

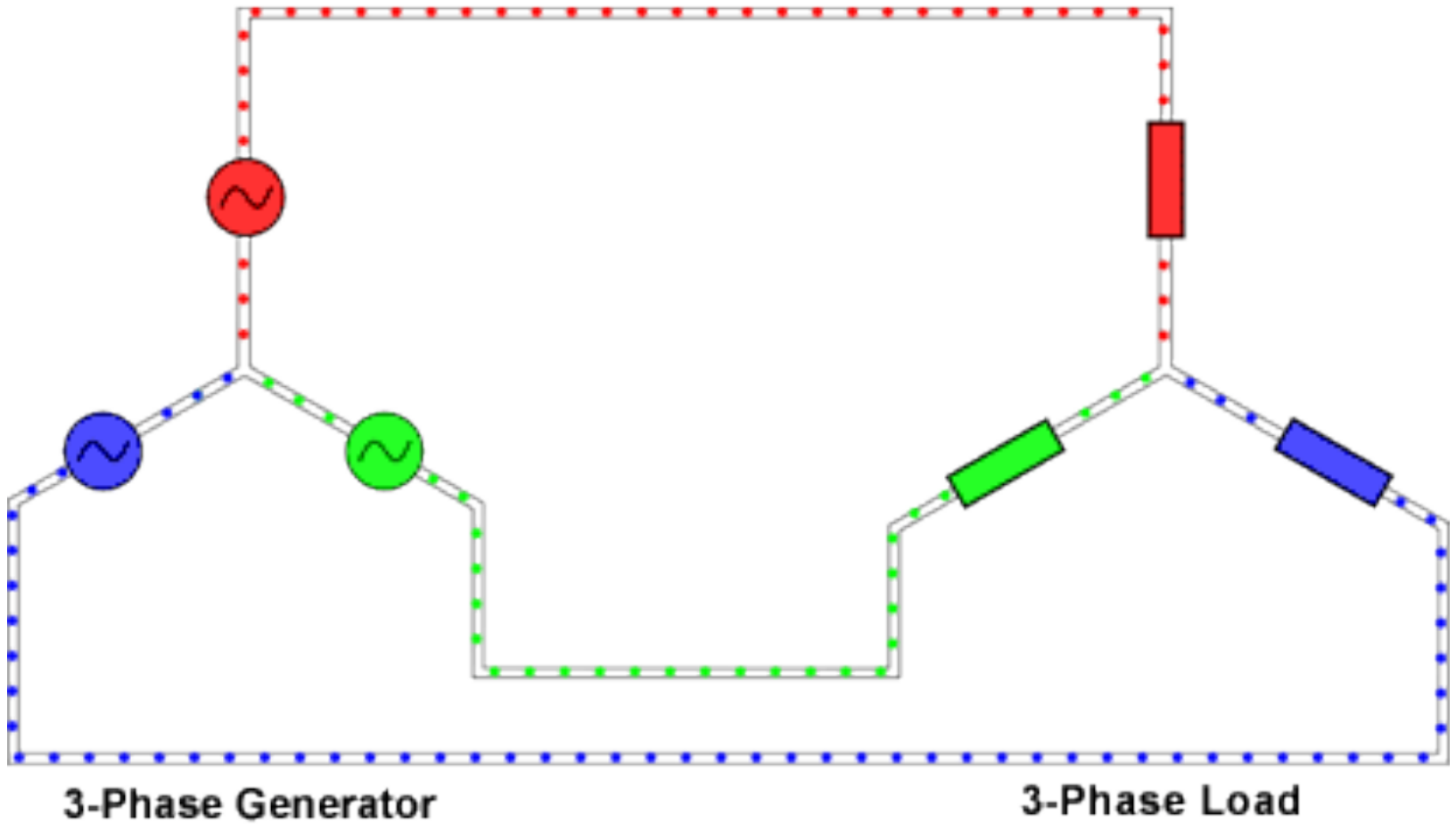
$$\overline{I_N} = \overline{I_a} + \overline{I_b} + \overline{I_c}$$

Sin embargo, si el sistema de alimentación es simétrico y la carga equilibrada, las intensidades por el conductor del neutro se anulan resultando  $\overline{I_N} = 0$ .

Si en las condiciones anteriores eliminamos al conductor del neutro, obtenemos el esquema de la figura:



### 3-Phase Transmission Line



## 1.5. Conexión en estrella equilibrada:

En el circuito anterior se verifica:

$$\bar{I}_a + \bar{I}_b + \bar{I}_c = 0$$

Siendo:

$$\bar{I}_a = \frac{\bar{V}_{A'N'}}{\bar{Z}} = \frac{\bar{V}_{AN} - \bar{V}_{N'N}}{\bar{Z}} \quad \bar{I}_b = \frac{\bar{V}_{B'N'}}{\bar{Z}} = \frac{\bar{V}_{BN} - \bar{V}_{N'N}}{\bar{Z}} \quad \bar{I}_c = \frac{\bar{V}_{C'N'}}{\bar{Z}} = \frac{\bar{V}_{CN} - \bar{V}_{N'N}}{\bar{Z}}$$

Substituyendo en la anterior:

$$\frac{\bar{V}_{AN} - \bar{V}_{N'N}}{\bar{Z}} + \frac{\bar{V}_{BN} - \bar{V}_{N'N}}{\bar{Z}} + \frac{\bar{V}_{CN} - \bar{V}_{N'N}}{\bar{Z}} = \frac{\bar{V}_{AN} + \bar{V}_{BN} + \bar{V}_{CN}}{\bar{Z}} - 3 \frac{\bar{V}_{N'N}}{\bar{Z}} = 0$$

Como el sistema es equilibrado:

$$\frac{\bar{V}_{AN} + \bar{V}_{BN} + \bar{V}_{CN}}{\bar{Z}} = 0 \Rightarrow 3 \frac{\bar{V}_{N'N}}{\bar{Z}} = 0 \Rightarrow \bar{V}_{N'N} = 0$$

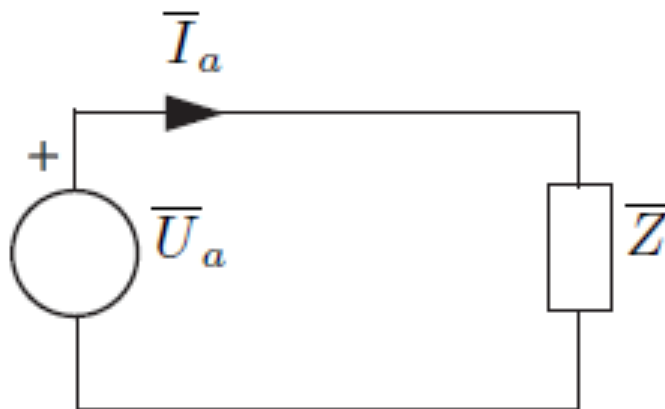
Queda así demostrado que, pese a no estar en contacto, N y N' están al mismo potencial.

### 1.5. Conexión en estrella equilibrada:

La conexión Y – Y sin neutro ofrece la gran ventaja de reducir de 6 a 3 el número de conductores del sistema trifásico independiente, con el consiguiente ahorro económico. Sin embargo, al trabajar sin neutro, si una de las fases quedara abierta, se produciría un desplazamiento del punto N' en la carga que puede resultar en un desequilibrio en la tensión de las dos fases restantes (una sobrepasaría el valor permitido a costa de la otra).

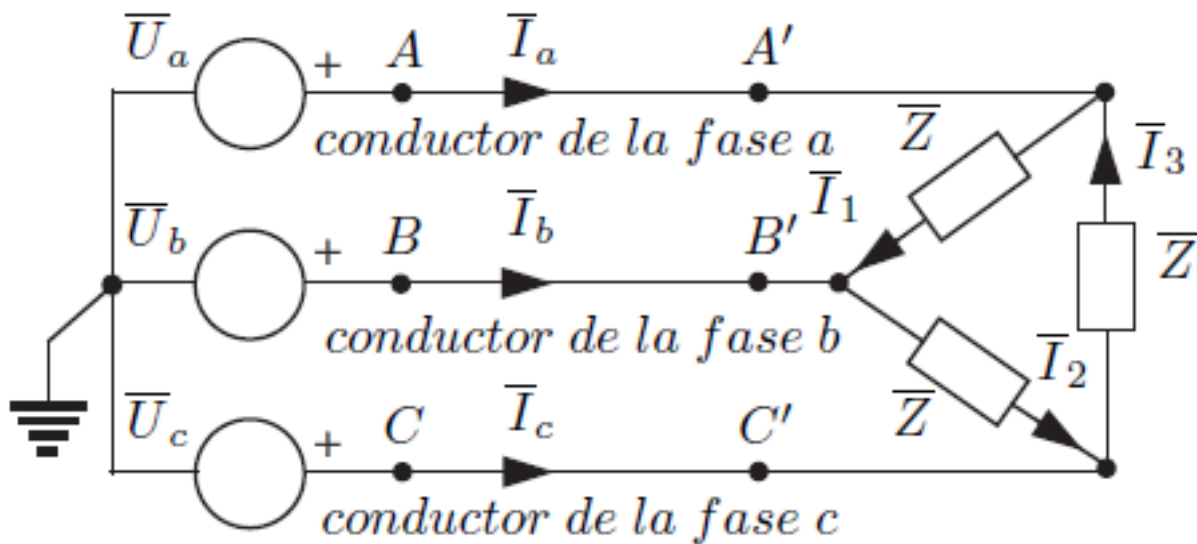
## 1.6. Circuito monofásico equivalente:

Para poder simplificar el análisis de los circuitos trifásicos simétricos, se utiliza una representación que transforma el circuito trifásico en otro monofásico equivalente, de forma que los valores eficaces de tensión e intensidad obtenidos son generalizables a las tres fases del circuito original.



## 1.7. Conexión en triángulo:

El objetivo ahora es conectar cada una de las cargas monofásicas entre dos conductores de fase:





## 1.7. Conexión en triángulo:

Tal y como puede observarse en la representación anterior, existe una coincidencia entre las tensiones de fase y de línea en la carga. Como ya se ha visto, existe una relación de  $\sqrt{3}$  entre el módulo de las tensiones de línea y las tensiones simples en el generador.

Al igual que en el caso anterior, la carga está equilibrada, es decir, presenta la misma impedancia en todas sus ramas.

Las tres intensidades de fase pueden obtenerse según las siguientes expresiones:

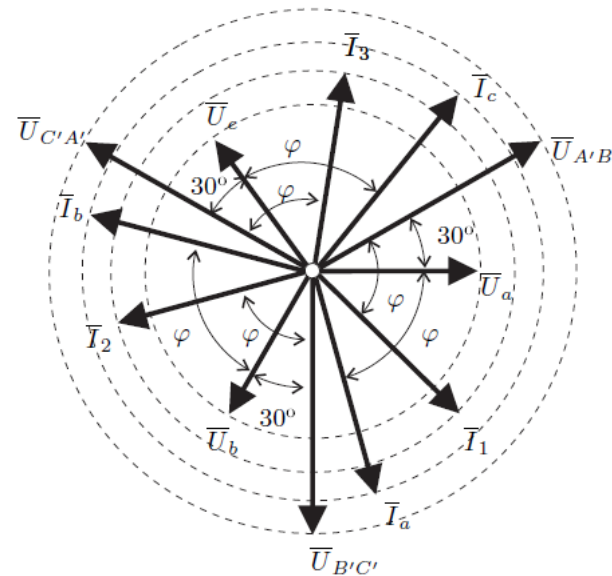
$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{V}_{A'B'}}{\bar{Z}} \qquad \bar{I}_2 = \frac{\bar{V}_{B'C'}}{\bar{Z}} \qquad \bar{I}_3 = \frac{\bar{V}_{C'A'}}{\bar{Z}}$$

A partir de las intensidades de fase, podemos calcular las intensidades de línea:

$$\bar{I}_a = \bar{I}_1 - \bar{I}_3 = \frac{\bar{V}_{A'B'} - \bar{V}_{C'A'}}{\bar{Z}} = \frac{\sqrt{3}V \angle 30^\circ - \sqrt{3}V \angle 150^\circ}{\bar{Z}} = 3 \frac{V}{Z} 1 \angle -\varphi \qquad \bar{I}_b = 3 \frac{V}{Z} 1 \angle -120^\circ - \varphi \qquad \bar{I}_c = 3 \frac{V}{Z} 1 \angle 120^\circ - \varphi$$

## 1.7. Conexión en triángulo:

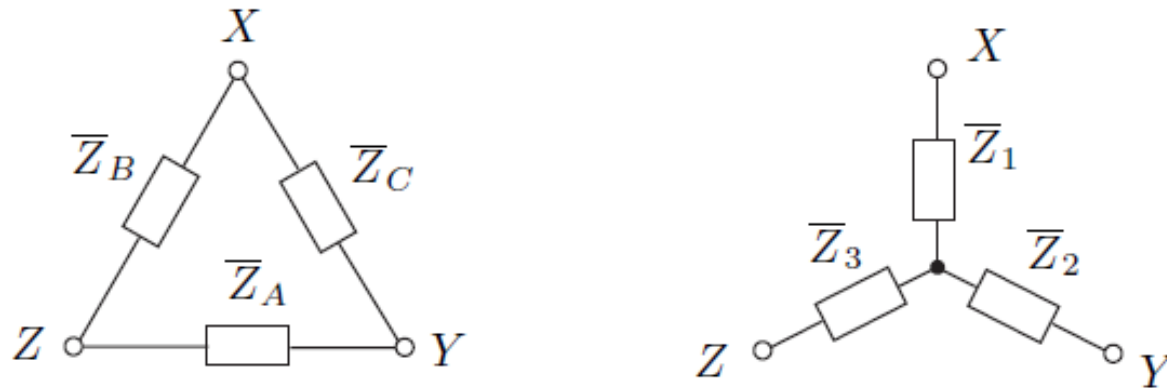
En el diagrama fasorial adjunto, se representan los fasores de las tensiones simples y compuestas, así como las intensidades de fase y línea.



Dado que las tensiones compuestas se adelantan  $30^\circ$  a las tensiones simples y que las intensidades de línea se retrasan  $30^\circ$  respecto a las de fase de la carga, el ángulo que forman las tensiones de línea con las intensidades de fase es el mismo que el ángulo que forman las tensiones simples con las intensidades de línea.

## 1.8. Equivalencia estrella-triángulo:

La transformación estrella-triángulo puede resultar muy útil en el análisis de circuitos trifásicos:



Podemos realizar dicha transformación estrella-triángulo mediante la siguiente expresión:

$$Z_i = \frac{\textit{suma de los productos binarios de todas las impedancias de la estrella}}{\textit{impedancia de la rama conectada al nudo opuesto a } Z_i}$$

$$Z_A = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_1}$$

$$Z_B = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_2}$$

$$Z_C = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_3}$$

## 1.8. Equivalencia estrella-triángulo:

De la misma forma, la transformación triángulo-estrella se realiza mediante la expresión general:

$$\bar{Z}_i = \frac{\text{producto de las dos impedancias del nudo conectadas al nudo } i}{\text{suma de las tres impedancias del triángulo}}$$

$$\bar{Z}_1 = \frac{\overline{Z_B Z_C}}{\overline{Z_A + Z_B + Z_C}} \quad \bar{Z}_2 = \frac{\overline{Z_A Z_C}}{\overline{Z_A + Z_B + Z_C}} \quad \bar{Z}_3 = \frac{\overline{Z_A Z_B}}{\overline{Z_A + Z_B + Z_C}}$$

Como caso particular, si una red trifásica equilibrada tiene una impedancia por rama  $\bar{Z}$  y tiene sus fases conectadas en estrella, la impedancia equivalente en triángulo será:

$$\bar{Z}_Y = \frac{\bar{Z}_\Delta}{3}$$

## 1.9. Potencia en sistemas trifásicos:

Si se recurre al teorema de Boucherot, la potencia activa total  $P$  consumida por una carga trifásica, será igual a la suma de las potencias activas consumidas por cada una de las fases de la carga:

$$P = \sum_{k=1}^3 V_k I_k \cos \varphi_k \quad [W]$$

Donde:

$V_k$ : valor eficaz de la tensión en la fase  $k$ .

$I_k$ : valor eficaz de la intensidad en la fase  $k$ .

De igual forma, la potencia reactiva total  $Q$  consumida por la carga será:

$$Q = \sum_{k=1}^3 V_k I_k \sin \varphi_k \quad [VAr]$$

## 1.9. Potencia en sistemas trifásicos:

La potencia aparente total vendrá expresada como el modulo de la potencia aparente compleja:

$$\bar{S} = P + jQ$$

$$S = \|\bar{S}\| = \sqrt{P^2 + Q^2} \text{ [VA]}$$

Si se presenta la ecuación de la potencia instantánea total:

$$P(t) = P_1(t) + P_2(t) + P_3(t)$$

$$P(t) = 2V_a I_a \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi) + 2V_b I_b \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi) + 2V_c I_c \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3}) \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3} - \varphi)$$

Como el sistema es simétrico y la carga equilibrada, los valores de pico de tensiones e intensidades son iguales para las tres fases:

$$P(t) = 2VI \left\{ \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi) + \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi) + \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3}) \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3} - \varphi) \right\}$$

## 1.9. Potencia en sistemas trifásicos:

Utilizando la relación trigonométrica que relaciona productos de cosenos con sumas:

$$P(t) = VI \left\{ \cos(2\omega t - \varphi) + \cos(\varphi) + \cos\left(2\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi\right) + \cos(\varphi) + \cos\left(2\omega t + \frac{4\pi}{3} - \varphi\right) + \cos(\varphi) \right\}$$

Dado que:

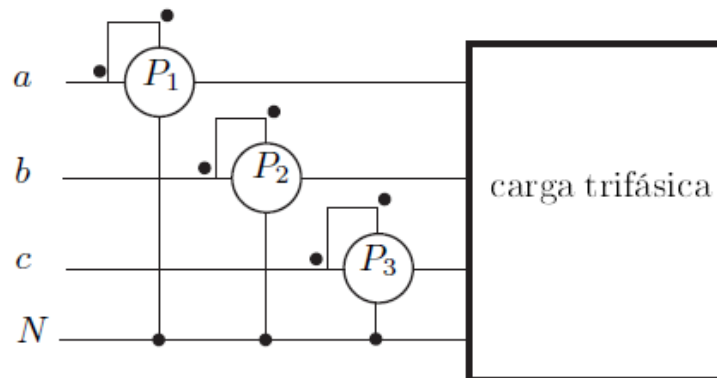
$$\cos(2\omega t - \varphi) + \cos\left(2\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi\right) + \cos\left(2\omega t + \frac{4\pi}{3} - \varphi\right) = 0$$

Se cumple:

$$P(t) = 3VI \cos(\varphi)$$

## 1.10. Medida de potencia en sistemas trifásicos:

En general, el nº de vatímetros necesarios es uno menos que hilos o conductores tiene el sistema (teorema de Blondel). Por ejemplo, si necesitamos medir la potencia en un sistema trifásico (equilibrado o no) de 4 hilos, necesitaríamos 3 vatímetros, uno por fase.



La potencia activa total consumida es la suma de las potencias activas de cada fase (para la reactiva funciona igual):

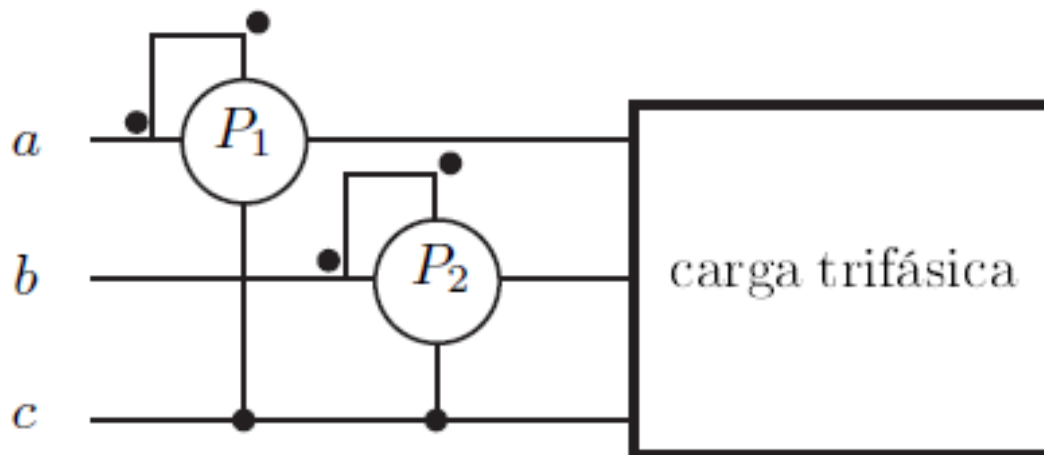
$$P = P_1 + P_2 + P_3$$

Como caso particular, si la alimentación es simétrica y la carga equilibrada, los vatímetros miden lo mismo, por lo que bastaría con uno.



## 1.10. Medida de potencia en sistemas trifásicos:

En el caso de sistemas trifásicos a tres hilos, las potencias activas y reactivas se miden mediante lo que se conoce como conexión Aron.



Según el Teorema de Blondel, la potencia activa total será la suma de las potencias activas leídas en los vatímetros:

$$P = P_1 + P_2$$

### 1.10. Medida de potencia en sistemas trifásicos:

En el caso de la medida de potencia reactiva, sólo hay que substituir los vatímetros de potencia activa por medidores de potencia reactiva. Sin embargo, si la carga trifásica está equilibrada, se puede caracterizar la potencia reactiva total a partir de las potencias  $P_1$  y  $P_2$ . En efecto:

$$P_1 = \mathbf{R}\{V_{ac} I_a^*\} = V_{ac} I_a \cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right)$$

Ya que si la tensión simple de la fase a es utilizada como referencia, la tensión ac estará retrasada  $30^\circ$  respecto al fasor de referencia. En el caso de  $P_2$ , la tensión bc esta retrasada  $90^\circ$  respecto al fasor de referencia mientras que la intensidad de línea b estará retrasada  $120^\circ + \varphi$  este mismo fasor:

$$P_1 = \mathbf{R}\{V_{bc} I_b^*\} = V_{bc} I_b \cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right)$$

### 1.10. Medida de potencia en sistemas trifásicos:

Si consideramos un sistema simétrico, todas las tensiones de línea tendrán el mismo valor eficaz  $V_L$ . Al mismo tiempo, si la carga está equilibrada, todas las intensidades de línea serán iguales y de valor  $I_L$ . Si realizamos la suma  $P_1 + P_2$ :

$$\begin{aligned}P_1 + P_2 &= V_L I_L \cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right) + V_L I_L \cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) = \\&= V_L I_L \left[\cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right)\right] = \\&= V_L I_L \left[2 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos(\varphi)\right] = V_L I_L 2 \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\varphi) = \\&= \sqrt{3} V_L I_L \cos(\varphi)\end{aligned}$$

### 1.10. Medida de potencia en sistemas trifásicos:

Así mismo, si realizamos la suma  $P_1 - P_2$ :

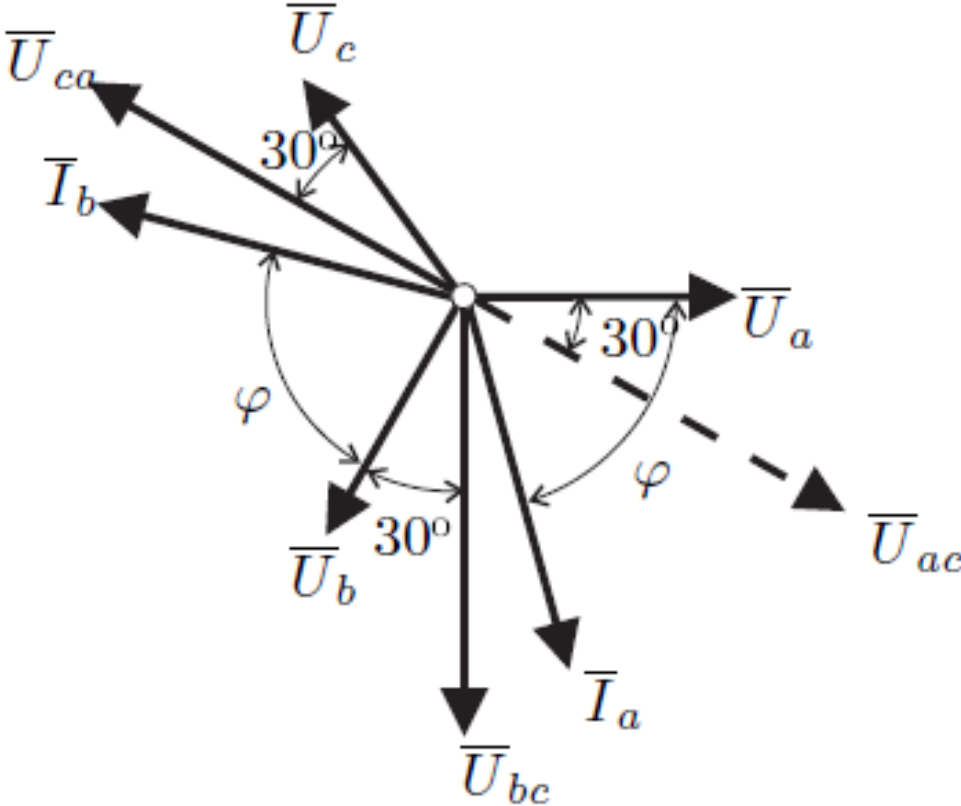
$$\begin{aligned}P_1 - P_2 &= V_L I_L \cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right) - V_L I_L \cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) = \\&= V_L I_L \left[2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin(\varphi)\right] \\&= V_L I_L \sin(\varphi)\end{aligned}$$

Por tanto, es posible calcular la potencia reactiva como la diferencia de potencias activas multiplicada por  $\sqrt{3}$ :

$$Q = \sqrt{3}(P_1 - P_2)$$

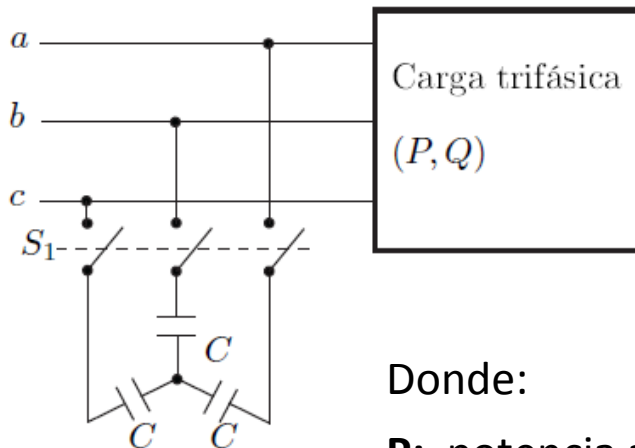
1.10. Medida de potencia en sistemas trifásicos:

Diagrama fasorial de la conexión con:



## 1.11. Corrección del factor potencia en circuitos trifásicos:

Si consideramos el circuito de la figura, formado por una carga trifásica con un FP inductivo, que es en la práctica la situación habitual, y una batería de condensadores para la compensación de reactiva con un interruptor tripolar S que permite la conexión-desconexión de la batería, el FP con los condensadores desconectados será:



$$FP = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

Donde:

**P:** potencia activa consumida por la carga.

**Q:** potencia reactiva inductiva consumida por la carga.

## 1.11. Corrección del factor potencia en circuitos trifásicos:

Si se cierra el interruptor S, la batería presenta un consumo de reactiva igual a tres veces la potencia reactiva consumida por uno de los condensadores. Dado que los condensadores están conectados en estrella:

$$Q_{1C} = -\frac{V_a^2}{\frac{1}{\omega C}} = -\omega C V_a^2 = -\omega C \frac{V_{AB}^2}{3}$$

Y por tanto, la potencia total queda:

$$Q_C = -\omega C V_{AB}^2$$

El nuevo FP' será:

$$FP' = \frac{P}{\sqrt{P^2 + (Q + Q_C)^2}} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + (Q - \omega C V_{AB}^2)^2}}$$

### 1.11. Corrección del factor potencia en circuitos trifásicos:

A partir de la expresión anterior es posible despejar el valor de C en función del FP' que pretenda obtenerse:

$$C = \frac{Q - P \sqrt{\frac{1}{FP'^2} - 1}}{\omega V_{AB}^2}$$

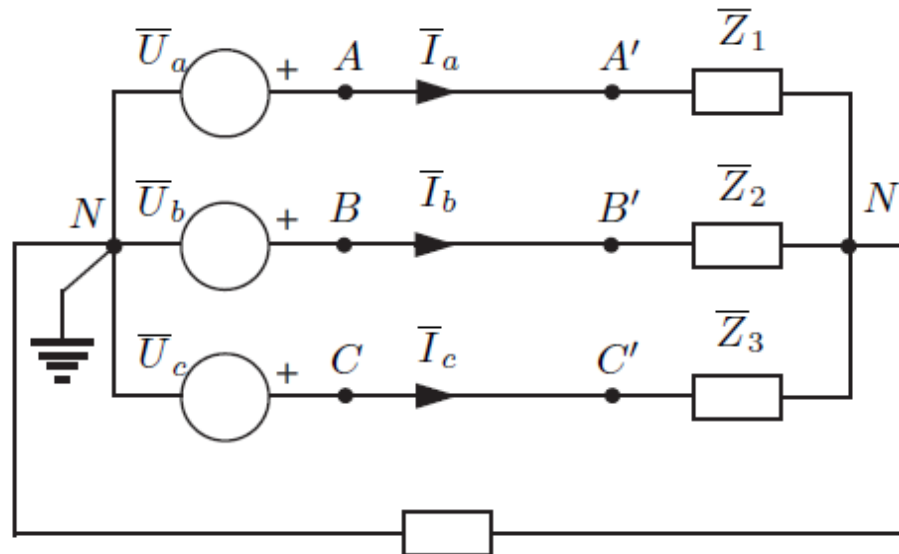
Dado que los condensadores forman una estrella equilibrada, es posible tener su equivalente triángulo:

$$\bar{Z}_{CY} = \frac{\bar{Z}_{C\Delta}}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\omega C_Y} = \frac{1}{\omega C_{\Delta}} \quad \Rightarrow \quad C_{\Delta} = \frac{C_Y}{3}$$



## 1.12. Análisis de circuitos trifásicos desequilibrados:

Se caracterizan porque se produce un desplazamiento del neutro  $N'$  en las cargas conectadas en estrella. Para no perder generalidad, es posible transformar una carga desequilibrada con conexión en triángulo en estrella antes de proceder:



Como puede observarse, se ha considerado para el análisis que el conductor del neutro presenta una impedancia  $\bar{Z}_N$ . La impedancia de los conductores de fase puede ser asociada a las cargas de cada una de dichas fases.

## 1.12. Análisis de circuitos trifásicos desequilibrados:

Las intensidades de fase se obtienen a partir de las siguientes expresiones:

$$\bar{I}_a = \frac{\bar{V}_{AN} - \bar{V}_{N'N}}{\bar{Z}_1} \quad \bar{I}_b = \frac{\bar{V}_{BN} - \bar{V}_{N'N}}{\bar{Z}_2} \quad \bar{I}_c = \frac{\bar{V}_{CN} - \bar{V}_{N'N}}{\bar{Z}_3}$$

Mientras que la de neutro queda como:

$$\bar{I}_N = \frac{\bar{V}_{N'N}}{\bar{Z}_N}$$

Aplicando la ley de Kirchoff, que dice que la suma de las intensidades en un nudo es nula:

$$I_a + I_b + I_c = I_N$$

$$\frac{\bar{V}_{AN} - \bar{V}_{N'N}}{\bar{Z}_1} + \frac{\bar{V}_{BN} - \bar{V}_{N'N}}{\bar{Z}_2} + \frac{\bar{V}_{CN} - \bar{V}_{N'N}}{\bar{Z}_3} = \frac{\bar{V}_{N'N}}{\bar{Z}_N}$$

## 1.12. Análisis de circuitos trifásicos desequilibrados:

Y despejando la tensión  $\bar{V}_{N'N}$ :

$$\frac{\bar{V}_{AN}}{\bar{Z}_1} + \frac{\bar{V}_{BN}}{\bar{Z}_2} + \frac{\bar{V}_{CN}}{\bar{Z}_3} = \bar{V}_{N'N} \left( \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3} + \frac{1}{\bar{Z}_N} \right)$$

Una vez conocida la tensión de desplazamiento del neutro N', es posible calcular las diferentes tensiones de fase en la carga.

$$\bar{V}_{N'N} = \frac{\frac{\bar{V}_{AN}}{\bar{Z}_1} + \frac{\bar{V}_{BN}}{\bar{Z}_2} + \frac{\bar{V}_{CN}}{\bar{Z}_3}}{\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3} + \frac{1}{\bar{Z}_N}} = \frac{\bar{V}_{AN}\bar{Y}_1 + \bar{V}_{BN}\bar{Y}_2 + \bar{V}_{CN}\bar{Y}_3}{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3 + \bar{Y}_N}$$