

# Energía y Telecomunicaciones

## Tema 3.1. Máquinas eléctricas



**Alberto Arroyo Gutiérrez**  
**Mario Mañana Canteli**  
**Raquel Martínez Torre**  
**Jesús Mirapeix Serrano**  
**Cándido Capellán Villacián**

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Energética

Este tema se publica bajo Licencia:

[Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

---

---

## Índice general

---

---

### NOMENCLATURA Y SIMBOLOGÍA.

vii

### CAPÍTULO 3. MÁQUINAS ELÉCTRICAS

1

3.1. Introducción . . . . .	1
3.2. Circuitos magnéticos . . . . .	3
3.3. Transformador . . . . .	5
3.4. Complementos de mecánica aplicados a las máquinas eléctricas rotativas . . . . .	11
3.5. Máquina de corriente continua . . . . .	16
3.6. Máquinas asíncrona . . . . .	21
3.7. Motor paso a paso . . . . .	27
3.8. Ejercicios . . . . .	36

---



---

## NOMENCLATURA Y SIMBOLOGÍA

---



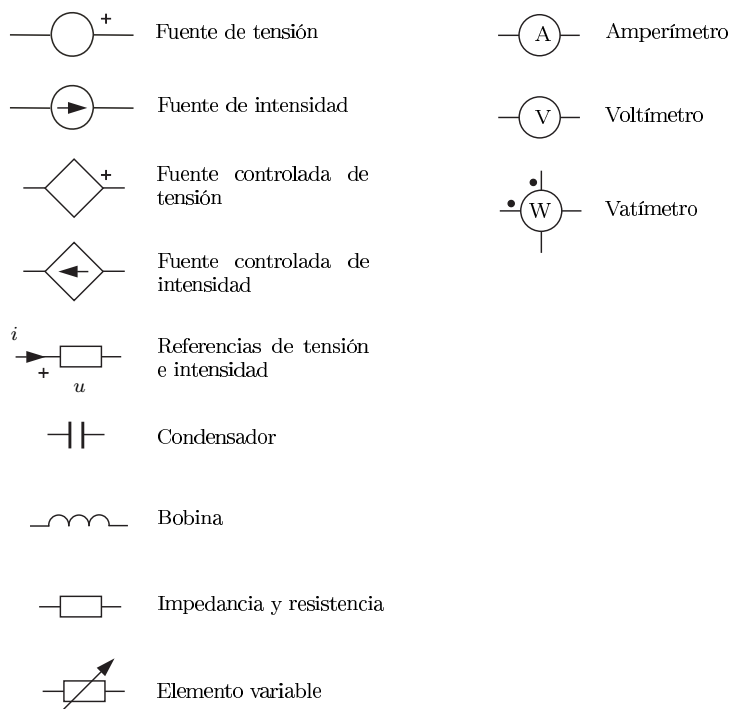
---

### Normas generales

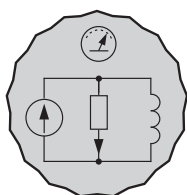
Letra mayúscula: Valor eficaz del parámetro.

Letra minúscula: Valor instantáneo del parámetro.

SIMBOLO	MAGNITUD	UNIDAD
$a$	Operador trifásico	$a = 1_{\angle 120^\circ}$
$B$	Susceptancia	Siemens (S)
$C$	Capacidad	Faradio (F)
$f$	Frecuencia	Hertzio (Hz)
$G$	Conductancia	Siemens (S)
$i$	Intensidad instantánea	Amperio (A)
$I$	Intensidad eficaz	Amperio (A)
$\bar{I}$	Intensidad compleja	Amperio (A)
$j$	Unidad imaginaria	$j = 1_{\angle 90^\circ}$
$L$	Inductancia propia / autoinducción	Henrio (H)
$M$	Inductancia mutua	Henrio (H)
$P$	Potencia activa	Vatio (W)
$Q$	Potencia reactiva	Voltamperio reactivo (var)
$R$	Resistencia	Ohmio ( $\Omega$ )
$S$	Potencia aparente	Voltamperio (VA)
$\bar{S}$	Potencia aparente compleja	Voltamperio (VA)
$u$	Tensión instantánea	Voltio (V)
$U$	Tensión eficaz	Voltio (V)
$\bar{U}$	Tensión compleja	Voltio (V)
$W$	Energía	Julio (J)
$X$	Reactancia	Ohmio ( $\Omega$ )
$Y$	Admitancia	Siemens (S)
$Z$	Impedancia	Ohmio ( $\Omega$ )
$\bar{Z}$	Impedancia compleja	Ohmio ( $\Omega$ )
$\eta$	Rendimiento	Porcentaje (%)
$\rho$	Resistividad	Ohmio metro ( $\Omega m$ )
$\sigma$	Conductividad	Siemens por metro ( $S/m$ )
$\varphi$	Desfase entre $\bar{U}$ e $\bar{I}$	Grado sexagesimal ( $^\circ$ )
$\omega$	Pulsación	Radian por segundo (rd/s)







## MÁQUINAS ELÉCTRICAS

CAPÍTULO

# 3

Si la teoría de circuitos puede considerarse como la ortografía y la gramática de la electrotecnia, las máquinas eléctricas pueden entenderse como la literatura. No es posible comprender el funcionamiento de las máquinas eléctricas sin conocer la teoría de circuitos, ni tampoco puede entenderse la sociedad tecnológica en la que vivimos sin la existencia de las máquinas eléctricas. Incluso para el Ingeniero Electrónico o de Telecomunicación resultan esenciales. Los ordenadores poseen, entre sus elementos vitales, transformadores (fuente de alimentación) y motores (ventiladores, motores de las disqueteras, lectores de CD, sistemas de cinta de backup, sistemas de posicionamiento de los discos duros, etc.). También es posible encontrar a las máquinas eléctricas en los sistemas de radar móviles y en otras aplicaciones puras de la electrónica y las telecomunicaciones. Desde el punto de vista cotidiano, la importancia de las máquinas eléctricas no necesita justificación: prácticamente el 100 % de la energía eléctrica que se consume en la industria es generada mediante una máquina eléctrica y desde el punto de vista de su utilización, los motores pueden encontrarse en miles de aplicaciones que van desde la tracción eléctrica en trenes de alta velocidad hasta las batidoras o los secadores de pelo.

### 3.1. Introducción

El diccionario de la RAE define a la máquina eléctrica como un “Artificio destinado a producir electricidad o aprovecharla en usos industriales”. Otros diccionarios la definen como un “aparato capaz de transformar reversiblemente la energía eléctrica en mecánica (llamada máquina dinámica, como un motor eléctrico o un generador) o en una forma distinta de energía eléctrica (llamada máquina estática, como un transformador)”. Desde nuestro punto de vista, las máquinas pueden ser vistas como dispositivos o sistemas capaces de realizar transformaciones energéticas entre una entrada y una salida, siendo una de las formas de energía de tipo eléctrico, y la restante de tipo eléctrico o mecánico. En la figura 3.1 se muestra la estructura básica de una máquina eléctrica.



**Figura 3.1.** Concepto básico de máquina eléctrica.

Desde el punto de vista funcional, las máquinas eléctricas pueden clasificarse en tres grandes grupos, en función de la naturaleza de la transformación, tal y como muestra la tabla 3.1.

**Cuadro 3.1.** Clasificación de los diferentes tipos de máquinas.

Energía de entrada	Energía de salida	Tipo de máquina
Eléctrica	Eléctrica	Transformador
Eléctrica	Mecánica	Motor
Mecánica	Eléctrica	Generador

Una de las propiedades más interesantes de las máquinas eléctricas es su reversibilidad. Desde el punto de vista teórico, una máquina eléctrica dedicada a la transformación de energía eléctrica en mecánica no es ni generador ni motor. El que funcione como uno u otro tipo dependerá de qué tipo de energía se suministre como entrada. La reversibilidad se traduce, por tanto, en el carácter bidireccional del flujo de energía dentro de la máquina. En la práctica, el diseño real de las máquinas suele condicionar su utilización, aunque esto no supone ninguna contradicción a los principios teóricos expuestos. Desde el punto de vista mecánico, las máquinas eléctricas se clasifican en dos grandes grupos:

1. Estáticas. A este grupo pertenecen aquellas máquinas que no presentan partes móviles en su funcionamiento. Según la clasificación funcional de la figura 3.1, sólo los transformadores pertenecen a las máquinas estáticas.
2. Dinámicas. A este grupo pertenecen aquellas máquinas que presentan una parte móvil en su funcionamiento. Según la clasificación funcional de la figura 3.1, motores y generadores pertenecen a este grupo.

Además de los dos criterios de clasificación presentados, existe uno adicional basado en la naturaleza eléctrica de las tensiones e intensidades puestas en juego. Algunos autores presentan una clasificación de tipo eléctrico basada en el criterio mecánico de funcionamiento, mientras que otros utilizan un criterio funcional.

A pesar de que este tema está dedicado por completo a las máquinas eléctricas, sólo es posible realizar un análisis superficial de las mismas, en el que se debe optar por sacrificar aspectos como su desarrollo y evolución histórica, que por otra parte resultan necesarios para comprenderlas como conjunto. Si el lector está interesado puede consultar las referencias bibliográficas que incluyen reseñas históricas, tanto de las máquinas como de sus constructores. Desde el punto de vista pedagógico resulta una discusión interesante establecer el orden en el que deben introducirse las máquinas al alumno. En nuestro caso se ha decidido empezar por el transformador, a pesar de que éste puede verse como una particularización de la máquina asíncrona funcionando con el rotor bloqueado. Frente a esta desventaja teórica, el transformador presenta algunas ventajas, que son especialmente significativas en el caso de los estudiantes de Ingeniería Electrónica y de Telecomunicación:

1. El estudio del transformador en primer lugar evita tener que añadir a la complejidad de las transformaciones del modelo las ecuaciones mecánicas que dan lugar a la ecuación de equilibrio mecánico. Aplazar la introducción de la mecánica en las ecuaciones eléctricas del modelo reduce el nivel inicial de abstracción.
2. El estudio del transformador puede comenzar por el caso monofásico, en el que el alumno conoce de las asignaturas de Análisis de Circuitos y Electricidad y Magnetismo. Una vez introducido el transformador monofásico es más natural generalizar al caso trifásico.

Una vez presentado el transformador, se aborda el estudio de las máquinas rotativas, comenzando por la máquina de cc. Se ha elegido ésta también por razones pedagógicas. El estudio de la máquina de cc en régimen permanente puede realizarse utilizando únicamente magnitudes reales, a diferencia de las máquinas asíncrona y síncrona, en las que es necesario utilizar

números complejos. Por otra parte, los modelos ideales de la máquina de cc con excitación independiente permiten separar claramente el control de flujo del control de par, aspecto que facilita enormemente el control de la misma. Posteriormente se introducen las máquinas asíncrona y síncrona.

## 3.2. Circuitos magnéticos

El estudio de las máquinas eléctricas se basa, desde el punto de vista del modelo circuital, en la teoría de circuitos más clásica, con un énfasis especial en el análisis de circuitos magnéticos. Aunque el lector conoce sobradamente el análisis de circuitos magnéticos, se repasan aquí algunos conceptos básicos relacionados con el análisis de los transformadores.

### 3.2.1. Circuitos magnéticos alimentados mediante corriente alterna

De la misma forma que los circuitos eléctricos se representan mediante una resistencia equivalente que depende de la geometría del conductor y el tipo de material en el que están contruidos, los circuitos magnéticos se representan mediante una reluctancia equivalente definida por,

$$R_e = \frac{l}{\mu S} \quad (3.1)$$

donde,

$l$  longitud del elemento conductor de flujo magnético.

$S$  sección del elemento conductor de flujo magnético.

$\mu$  permeabilidad.

En la figura 3.2 se muestra un circuito alimentado mediante una fuente de corriente alterna. Según la Ley de Faraday, la relación entre la tensión de alimentación y el flujo viene definida por la expresión,

$$u(t) = -N \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (3.2)$$

De esta forma, si la tensión de alimentación es sinusoidal

$$u(t) = \sqrt{2}U \sin(\omega_0 t) \quad (3.3)$$

el flujo vendrá definido por la expresión,

$$\phi(t) = \sqrt{2}\Phi \cos(\omega_0 t) \quad (3.4)$$

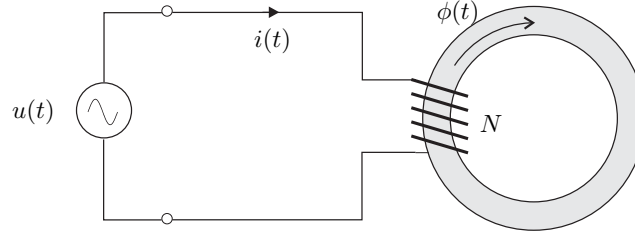
Expresando la relación en valores eficaces,

$$\Phi = \frac{U}{N\omega_0} \quad (3.5)$$

Se observa, por tanto, que una vez definido el valor eficaz de la tensión de alimentación, el número de espiras y la frecuencia de dicha tensión, queda definido el valor eficaz del flujo. Una vez conocido el valor del flujo y la reluctancia del circuito magnético, es posible obtener la fuerza magnetomotriz  $\mathcal{F}$ ,

$$\mathcal{F} = \Phi R_e \quad (3.6)$$

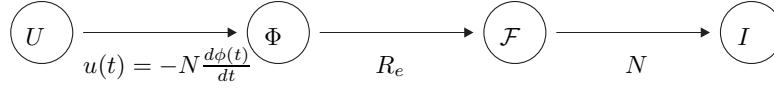
y dado que la fuerza magnetomotriz se relaciona con la intensidad mediante el número de espiras,



**Figura 3.2.** Circuitos magnéticos alimentados por corriente alterna.

$$I = \frac{\mathcal{F}}{N} \quad (3.7)$$

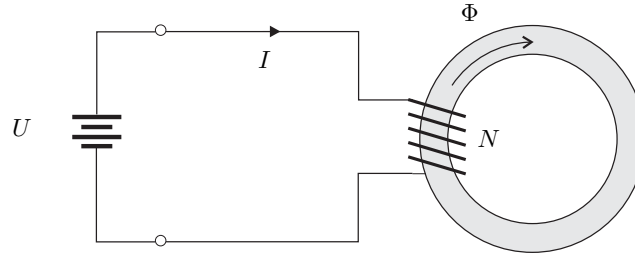
Las ecuaciones 3.2 a 3.7 muestran la relación entre la tensión de alimentación y la intensidad consumida por el circuito. El proceso se resume en la figura 3.3



**Figura 3.3.** Relación entre tensión e intensidad en un circuito magnético alimentado por corriente alterna.

### 3.2.2. Circuitos magnéticos alimentados mediante corriente continua

Los circuitos magnéticos alimentados por corriente continua exhiben un comportamiento distinto al caso en que se alimentan mediante corriente alterna. En la figura 3.4 se muestra un circuito magnético alimentado por corriente continua.



**Figura 3.4.** Circuitos magnéticos alimentados por corriente continua.

En este tipo de circuitos, la relación entre tensión e intensidad está definida únicamente por la resistencia del devanado, que depende de la longitud del conductor del devanado, la resistividad y la sección del mismo,

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (3.8)$$

A partir de la resistencia, la intensidad se obtiene como,

$$I = \frac{U}{R} \quad (3.9)$$

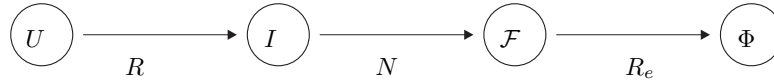
A partir de la intensidad  $I$  y del número de espiras  $N$ , es posible obtener la fuerza magnetomotriz  $\mathcal{F}$ ,

$$\mathcal{F} = NI \quad (3.10)$$

Por último, se obtiene el flujo en el circuito magnético a partir de la fuerza magnetomotriz  $\mathcal{F}$  y la reluctancia del circuito.

$$\Phi = \frac{\mathcal{F}}{R_e} \quad (3.11)$$

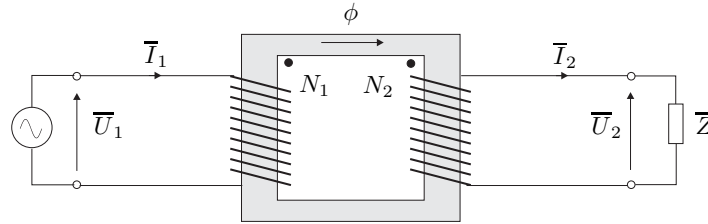
En la figura 3.5 se muestra la relación entre las magnitudes involucradas.



**Figura 3.5.** Relación entre tensión e intensidad en un circuito magnético alimentado por corriente continua.

### 3.3. Transformador

El transformador es una de las máquinas más útiles y mejor diseñadas que se hayan construido nunca. A pesar de que se trata de una máquina que transforma energía eléctrica en energía eléctrica, sus posibilidades de aplicación son innumerables. Puede ser utilizada para elevar o reducir tensiones e intensidades, para aislar galvánicamente circuitos eléctricos o para transformar impedancias. Si se considera al transformador como una máquina ideal, su esquema básico se muestra en la figura 3.6.



**Figura 3.6.** Estructura básica de un transformador.

El objetivo básico de esta máquina consiste en transformar magnitudes eléctricas mediante la utilización de circuitos acoplados magnéticamente. Como el lector conoce del estudio de los circuitos magnéticos, el flujo magnético sigue siempre el camino de menor reluctancia, de forma que puede ser canalizado entre dos devanados si éstos se arrojan sobre una estructura cerrada de hierro o algún otro material de elevada permeabilidad relativa.

Tal como se ha visto en los apartados anteriores, si al devanado  $N_1$  se le aplica una tensión alterna sinusoidal  $u_1(t)$ , ésta da lugar a un flujo magnético  $\phi(t)$  que circula por el núcleo del transformador. Este flujo atraviesa el devanado  $N_2$ , generando, según la Ley de Faraday, una tensión  $u_2(t)$  que alimenta la carga. Dado que la suma de fuerzas magnetomotrices en un circuito magnético debe ser nula,

$$N_1 I_1 = N_2 I_2 \quad (3.12)$$

Por otra parte, de la ecuación 3.5

$$\Phi = \frac{U_1}{N_1 \omega_0} = \frac{U_2}{N_2 \omega_0} \quad (3.13)$$

Se verifica, por tanto que,

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2} \quad (3.14)$$

La impedancia  $\overline{Z}$  puede expresarse como cociente entre tensión e intensidad,

$$\overline{Z} = \frac{\overline{U}_2}{\overline{I}_2} \quad (3.15)$$

Esa misma impedancia, vista desde el primario se expresa como  $\overline{Z}'$ ,

$$\overline{Z}' = \frac{\overline{U}_1}{\overline{I}_1} = \frac{\frac{N_1}{N_2} \overline{U}_2}{\frac{N_2}{N_1} \overline{I}_2} = \frac{N_1^2}{N_2^2} \overline{Z} \quad (3.16)$$

Si se define la relación de espiras  $r_e$  como el cociente entre el número de espiras de primario y secundario,

$$\overline{Z}' = r_e^2 \overline{Z} \quad (3.17)$$

De la expresión anterior se deduce que el transformador permite realizar la adaptación de impedancias. Esta utilidad es utilizada ampliamente en circuitos de audio y de comunicaciones. Desde el punto de vista de su utilización en instalaciones y circuitos eléctricos, es posible clasificar los transformadores en función del número de fases transformadas simultáneamente. Según este criterio, es normal encontrar en la literatura eléctrica una división de los transformadores en monofásicos y trifásicos. Se introducen, a continuación, los transformadores monofásicos, ya que a partir de su estudio es posible generalizar el funcionamiento de transformadores con un número distinto de fases. En la figura 3.7 se muestran fotografías de transformadores utilizados como adaptadores de impedancias, como aislamiento galvánico o para la medida de tensiones e intensidades.

### 3.3.1. Transformador monofásico

Un transformador monofásico responde al esquema de la figura 3.6. Desde el punto de vista constructivo, en la figura 3.7 se muestran varias fotografías de transformadores comerciales. A pesar de que la utilización mayoritaria de esta máquina es como transformador de energía, se utiliza ampliamente en otro tipo de aplicaciones, especialmente en ingeniería de telecomunicación.



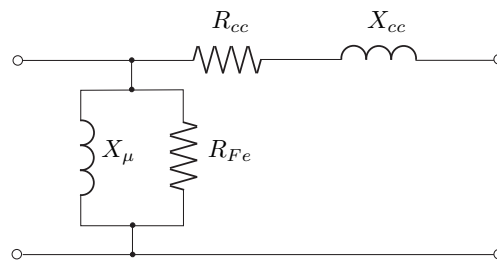
**Figura 3.7.** Aspecto físico de diferentes tipos de transformadores. (1) De potencia encapsulado en resina; (2) De potencia toroidal; (3) De potencia encapsulado para montaje en PCB; (4) De potencia para funcionamiento en exteriores; (5) y (6) De adaptación de impedancias; (7) De medida de intensidad con agujero pasante; (8) De potencia para montaje sobre bastidor; (9) De potencia para instalación en subestaciones.

### Circuito equivalente del transformador

Desde el punto de vista eléctrico, un transformador puede ser representado mediante un circuito eléctrico equivalente que puede ser utilizado para modelar su comportamiento. Como el lector conoce, la utilización de modelos eléctricos proporciona un gran número de ventajas, como:

- posibilitar un mejor conocimiento de la estructura interna de la máquina.
- permitir estudiar su comportamiento en diferentes condiciones de explotación sin necesidad de conectarla físicamente.

En la figura 3.8 se muestra el circuito eléctrico equivalente aproximado de un transformador monofásico. Dicho circuito representa un transformador real, en el que se considera la resistencia de los devanados, el flujo de dispersión y las pérdidas en el hierro. La determinación de los valores de dichos parámetros se realiza mediante los ensayos de vacío y cortocircuito, que se presentan a continuación.



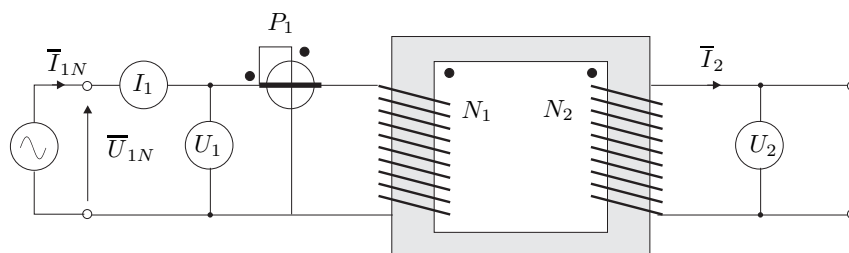
**Figura 3.8.** Circuito eléctrico equivalente aproximado del transformador referido al primario.

### Ensayo de vacío

El ensayo de vacío se realiza con dos objetivos principales:

1. Obtener la relación de transformación.
2. Determinar las pérdidas de vacío del transformador y la rama derivación del circuito equivalente.

La estructura básica del ensayo se muestra en la figura 3.9.



**Figura 3.9.** Configuración para la realización del ensayo de vacío.

El protocolo para realizar el ensayo de vacío es el siguiente:

1. Se aplica una tensión igual a la nominal de primario en el primario del transformador.
2. Se deja en circuito abierto el secundario del transformador.

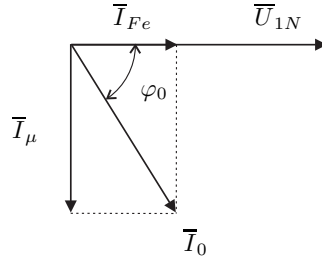
En estas condiciones, la relación de espiras ( $r_e$ ) es idéntica a la relación de tensiones ( $r_t$ ), e igual al cociente entre el número de espiras del devanado primario y secundario,

$$r_e = \frac{N_1}{N_2} = r_t = \frac{U_{1N}}{U_{2N}} \quad (3.18)$$

Al realizar el ensayo de vacío, el secundario del transformador está abierto, lo que supone que  $I_2 = 0$ . En esas condiciones, si la tensión aplicada en el primario es la nominal, la intensidad de primario  $\bar{I}_1 = \bar{I}_0$ , siendo  $\bar{I}_0$  la intensidad de vacío. Si se considera la tensión de primario como el fasor de referencia, la intensidad de vacío se encuentra retrasada un ángulo  $\varphi_0$ . La lectura del vatímetro  $P_1$  es,

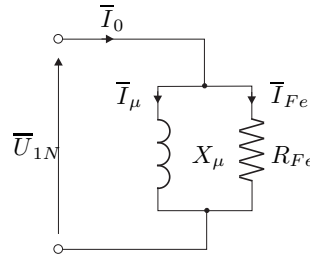
$$P_1 = U_{1N} I_0 \cos \varphi_0 \quad (3.19)$$

El diagrama fasorial de la figura 3.10 muestra la relación entre tensión e intensidad.



**Figura 3.10.** Diagrama fasorial del ensayo de vacío.

La intensidad  $I_{\mu}$  se denomina intensidad de magnetización, debido a que se dedica a magnetizar el circuito magnético del transformador. La intensidad  $I_{Fe}$ , por otra parte, representa la parte de la intensidad de vacío dedicada a representar las pérdidas en el circuito magnético. Desde un punto de vista eléctrico, la rama derivación de un transformador se representa mediante un circuito  $RL$  paralelo.



**Figura 3.11.** Circuito  $RL$  que representa la rama derivación del transformador.

Para obtener los valores del circuito  $RC$  equivalente, es necesario realizar el ensayo de vacío, midiendo los valores de tensión, intensidad y potencia puestas en juego. A partir de la potencia activa consumida y la tensión de alimentación es posible determinar  $R_{Fe}$ .

$$R_{Fe} = \frac{U_1^2}{P_1} \quad (3.20)$$

de la ecuación anterior puede deducirse que si se considera un circuito  $RC$ , lineal por naturaleza, el ensayo no tiene por qué realizarse a tensión nominal. Sin embargo, los transformadores reales presentan un comportamiento que no es totalmente lineal, por lo que resulta más adecuado realizar el ensayo a la tensión nominal. Una vez obtenida  $R_{Fe}$  resulta inmediato determinar  $I_{Fe}$ ,



$$I_{Fe} = \frac{U_1}{R_{Fe}} \quad (3.21)$$

Dado que  $I_{Fe}$  e  $I_\mu$  están en cuadratura,

$$I_\mu = \sqrt{I_0^2 - I_{Fe}^2} \quad (3.22)$$

y por lo tanto,

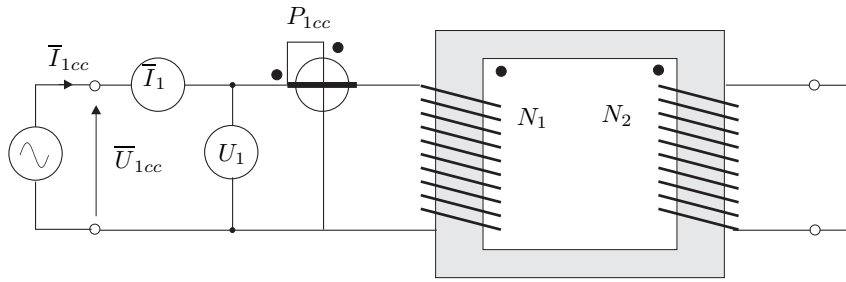
$$I_\mu = \frac{U_1}{X_\mu} \quad (3.23)$$

### Ensayo de cortocircuito

El ensayo de cortocircuito persigue dos objetivos principales:

1. Determinar las pérdidas en el cobre de la máquina en condiciones nominales.
2. Obtener la rama serie del circuito equivalente del transformador.

La estructura básica del ensayo de cortocircuito se muestra en la figura 3.12.



**Figura 3.12.** Configuración para la realización del ensayo de cortocircuito.

El protocolo para realizar este ensayo es el siguiente:

1. Se cortocircuita el secundario del transformador.
2. Se aplica una fuente de tensión variable en el primario y se incrementa la tensión hasta conseguir que por el primario circule la intensidad nominal del transformador.

Desde el punto de vista eléctrico, la rama serie del transformador puede modelarse como, En el modelo eléctrico de la figura 3.13, se ha referido el devanado secundario al primario del transformador, esto es,

$$R_{cc} = R_1 + R'_2 \quad (3.24)$$

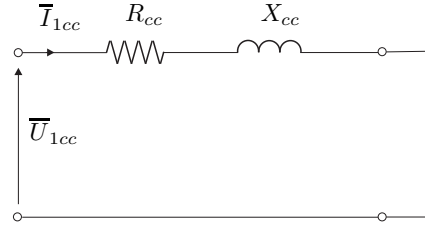
$$X_{cc} = X_1 + X'_2 \quad (3.25)$$

donde,

$$R'_2 = r_e^2 R_2 \quad (3.26)$$

$$X'_2 = r_e^2 X_2 \quad (3.27)$$

Del ensayo de cortocircuito, se sabe que al alimentar el primario mediante una tensión  $U_{1cc}$ , circula por el mismo una intensidad  $I_{1cc}$ , absorbiendo una potencia activa  $P_{1cc}$ . Se cumple entonces que,



**Figura 3.13.** Circuito eléctrico equivalente de la rama serie del transformador.

$$P_{1cc} = R_{1cc} I_{1cc}^2 \quad (3.28)$$

$$R_{1cc} = \frac{P_{1cc}}{I_{1cc}^2} \quad (3.29)$$

La potencia reactiva  $Q_{1cc}$  se obtiene como,

$$Q_{1cc} = \sqrt{(U_{1cc} I_{1cc})^2 - P_{1cc}^2} \quad (3.30)$$

A partir de la potencia reactiva y la intensidad es posible obtener el valor de la reactancia serie,

$$X_{1cc} = \frac{Q_{1cc}}{I_{1cc}^2} \quad (3.31)$$

Desde el punto de vista práctico, si el ensayo de cortocircuito se realiza en condiciones nominales,  $I_{1cc} = I_{1N}$  y por lo tanto, las pérdidas en los devanados coinciden con las nominales.

### 3.3.2. Transformador trifásico

Los transformadores polifásicos en general, y trifásico en particular, pueden ser analizados como una generalización del estudio de los transformadores monofásicos. Como resulta lógico, el estudio de los transformadores trifásicos resulta más complejo, puesto que el número de magnitudes involucradas se incrementa notablemente.

Dado que el objetivo de este apartado es introducir los aspectos más básicos de este tipo de máquinas, se limitará su estudio al caso de circuitos equilibrados y alimentación simétrica. Además, y al igual que se hacía con el transformador monofásico, se consideran circuitos magnéticos sin saturación.

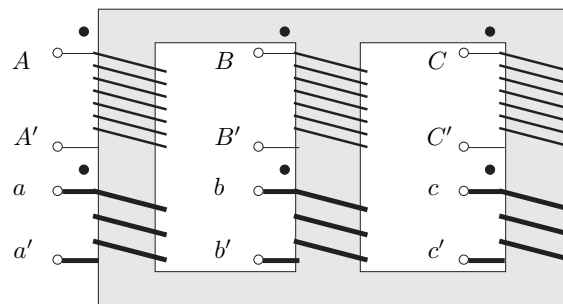
Desde un punto de vista práctico, los transformadores trifásicos pueden construirse a partir de tres transformadores monofásicos iguales. Esta aproximación permite disponer de circuitos magnéticos independientes. Esta arquitectura no suele utilizarse en la práctica, debido a su bajo rendimiento económico. Este hecho es provocado por la necesidad de utilizar un gran volumen de hierro, comparado con la alternativa de utilizar núcleos magnéticos trifásicos. En la figura 3.14 se muestra una fotografía de un núcleo magnético trifásico. En este caso, los devanados se arrollan sobre cada una de las tres columnas del núcleo. En la figura 3.15 se muestra un diagrama que muestra la estructura de los devanados respecto al núcleo del transformador.

Como el lector puede observar, existe una asimetría en la columna central de la estructura del circuito magnético, ya que el flujo debe recorrer un camino menor que en las columnas A y C. Sin embargo, a efectos prácticos este desequilibrio se manifiesta en la intensidad de vacío de dicha columna B, siendo el comportamiento en carga prácticamente simétrico.

Desde el punto de vista el análisis de este tipo de máquinas, se considera cada fase como un transformador monofásico, de forma que el análisis se simplifica enormemente. Se sugiere al lector pensar en la analogía que se produce con el estudio de los circuitos trifásicos equilibrados.



**Figura 3.14.** Núcleo magnético de un transformador trifásico.



**Figura 3.15.** Estructura de un transformador trifásico.

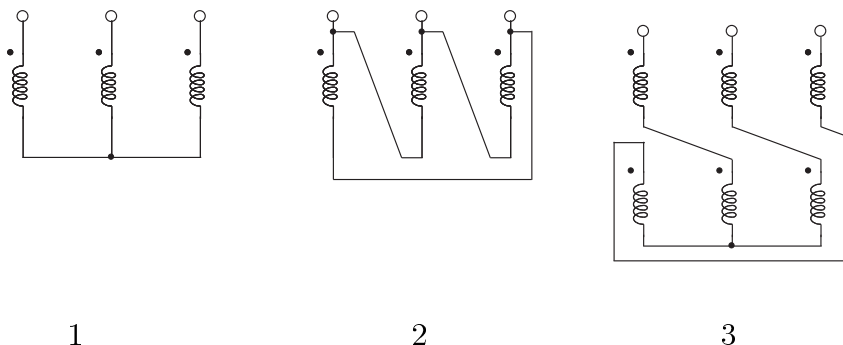
### Conexionado de los transformadores trifásicos

Uno de los aspectos más importantes de los transformadores trifásicos es su conexión de devanados. Piénsese en las distintas posibilidades que existen para conectar los tres devanados de primario y secundario. Las conexiones más típicas son: en estrella, con o sin hilo neutro y en triángulo. En algunas configuraciones, los devanados de primario y/o secundario se dividen en dos partes, aumentando el número de posibilidades. Así, es posible conectar los dos devanados de primario o secundario de una misma fase en serie o paralelo, o conectar en serie fases distintas, dando lugar a una conexión conocida como zig-zag. En la figura 3.16 se muestran algunos ejemplos de conexionado de fases en primario y secundario.

Los diferentes tipos de conexiones de los devanados permiten explotar diferentes propiedades. Así, es frecuente utilizar la conexión en estrella cuando deben conectarse sistemas de alta tensión. La conexión en triángulo es típica de los sistemas de BT ya que permite conectar cargas desequilibradas sin que se produzcan desplazamientos de las tensiones simples. Por último, la conexión en zig-zag resulta interesante si se quieren conectar cargas desequilibradas y es necesario disponer de neutro. En la bibliografía puede encontrarse gran cantidad de información comparativa entre los diferentes tipos de conexiones.

## 3.4. Complementos de mecánica aplicados a las máquinas eléctricas rotativas

Una de las dificultades añadidas que presenta el estudio de las máquinas rotativas reside en su movimiento. Como el lector comprobará en los próximos apartados, no es posible separar en este tipo de máquinas la parte mecánica de la eléctrica. Esta situación es especialmente difícil para los Ingenieros de Telecomunicación, cuya formación curricular en nuevas tecnologías electrónicas relega los conocimientos de mecánica a algunos temas de la asignatura de Fundamentos Físicos



**Figura 3.16.** Ejemplos típicos de conexión de devanados en un transformador trifásico. (1) Conexión en estrella; (2) conexión en triángulo; (3) conexión en zig-zag

de la Ingeniería cursada en su primer año de estudios. Se hace necesario, por tanto, realizar un breve repaso a algunos conceptos básicos de mecánica.

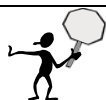
### 3.4.1. Velocidad angular

Se define la velocidad angular de un eje, como el número de revoluciones por unidad de tiempo a las que se encuentra girando. Supóngase que dicho eje necesita un tiempo  $T$  [s] para completar una revolución. Se dice entonces que su velocidad angular  $\omega$  [rd/s] viene definida por,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (3.32)$$

Aún cuando la unidad del S.I para  $\omega$  es el rd/s, es muy frecuente expresarla también en revoluciones por minuto [rpm], que se representan mediante la letra  $n$ . La relación con  $\omega$  es,

$$n = \omega \frac{60}{2\pi} \quad (3.33)$$



Se recuerda al lector que aunque la utilización de las rpm es más común que el rd/s, debe tener en cuenta que es ésta última la unidad del S.I. El cálculo de magnitudes derivadas como potencias o pares en el eje se realizan expresando la velocidad en rd/s.

### 3.4.2. Relación entre la velocidad angular y la velocidad lineal

Supóngase, tal como se representa en la figura 3.17 que un eje de radio  $R$  se encuentra girando a una velocidad angular  $\omega$ . Si sobre dicho eje se anuda una cuerda de la que cuelga una masa, la velocidad lineal  $v$  a la que se desplaza es

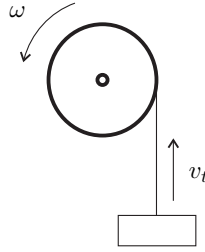
$$v = \omega R \quad (3.34)$$

### 3.4.3. Leyes fundamentales de la mecánica clásica

Estas leyes fueron enunciadas por Isaac Newton:

**Ley de la inercia** Todo cuerpo permanece en su estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme mientras no actúe sobre él ninguna fuerza.

**Ley fundamental de la dinámica** Todo cuerpo sometido a una fuerza sufre una variación de velocidad proporcional a la misma. Dicha variación tiene lugar en la dirección de dicha fuerza.

**Figura 3.17.** Relación entre velocidad angular y tangencial.

Para nosotros, la fuerza se notará mediante la letra  $F$  y su unidad del S.I es el newton [N].

$$F = ma \quad (3.35)$$

donde,

$F$  Fuerza, expresada en newtons [N]. Se trata de una magnitud vectorial.

$m$  masa, expresada en kilogramos [kg].

$a$  aceleración, expresada en  $m/s^2$  [ $ms^{-2}$ ] Se trata de una magnitud vectorial.

#### 3.4.4. Par mecánico

El par mecánico, como símil, es en el movimiento circular lo que la fuerza en un movimiento lineal. Si sobre un eje de rotación aplicamos una fuerza  $F$  a una distancia  $R$  del centro, el par resultante vendrá determinado por la expresión,

$$M = FR \quad (3.36)$$

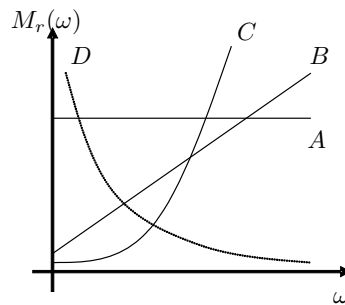
donde,

$M$  par mecánico, expresado en Newtons por metro [Nm]. Se trata de una magnitud vectorial.

$F$  Fuerza, expresada en Newtons [N]. Se trata de una magnitud vectorial.

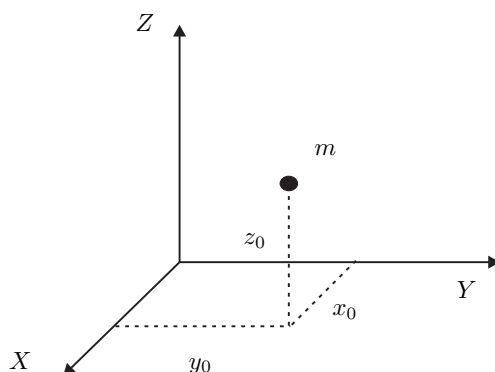
$R$  radio, expresado en metros [m].

El concepto de par mecánico es muy importante en el estudio de las máquinas eléctricas rotativas, ya que no es posible resolver los problemas de motores y generadores sin conocer los pares puestos en juego por la máquina, el motor primario y la carga. En la figura 3.18 se recogen algunos tipos de cargas con su par resistente asociado.

**Figura 3.18.** Diferentes tipos de par resistente en función de la velocidad

### 3.4.5. Momento de inercia

Básicamente, el momento de inercia de un objeto de masa  $m$  se obtiene a partir del producto de su masa por una distancia al cuadrado. Si la distancia de los componentes de la masa del objeto es a un punto se denomina momento de inercia polar. En el caso de que la distancia se establezca con referencia a un eje, se denomina momento de inercia axial. Por último, si la distancia se establece respecto a un plano, se denomina momento de inercia planario. En la figura 3.19 se observa una partícula de masa  $m$  situada en las coordenadas  $(x_0, y_0, z_0)$  de la que pretenden obtenerse sus momentos de inercia.



**Figura 3.19.** Representación de una partícula de masa  $m$  para obtener sus momentos de inercia.

**Cuadro 3.2.** Ecuaciones básicas para el cálculo de los momentos de inercia.

Momento de inercia	Ecuación
Momento de inercia polar respecto al punto (0,0,0)	$J_{xyz} = m(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)$
Momento de inercia axial respecto al eje x	$J_x = m(y_0^2 + z_0^2)$
Momento de inercia axial respecto al eje y	$J_y = m(x_0^2 + z_0^2)$
Momento de inercia axial respecto al eje z	$J_z = m(x_0^2 + y_0^2)$
Momento de inercia planar respecto al plano xy	$J_{xy} = mz_0^2$
Momento de inercia planar respecto al plano yz	$J_{yz} = mx_0^2$
Momento de inercia planar respecto al plano xz	$J_{xz} = my_0^2$

Desde el punto de vista de las máquinas rotativas, el momento utilizado será el axial, siendo el eje de referencia el eje de giro. Así, supóngase una partícula de masa  $m$  concentrada en un punto que está girando alrededor de un eje axial de referencia a una distancia  $R$  del mismo. El momento axial de inercia será  $J = mR^2$ .

### 3.4.6. Ecuación de equilibrio mecánico de las cargas

En un sistema mecánico rotativo se cumple siempre que el par motor es igual al par resistente.

$$M_{motor} = M_{carga} \quad (3.37)$$

Desde el punto de vista instantáneo, las diferencias entre el par motor y el par resistente de la carga se traducen en un par de aceleración o deceleración, o en una variación del momento polar de inercia según la segunda Ley de la mecánica.

$$\sum_i M_i = J \frac{d\omega}{dt} + \omega \frac{dJ}{dt} \quad (3.38)$$

En general, las cargas más comunes no suelen sufrir una variación de geometría que provoque una variación de su momento de inercia, por lo que la resultante del par se dedica a incrementar o reducir la velocidad del accionamiento.

### 3.4.7. Energía cinética de rotación

Un cuerpo de momento de inercia  $J$  que está girando con una velocidad angular  $\omega$ , almacena una energía cinética de rotación  $E_r$ ,

$$E_r = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad (3.39)$$

donde,

$E_r$  Energía cinética de rotación, expresada en Julios [J].

$J$  Momento de inercia, expresado en [kg . m<sup>2</sup>].

$\omega$  velocidad angular, expresada en [rd/s].

### 3.4.8. Relación entre la potencia mecánica y el par

Si un eje se encuentra girando a una velocidad angular  $\omega$  y está desarrollando un par mecánico  $M$ , se dice que la potencia mecánica  $P$  puesta en juego es,

$$P = M \omega \quad (3.40)$$

donde,

$P$  Potencia, expresada en [W].

$M$  Par mecánico, expresado en [Nm].

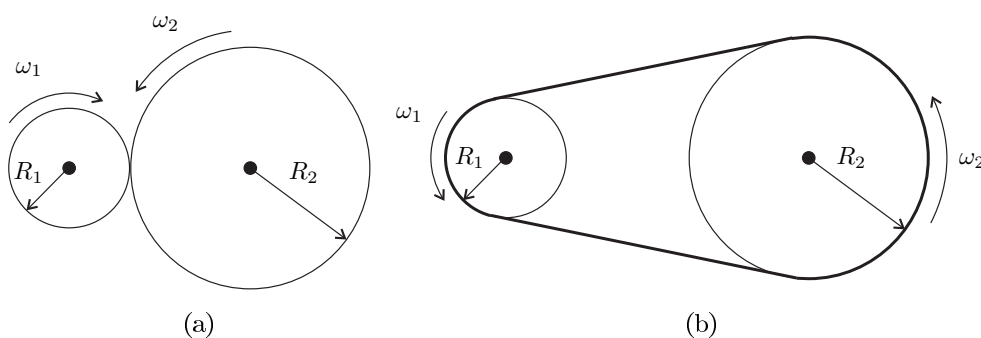
$\omega$  velocidad angular, expresada en [rd/s].

### 3.4.9. Engranajes

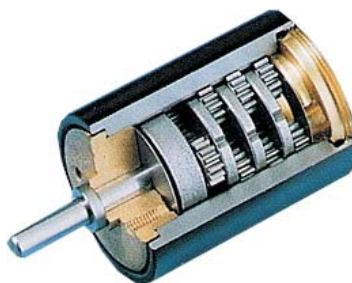
En muchas aplicaciones, el motor no se conecta directamente al eje de la carga, sino que lo hace mediante una relación de engranajes por contacto directo, o mediante algún tipo de polea o cadena de transmisión, tal como se muestra en la figura 3.20. La idea básica en un engranaje sin pérdidas consiste en considerar que toda la potencia de entrada se transmite a la salida. Supóngase un engranaje donde el disco de radio  $R_1$  está conectado al eje motor, mientras que el disco de radio  $R_2$  se encuentra conectado a la carga. Si sobre el disco de radio  $R_1$  se aplica un par de valor  $M_1$ , la potencia de entrada al mismo será  $P_1 = M_1 \omega_1$ . Dado que el engranaje no tiene pérdidas, la potencia de salida  $P_2$  será idéntica a la de entrada  $P_1$ , esto es,  $P_1 = M_1 \omega_1 = P_2 = M_2 \omega_2$ . Si no existe deslizamiento en el punto de contacto entre discos ni en la correa de distribución, las velocidades tangenciales en los dos discos serán las mismas,  $v_{t1} = v_{t2} = \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$ , y por tanto,

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_2} \quad (3.41)$$

En la figura 3.21 se muestran una caja reductora comercial.



**Figura 3.20.** (a) Transmisión por contacto entre discos; (b) Transmisión por correa de distribución.



**Figura 3.21.** Caja reductora utilizada con pequeños motores eléctricos.

### 3.5. Máquina de corriente continua

Las máquinas de corriente continua han sido, y continúan siendo, ampliamente utilizadas en la industria por sus buenas características de regulación. Si bien su funcionamiento como generador ha caído en desuso debido entre otras cosas a su peor relación potencia/volumen respecto a otras máquinas como la síncrona, y a su necesidad de mayor mantenimiento, su explotación como motor sigue siendo óptima en aplicaciones que exigen una regulación de velocidad muy precisa.



**Figura 3.22.** Aspecto de un motor de cc de pequeña potencia con un planetario incorporado y detalles del rotor y estator.

#### 3.5.1. Estructura de la máquina de corriente continua

La máquina de corriente continua, en su modelo más básico, puede representarse mediante un imán permanente, una espira, el colector de delgas y las escobillas, tal como se muestra en la figura 3.23 la Ley de Faraday establece que si dentro de un par de polos norte y sur magnéticos

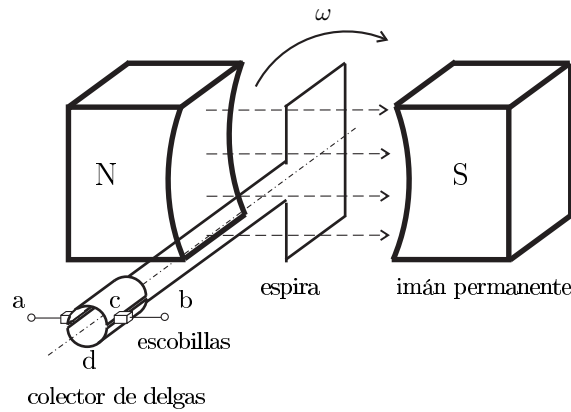


que crean una inducción magnética constante  $B$ , y por tanto un flujo magnético constante  $\Phi$ , se introduce una espira de sección  $S$  que gira a velocidad angular constante  $\omega$ , se induce una tensión entre los puntos c y d definida por la expresión,

$$u_{cd}(t) = -\frac{d(\Phi \cos(\omega t))}{dt} = \Phi \omega \sin(\omega t) \quad (3.42)$$

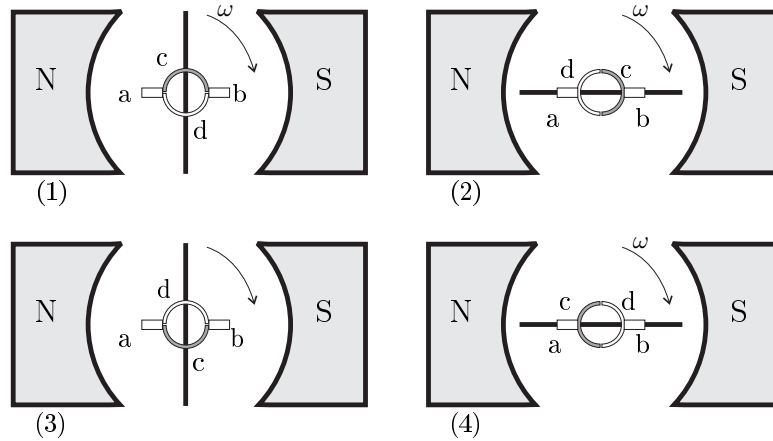
Se observa, por tanto, que si la velocidad angular de giro de la espira permanece constante, la tensión inducida será sinusoidal, de amplitud y velocidad constantes. Sin embargo, la tensión  $u_{cd}(t)$  es alterna, y debe ser rectificada mediante algún mecanismo estático o dinámico. Hasta el desarrollo de los rectificadores de estado sólido, la rectificación se realizaba mediante el colector de delgas. El objetivo del colector de delgas y las escobillas es conseguir que,

$$u_{ab}(t) = |u_{cd}(t)| \quad (3.43)$$



**Figura 3.23.** Estructura básica de funcionamiento de la máquina de cc.

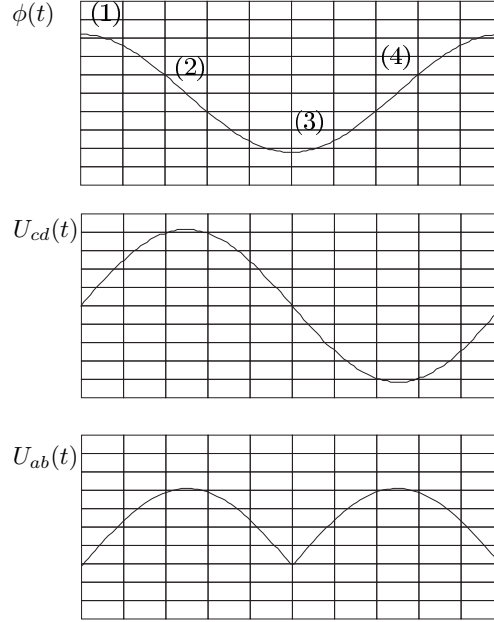
El funcionamiento del colector de delgas se describe en la figura 3.24.



**Figura 3.24.** Funcionamiento del colector de delgas en la máquina de cc.

En la figura 3.24 se resume el comportamiento del colector de delgas. Si se utiliza la figura 3.25 como referencia, se verifica que desde la posición de referencia hasta que se completa un giro de  $180^\circ$  en sentido horario, la tensión entre los puntos a y b coincide con la tensión entre

los puntos c y d. Sin embargo, desde la posición de  $180^\circ$  hasta completar el giro de  $360^\circ$ , se verifica que la tensión entre los puntos a y b es igual a la tensión entre los puntos c y d con signo negativo. En la figura 3.25 se muestra la evolución instantánea del flujo magnético, y las tensiones  $U_{cd}$  y  $U_{ab}$ .



**Figura 3.25.** Evolución instantánea del flujo de las tensiones ab y cd.

### 3.5.2. Modelo eléctrico de la máquina de corriente continua

Al analizar la estructura de la máquina de cc se ha visto que ésta tiene dos partes principales:

- Inductor
- Inducido

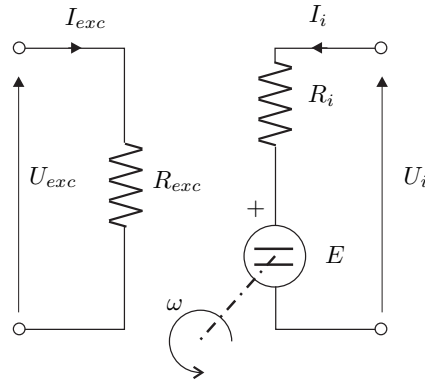
El circuito inductor, puede estar constituido por un electroimán o por un imán permanente. En el caso de que esté constituido por un electroimán, el modelo del mismo, tal como se analizó en el apartado anterior se representa por una resistencia  $R_{exc}$ , que modela la resistencia equivalente del devanado de excitación. El inducido se modela mediante una resistencia que representa la resistencia del devanado inducido y la resistencia de contacto de las escobillas con el colector de delgas. En un modelo sencillo esta resistencia se considera de forma conjunta y se representa mediante el símbolo  $R_i$ . Además de la resistencia de inducido  $R_i$  es necesario modelar la fuerza contraelectromotriz ( $f_{cem}$ ) como una fuente de tensión dependiente de la velocidad y la excitación. En la figura 3.26 se muestra el circuito equivalente de un motor de corriente continua con excitación independiente.

Las ecuaciones que modelan el circuito de la figura 3.26 son,

$$U_{exc} = R_{exc} I_{exc} \quad (3.44)$$

$$U_i = R_i I_i + E \quad (3.45)$$

donde



**Figura 3.26.** Circuito eléctrico equivalente de un motor de cc.

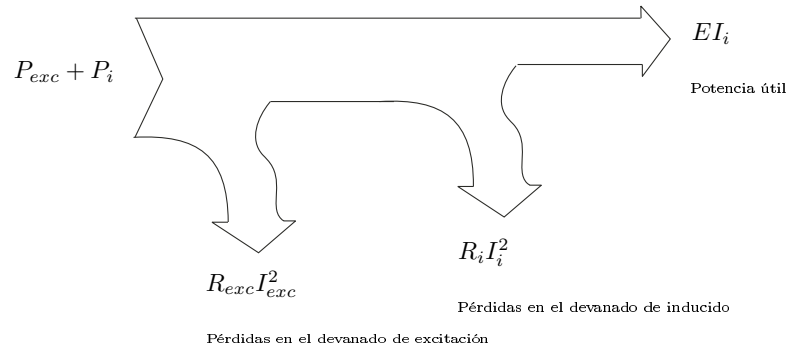
$$E = k_v I_{exc} \omega \quad (3.46)$$

La potencia demandada por el motor se obtiene como la suma de la potencias consumidas por los circuitos de excitación e inducido,

$$P_{exc} = U_{exc} I_{exc} = R_{exc} I_{exc}^2 \quad (3.47)$$

$$P_i = U_i I_i = (R_i I_i + E) I_i = R_i I_i^2 + E I_i \quad (3.48)$$

De los diferentes términos puestos en juego, solamente  $E I_i$  se dedica a realizar un trabajo útil. El resto de los términos representan pérdidas térmicas de tipo Joule. La figura 3.27 resume el flujo de potencias en la máquina.



**Figura 3.27.** Flujo de potencias dentro de la máquina de cc.

Si el término  $E I_i$  representa la potencia mecánica puesta en juego, el par mecánico  $M$  se calculará como,

$$M = \frac{E I_i}{\omega} \quad (3.49)$$

Dado que  $E = k_v I_{exc} \omega$ , entonces

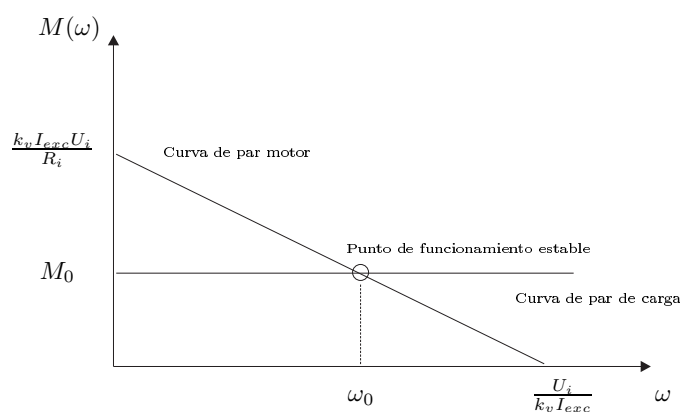
$$M = \frac{E I_i}{\omega} = \frac{k_v I_{exc} \omega I_i}{\omega} = k_v I_{exc} I_i \quad (3.50)$$

### 3.5.3. Introducción a la regulación de velocidad en la máquina de corriente continua

Como se ha comentado anteriormente, el motor de corriente continua presenta unas características idóneas para ser utilizado en aquellas aplicaciones donde se requiera una regulación fina de velocidad. Esto es debido básicamente a que la máquina de cc con excitación independiente tiene el control de la excitación desacoplado del control del par, lo que facilita su regulación. Se plantea, a continuación, una regulación de velocidad considerando que la carga arrastrada por el motor presenta un par resistente constante. En el apartado anterior se ha deducido que el par motor es

$$M = k_v I_{exc} I_i = k_v I_{exc} \left( \frac{U_i - k_v I_{exc} \omega}{R_i} \right) = \frac{k_v I_{exc} U_i}{R_i} - \frac{k_v^2 I_{exc}^2 \omega}{R_i} \quad (3.51)$$

Como se observa en la ecuación 3.52 si la tensión de alimentación de inducido y la excitación permanecen constantes, la relación entre el par  $M$  y la velocidad angular  $\omega$  está descrita por un polinomio de primer orden. En la figura 3.28 se representa la curva par-velocidad.

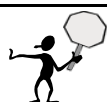


**Figura 3.28.** Curva par-velocidad del motor y carga.

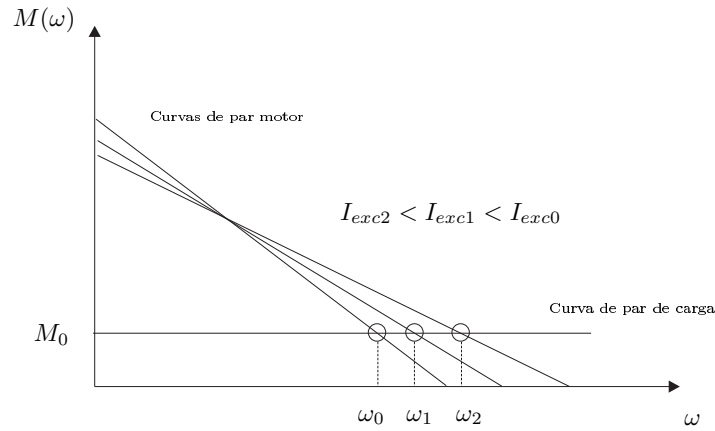
Como puede observarse en la figura 3.28, el corte de la curva de par motor con la curva de par de carga produce un punto de trabajo estable  $(M_0, \omega_0)$ , lo que significa que si el motor se excita con una intensidad  $I_{exc}$  y la tensión de inducido es igual a  $U_i$ , la velocidad del accionamiento será igual a  $\omega_0$ . Se analiza, a continuación, cómo afecta una variación de la excitación y de la tensión de inducido al punto de trabajo, o lo que es lo mismo, a la velocidad.

#### Regulación de velocidad por variación de la excitación

Si se supone que la máquina está trabajando en condiciones de alimentación nominales, la única posibilidad de regulación es reducir la intensidad de excitación, ya que si se aumenta por encima de la nominal, se corre el riesgo de dañar el devanado de excitación. Si la intensidad de excitación se reduce por debajo de la nominal, se produce una modificación del punto de trabajo estable, tal como se muestra en la figura 3.29. El efecto que provoca una reducción de la intensidad de excitación es el aumento de la velocidad.



La regulación de velocidad por variación de la intensidad de excitación permite aumentar la velocidad por encima de la nominal, reduciendo la intensidad por debajo de su valor nominal. Sin embargo, la pérdida de excitación produce una aceleración descontrolada del motor que puede originar su destrucción.

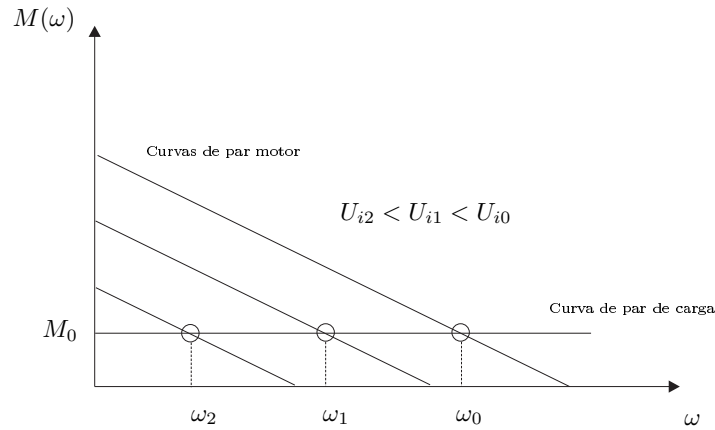


**Figura 3.29.** Curva par-velocidad del motor y carga con diferentes valores de excitación.

### Regulación de velocidad por variación de la tensión de inducido

La regulación de velocidad por variación de la tensión de inducido permite regular la velocidad por debajo de la nominal, disminuyendo la tensión de inducido. Como se observa en la ecuación 3.52 la tensión de inducido no afecta a la pendiente de la recta, sólo al valor de la ordenada en el origen,

$$M = c_1 U_1 - c_2 \omega \quad (3.52)$$



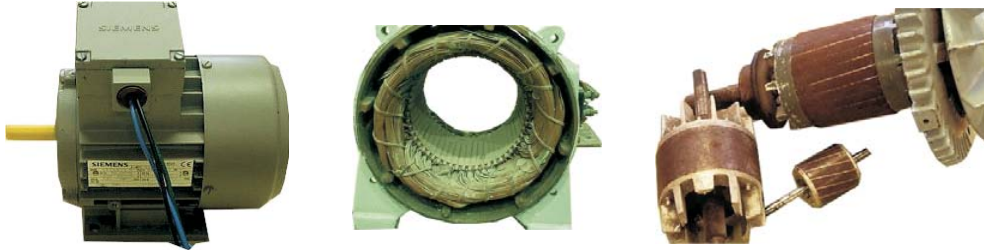
**Figura 3.30.** Curva par-velocidad del motor y carga con diferentes valores de tensión de inducido.

En la figura 3.30 se muestra la curva par-velocidad para diferentes valores de la tensión de inducido.

## 3.6. Máquinas asíncrona

La máquina asíncrona es, por su masiva utilización en la industria, el motor más ampliamente empleado. A pesar de que por el principio de reversibilidad de las máquinas eléctricas puede ser utilizada como generador o motor, suele emplearse únicamente como motor, por lo que se

analiza aquí como motor. En la figura 3.31 se muestra el aspecto de un motor asíncrono, así como los detalles de un estator y varios rotores con estructura en jaula de ardilla.



**Figura 3.31.** Fotografías de una máquina asíncrona y detalle del estator y varios rotores en jaula de ardilla.

El principio de funcionamiento de la máquina asíncrona es el Teorema de Ferraris, que establece que si se construyen tres devanados distribuidos de forma equiespaciada en el estator de la máquina y se alimentan con un sistema trifásico de tensiones, se genera en el interior de la misma un campo magnético giratorio de amplitud constante y velocidad constante, lo que equivale a decir que es como si un imán permanente estuviese girando a velocidad constante. En la figura se muestra un modelo que representa el Teorema de Ferraris. Si dentro del estator se construye un rotor formado por un material de permeabilidad no despreciable frente a la del aire, por ejemplo hierro o un acero magnético, éste comenzará a girar para intentar seguir a dicho campo magnético giratorio.

La máquina asíncrona se caracteriza por el número de pares de polos  $p$  que forman su estator. Dado  $p$ , es posible calcular la velocidad de sincronismo  $n_1$ , que es la velocidad a la que gira el campo magnético giratorio como,

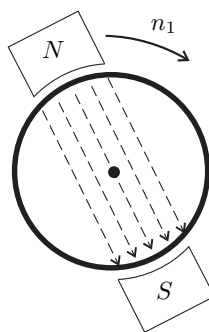
$$n_1 = \frac{60f}{p} \quad (3.53)$$

siendo,

$n_1$  velocidad angular en revoluciones por minuto [rpm].

$f$  frecuencia de la tensión de alimentación [Hz].

$p$  número de pares de polos de la máquina.



**Figura 3.32.** Representación del Teorema de Ferraris.

La máquina asíncrona recibe su nombre del hecho de que el rotor gira a una velocidad  $n$  inferior a la de sincronismo  $n_1$ . La diferencia entre la velocidad de sincronismo y la velocidad

real a la que gira el motor se caracteriza mediante un parámetro denominado deslizamiento ( $s$ ) que se calcula mediante la expresión siguiente,

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} \quad (3.54)$$

El valor del deslizamiento suele ser inferior al 8 % para motores pequeños, y al 3 % para motores grandes.

### 3.6.1. Modelo sencillo de la máquina asíncrona

La máquina asíncrona funcionando en régimen permanente puede modelarse como una carga trifásica equilibrada de tipo RL conectada en estrella o triángulo. En la figura 3.33 se muestran los circuitos equivalentes de ambos tipos de conexiones. En su concepto más sencillo los motores asíncronos pueden verse como una carga inductiva trifásica con un FP aproximado de 0,8. De esta forma si se sabe que los datos del motor son:

$P_{util}$  Potencia útil del motor en [W]. Si la potencia se expresa en CV, transformar a vatios sabiendo que  $1 \text{ CV} = 735 \text{ W}^1$ .

$\eta$  Rendimiento de la máquina en la transformación de energía eléctrica a mecánica.

$FP$  Factor de potencia que el motor supone para la red.

$U_N$  Tensión nominal compuesta del motor.

Si se proporcionan dos tensiones (ej.: 230/400) se interpreta de la forma siguiente: 230 -> Tensión nominal de línea del motor si éste se conecta en triángulo; 400 -> Tensión nominal de línea del motor si éste se conecta en estrella. En la práctica, los devanados se notan con las letras ( $u, v, w$ ) para representar uno de sus extremos y ( $x, y, z$ ) para representar los opuestos. En la figura 3.33 se muestran también las conexiones terminales en la caja de bornes para las conexiones estrella y triángulo.

#### Ejemplo 3.1

Obtener el circuito equivalente de un motor asíncrono alimentado a 400 V, sabiendo que está conectado en estrella y que tiene las siguientes características: Potencia nominal = 3 CV;  $\eta = 80 \%$ ;  $FP = 0,85$ .

*Solución:* La potencia total absorbida por el motor es,

$$P_{total} = \frac{P_{util}}{\eta} \quad (3.55)$$

La potencia aparente total consumida por el motor es,

$$S = \frac{P_{total}}{FP} = \sqrt{3}U_{1L}I_L \quad (3.56)$$

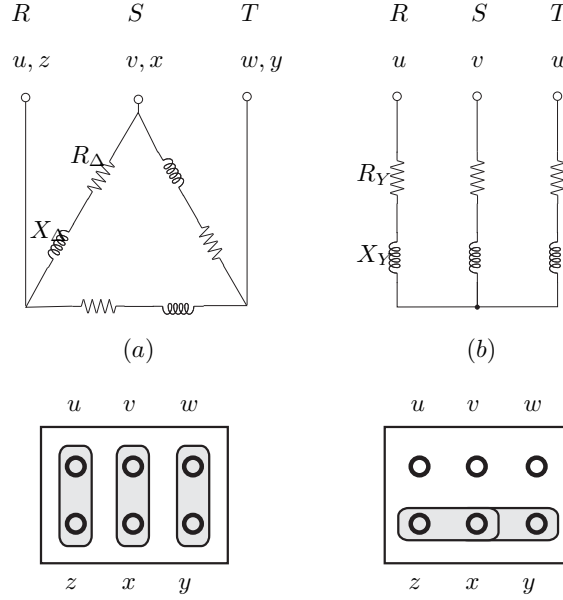
De la ecuación anterior se deduce que la intensidad de fase, que es igual a la de línea debido a que la carga está conectada en estrella,

$$I_L = \frac{S}{\sqrt{3}U_{1L}} \quad (3.57)$$

Considerando que la potencia total es disipada por las tres fases del motor,

<sup>1</sup>En EEUU se utilizan las letras "hp" para representar el caballo. Su equivalencia con el vatio es de 746 W

$$P_{total} = 3R_Y I_L^2 \quad (3.58)$$



**Figura 3.33.** (a) Conexión triángulo; (b) Conexión estrella.

y por lo tanto,

$$R_Y = \frac{P_{total}}{3I_L^2} \quad (3.59)$$

La impedancia de cada fase se obtiene como,

$$Z_L = \frac{U_{1f}}{I_L} = \frac{U_{1L}}{\sqrt{3}I_L} \quad (3.60)$$

La reactancia  $X_Y$  se obtiene de forma inmediata,

$$X_Y = \sqrt{Z_Y^2 - R_Y^2} \quad (3.61)$$

Los parámetros de intensidad e impedancia obtenidos, corresponden a una situación de régimen permanente en la máquina. Existen, sin embargo, otros regímenes de trabajo que resultan de interés práctico:

- **Vacío.** Cuando la máquina trabaja en vacío, la intensidad que demanda de la red suele estar entre el 30 y el 50 % de la nominal.
- **Arranque.** En el momento del arranque, la intensidad demandada por la máquina puede llegar a ser hasta 2 veces la nominal en el caso de máquinas grandes. Si la máquina es pequeña, la intensidad puede alcanzar hasta 6 veces el valor nominal.
- **Rotor bloqueado.** La condición de rotor bloqueado es similar a la situación de arranque, con la diferencia de que el rotor bloqueado se produce por una condición de avería o carga excesiva, que puede producir una avería en la máquina si no se soluciona.



### 3.6.2. Tensión y frecuencia inducidas en el rotor

Si se alimenta una máquina asíncrona con una frecuencia  $f_1$ , la frecuencia de las corrientes inducidas en el rotor será,

$$f_2 = sf_1 \quad (3.62)$$

Por otra parte, la relación entre la tensión inducida en el rotor para un determinado deslizamiento  $U_{2s}$  y la que se induce cuando el rotor se encuentra bloqueado  $U_{20}$  es,

$$U_{2s} \approx sU_{20} \quad (3.63)$$

### 3.6.3. Balance de potencia activa

Al igual que en el caso de la máquina de corriente continua, es posible realizar un balance de potencias para conocer como se transforma la potencia activa absorbida por el motor de inducción. En la figura 3.34 se muestra un esquema simplificado en el que se muestran las transformaciones energéticas dentro del motor.

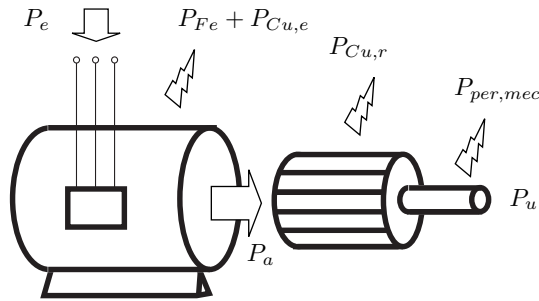
Si  $P_e$  es la potencia activa absorbida por la máquina, la potencia electromagnética  $P_a$  acoplada del estator al rotor será,

$$P_a = P_e - P_{Fe} - P_{Cu,e} \quad (3.64)$$

siendo,

$P_{Fe}$  Potencia de pérdidas en el hierro, debidas a la histéresis y a las componentes de corriente de Foucault.

$P_{Cu,e}$  Potencia de pérdidas térmicas en el cobre del estator.



**Figura 3.34.** Flujo de potencias en la máquina asíncrona.

De la potencia electromagnética que se transfiere del estator hacia el rotor, una parte se pierde en pérdidas debidas a la propia resistencia del mismo, en forma de pérdidas térmicas Joule. Por lo tanto, la potencia mecánica generada  $P_{mec}$  será,

$$P_{mec} = P_a - P_{Cu,r} \quad (3.65)$$

Se verifica que,

$$P_{Cu,r} = sP_a \quad (3.66)$$

siendo  $s$  el deslizamiento. Por lo tanto,

$$P_{mec} = P_a - sP_a = P_a(1 - s) \quad (3.67)$$

Si a la potencia mecánica se le quitan las pérdidas mecánicas debidas al rozamiento de los cojinetes y a la ventilación, tendremos la potencia útil en el eje de la máquina,

$$P_u = P_{mec} - P_{per,mec} \quad (3.68)$$

El rendimiento de la máquina puede expresarse entonces como,

$$\eta \approx \frac{P_u}{P_e} \quad (3.69)$$

Como curiosidad es posible comprobar que si las pérdidas en el estator y mecánicas son despreciables frente a la potencia puesta en juego y a las pérdidas en el rotor, el rendimiento puede aproximarse por,

$$\eta \approx \frac{P_a(1-s)}{P_a} = 1-s \quad (3.70)$$

El valor del rendimiento en un motor convencional de pequeña potencia, oscila entre el 70 y el 98 %. En el caso de que el motor trabaje en vacío, el rendimiento es nulo, lo que se verifica también cuando la máquina trabaja con el rotor bloqueado.

### 3.6.4. Par mecánico

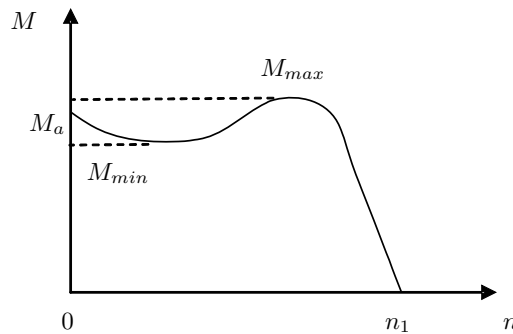
El par mecánico desarrollado puede ser calculado a partir de la potencia mecánica  $P_{mec}$  resultante en el eje del motor.

$$M_{mec} = \frac{P_{mec}}{\omega} = \frac{P_{mec}}{\frac{2\pi}{60}n} = 9,55 \frac{P_{mec}}{n} \quad (3.71)$$

siendo  $n$  la velocidad angular del rotor expresada en rpm. A partir de la expresión 3.71 se verifica también que,

$$M_{mec} = \frac{P_{mec}}{\omega} = \frac{P_a(1-s)}{\omega_1(1-s)} = \frac{P_a}{\omega_1} \quad (3.72)$$

En la expresión anterior se ha considerado que el par mecánico resistente debido al rozamiento de los cojinetes o a la ventilación de la máquina es despreciable o puede ser considerado dentro del par resistente de la carga. En la máquina asíncrona el par mecánico desarrollado es función de la velocidad angular a la que está girando la máquina. Considerando únicamente su funcionamiento como motor, la curva par-velocidad de una máquina asíncrona genérica tiene una forma como la de la figura 3.35.

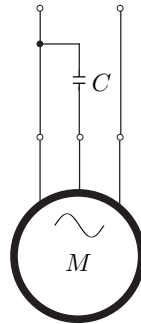


**Figura 3.35.** Curva par velocidad en la zona de funcionamiento como motor de una máquina asíncrona.

### 3.6.5. Utilización de un motor trifásico de corriente alterna en redes monofásicas

El motor asíncrono es típico de las instalaciones trifásicas, pero existen modificaciones que permiten utilizarlo en instalaciones monofásicas. Un ejemplo típico de adaptación de un motor trifásico a una instalación monofásica es la conexión Steimetz. En la figura 3.36 se muestra la estructura de conexionado para realizar la adaptación.

La idea básica de la conexión Steimetz es generar tres fases a partir de la alimentación monofásica, obteniendo la tercera fase a partir de un condensador conectado en serie con una de las fases. A pesar de que no se obtiene un sistema trifásico simétrico, resulta suficiente para alimentar al motor con una pérdida de par razonable.



**Figura 3.36.** Conexión Steimetz para conectar un motor asíncrono trifásico a una red monofásica.

## 3.7. Motor paso a paso

Los motores paso a paso son, por sus características constructivas y funcionales, unas máquinas singulares dentro del espectro de las máquinas eléctricas rotativas. Si bien las máquinas de cc y ca presentan una gran cantidad de diferencias constructivas y funcionales, puede establecerse como idea general que en su explotación pueden ser utilizadas indistintamente para conseguir el mismo propósito.

Las diferencias principales van a estar localizadas en el sistema de alimentación y regulación. En el caso del motor paso a paso, tanto su estructura física como sus características funcionales son distintas a las de los otros tipos de máquinas. El rasgo más importante de este tipo de máquinas es la posibilidad de controlar de forma sencilla y precisa la posición angular del rotor. De hecho, su rotación se realiza en ángulos discretos. En función de su estructura, el ángulo básico puede ir desde una fracción de grado hasta un cuarto de vuelta, aunque los valores típicos oscilan entre  $0,9^\circ$  y  $1,8^\circ$ . Los mismos motores pueden operar en un modo denominado micropasos consiguiendo una resolución tan fina como  $0,0072^\circ$ . La ventaja operativa de este tipo de motores frente a los motores convencionales reside en la facilidad con la que se implementa el control. Dado que el incremento de avance se consigue aplicando pulsos a los devanados del motor, es posible conseguir una velocidad de rotación constante si dichos pulsos se aplican con un periodo constante. La velocidad máxima que puede obtenerse con este tipo de accionamientos es de unas 6000 rpm. El abanico de aplicaciones en las que puede utilizarse es todas aquellas donde se necesite un control preciso de posición o desplazamiento: máquinas herramientas, plotters, impresoras, válvulas, etc. En la figura 3.37 se muestra el aspecto de los elementos que componen un motor paso a paso.

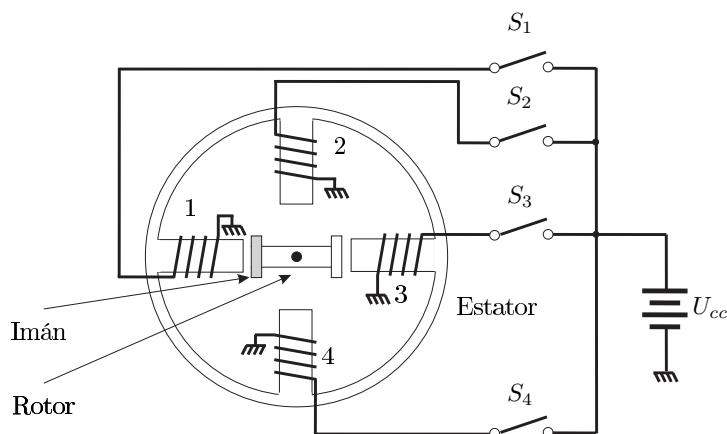
De la misma forma que el control de avance es relativamente sencillo de implementar, también lo es el establecimiento del sentido de rotación. Como se introducirá más adelante, el comportamiento de este tipo de motores está muy ligado a su fuente de alimentación.



**Figura 3.37.** Despiece de un motor paso a paso bipolar.

### 3.7.1. Principio de funcionamiento. Estructura unipolar y bipolar

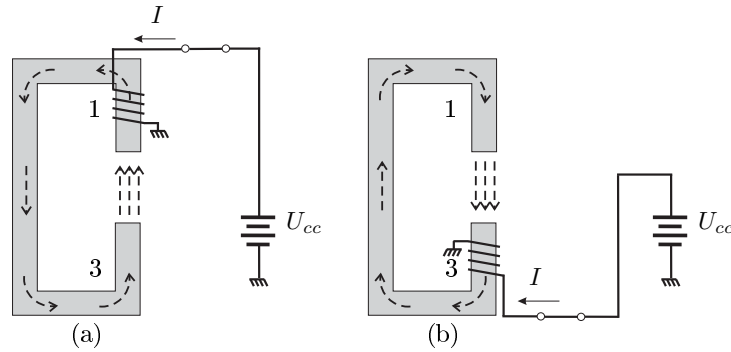
En la figura 3.38 se muestra la estructura básica de un motor paso a paso. Como puede observarse, el estator de esta máquina presenta mucha similitud con un motor de cc con polos salientes, con la diferencia de que la alimentación de cada polo se realiza por separado. En el caso de la figura 3.38, la máquina cuenta con cuatro polos. La arquitectura del rotor constituye otro elemento diferenciador de este tipo de máquinas. Aunque existen variantes, la forma constructiva más habitual consiste en utilizar una estructura con reluctancia variable en la dirección radial. Esta propiedad provoca que el rotor se posicione siempre para minimizarla. Para evitar que el rotor se enclave, éste se construye con un número de dientes distinto al del estator, de forma que éste rota al variar la alimentación de los polos. La estructura básica de un motor paso a paso es la que se muestra en la figura siguiente.



**Figura 3.38.** Estructura básica de un motor paso a paso de cuatro polos en el estator, un diente en el rotor y funcionamiento unipolar.

Antes de comenzar a explicar el funcionamiento de la máquina, y recordando los principios básicos de electromagnetismo, se resumen en la figura 3.39 las dos formas habituales de conseguir un polo norte y sur magnéticos. Como puede observarse, en la figuras 3.39a y 3.39b se obtienen polos norte y sur mediante la alimentación de las bobinas 1 ó 3, respectivamente. Los motores que utilizan esta forma de conexión y control se denominan unipolares. Este procedimiento resulta muy simple, ya que sólo es necesario disponer de una fuente de alimentación y dos interruptores. De forma complementaria, en las figuras 3.40a y 3.40b se obtienen también polos norte y sur mediante la alimentación simultánea de las bobinas 1 y 3, que se

encuentran conectadas en serie. En este caso, la obtención de los polo norte y sur se consigue invirtiendo la polaridad de la fuente. Los motores basados en este principio se denominan bipolares. Dicha inversión se consigue mediante cuatro interruptores. Como puede intuirse, el primer procedimiento resulta más sencillo de implementar, aunque presenta el inconveniente de utilizar únicamente uno de los dos polos en cada momento, por lo que se consigue un flujo de magnetización inferior.



**Figura 3.39.** Control de los polos en un motor unipolar.

Por el contrario, cuando se conectan en serie los polos opuestos se consigue un flujo de magnetización mayor, aunque el procedimiento de control se hace más complejo. En este último caso, la inversión del flujo de magnetización se consigue mediante cuatro interruptores.

### 3.7.2. Parámetros básicos

#### Ángulo de giro

El ángulo de giro ( $\alpha$ ) en grados en cada paso del motor es un parámetro que depende del número de dientes del rotor y del número de polos del devanado de excitación. Así, para un motor genérico, es posible obtener  $\alpha$  como,

$$\alpha = \frac{360^\circ}{N_f N_d} \quad (3.73)$$

donde

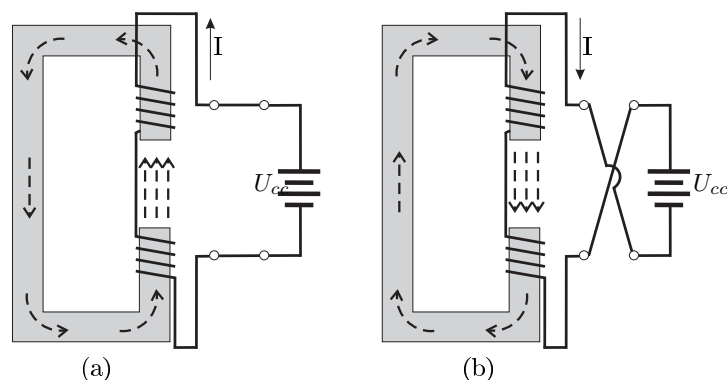
$N_f$  Número de fases del estator.

$N_d$  Número de dientes del rotor.

Así por ejemplo, el motor de la figura 3.38 posee un diente y cuatro fases, de forma que  $\alpha = 90^\circ$ . Del análisis de la expresión 3.73 se deduce que para conseguir un paso básico más pequeño es necesario aumentar el número de dientes y/o fases. Existen, sin embargo, otras formas más complejas de conseguir mayor resolución angular en el giro del motor. Una de ellas es el funcionamiento en el modo de micropasos.

#### Par de mantenimiento de un devanado

El par de mantenimiento de un devanado coincide con el valor máximo de par que es posible aplicar al eje del motor cuando se está alimentando un devanado. Si se aplica un par superior, el eje del motor girará libremente. Los *datasheets* suelen indicar este parámetro como minimum holding torque y sus valores típicos suelen oscilar entre los 300 y los 2300 Ncm.



**Figura 3.40.** Control de los polos en un motor bipolar.

### Par de mantenimiento de varios devanados

Cuando el motor funciona en el modo de paso mitad o micropasos, es frecuente que se alimenten varios devanados simultáneamente. El par de mantenimiento de varios devanados es el par máximo que puede ser aplicado sin que se produzca el giro del eje motor, cuando varios devanados están alimentados simultáneamente. Normalmente este par es superior al par de mantenimiento para un único devanado. Los *datasheets* suelen mostrar el par de mantenimiento que corresponde al modo de funcionamiento más habitual.

### Zona muerta

Dado el pequeño valor del par motor de este tipo de máquinas, resulta importante considerar la reducción de par provocada por la fricción, tanto estática como dinámica. Considerando únicamente el efecto de la fricción estática, que es independiente de la velocidad, se observa que aquellas zonas cuyo par motor en valor absoluto es inferior al par de fricción dan lugar a un par motor nulo, denominándose zonas muertas. Las consecuencias de este hecho son dobles: i) Se produce una reducción del par motor; ii) Se origina una zona muerta alrededor del punto de equilibrio. La reducción del par motor puede soslayarse sobredimensionando el motor, pero no la presencia de zonas muertas, que puede originar fallos en el posicionamiento de la máquina cuando funciona en el modo de micropasos.

### Par dinámico

Se entiende por par dinámico, el máximo par que el motor puede proporcionar cuando se encuentra girando a velocidad constante. Dicho par, aun cuando presenta un valor medio, oscila entre un valor máximo cuando se encuentra en los puntos de equilibrio y un valor mínimo cuando pasa por el punto medio entre dos puntos de equilibrio. Normalmente los *datasheets* definen dos pares dinámicos:

**Pull-out** Valor máximo del par de fricción que provoca deslizamientos en el giro del motor cuando éste gira a velocidades elevadas.

**Pull-in** Valor máximo del par de fricción que el motor puede vencer al acelerar desde la condición de reposo hasta la velocidad de sincronismo.

### Par de parada o residual

El par de parada o residual indica el par resistente que ofrece el motor sin alimentación. Este par es producido por el magnetismo remanente de los polos de excitación. Normalmente, el par de parada sigue una ley similar a la que define el par estático, si bien la amplitud máxima suele

ser del orden del 10 % del valor de mantenimiento. Este par puede tener una gran importancia en el frenado libre de motores que arrastran cargas de gran inercia. En los *datasheets* suele referenciarse con el nombre *cogging torque* o *detent torque*.

### Par estático

Los motores paso a paso, como máquinas eléctricas rotativas que son, se caracterizan por tener una relación par velocidad. Sin embargo, y dado que este tipo de máquinas pueden funcionar también en un modo estático, en el que el rotor se encuentra detenido, es necesario caracterizar el par estático. Básicamente, el par estático es aquel par que el motor es capaz de mantener en una situación de rotor fijo. Dado que el rotor tiende a fijarse en una posición de equilibrio en la que la reluctancia, y por tanto la energía, son mínimas, el par estático tiende a coincidir con el par de mantenimiento. En posiciones distintas a las de reposo, el par estático suele seguir en general una ley sinusoidal. En el caso de un motor de dos devanados, el par estático viene dada por la expresión siguiente,

$$M_{estatico}(\theta) = -M_h \sin\left(\frac{\theta\pi}{2\alpha}\right) \quad (3.74)$$

donde,

$M_h$  Valor máximo del par estático. Se le denomina también par de mantenimiento.

$\theta$  Posición angular del rotor respecto a la posición de equilibrio.

$\alpha$  Ángulo de paso.

### Resonancia

Cuando se incrementa la velocidad del motor, es posible que pierda el sincronismo, llegando incluso a detenerse. Este hecho es debido a que la estructura mecánica del motor vibra a ciertas frecuencias, absorbiendo la energía que está destinada a su movimiento de rotación. Normalmente, la resonancia aparece en la curva par-velocidad como un hueco, tal como muestra la figura 3.41. La resonancia puede evitarse haciendo que el control acelere y decelere cuando la velocidad se encuentre próxima a la de resonancia. Otra posibilidad consiste en pasar de un control de paso mitad a paso completo, ya que la resonancia también se desplaza con el modo de operación.

### Velocidad máxima

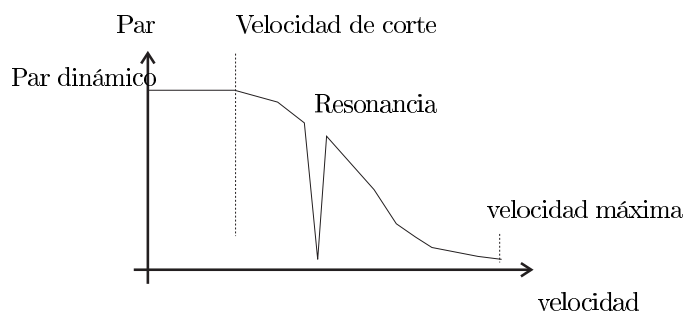
Se define la velocidad máxima como aquella a la que el par motor se hace cero. La determinación de la velocidad máxima no resulta sencillo cuando existen fenómenos de resonancia, ya que el par puede anularse prematuramente.

### Velocidad de corte

Se define la velocidad de corte como aquella velocidad a partir de la cual el par comienza a disminuir. Si se compara la curva par-velocidad con la respuesta en frecuencia de un filtro, la velocidad de corte coincidiría con la frecuencia de corte. En la figura 3.41 se muestran los parámetros descritos anteriormente. Debe resaltarse que los valores específicos de dichos parámetros varían también con el sistema de control utilizado, por lo que debe indicarse de forma explícita el tipo de control con el que se han obtenido las curvas.

### 3.7.3. Control de motores paso a paso

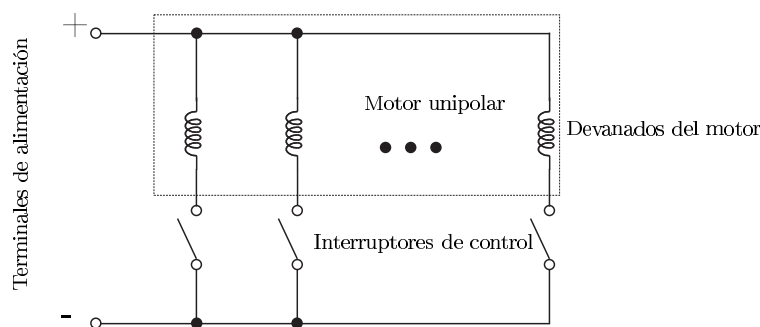
Uno de los aspectos singulares de los motores paso a paso reside en su dependencia de la electrónica de control. De hecho, resulta prácticamente imposible hacer funcionar un motor paso a paso sin la electrónica de control adecuada. En este apartado se analizan los circuitos básicos de control para los motores unipolares y bipolares.



**Figura 3.41.** Curva par-velocidad de un motor paso a paso mostrando una resonancia.

### Motores unipolares

En la figura 3.42 se muestra el circuito básico de control de un motor unipolar. Como se analizará más adelante, los circuitos comerciales son variaciones de la topología descrita.



**Figura 3.42.** Circuito básico de control de un motor unipolar.

Lógicamente, el circuito de la figura 3.42 debe estar acompañado de un circuito que genere las señales para controlar el estado de los interruptores de control. Normalmente este circuito se implementa utilizando un microcontrolador o un circuito dedicado. Debido a la naturaleza inductiva del devanado estatórico de la máquina, éste tiende a mantener constante la intensidad que circula por él, motivo por el que resulta bastante usual encontrar diodos rápidos colocados en antiparalelo con los devanados de la máquina. Estos diodos suelen recibir también el nombre de diodos de libre circulación. En algunos casos también se incluye un pequeño condensador en paralelo, especialmente si el diodo no es de tipo rápido. Dentro de las soluciones específicas para el control de este tipo de motores, Philips propone el circuito integrado SAA1027, que a pesar de estar descatalogado resulta de interés por su simplicidad de uso y por encontrarse integrado en muchos productos que se encuentran actualmente en el mercado. Además, se trata de un CI fácil de encontrar en stock en las tiendas de electrónica. En la figura 3.43 se muestra el diagrama de bloques y la tabla de secuencia de dicho integrado.

Los bloques marcados como HNIL/CML son etapas de entrada de alta inmunidad al ruido. El bloque CTR2 es un contador síncrono bidireccional de 2 bits (4 estados).

En la figura 3.44 se muestra un ejemplo sencillo de aplicación.

Por último, el bloque marcado como X/Y es un convertidor de código. Como puede observarse, el circuito necesita únicamente tres líneas de control:

**R** Señal de reset. Activa a nivel bajo. En aquellos casos en los que no se utilice, esta entrada debe conectarse a la tensión de alimentación.

**M** Sentido de giro.



C Señal de avance. El motor avanza un paso con cada pulso de la señal C.

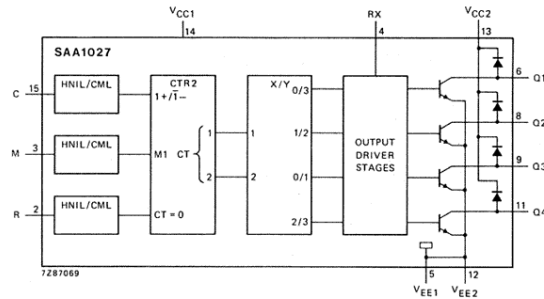


Figura 3.43. Diagrama de bloques interno del circuito integrado SAA1027.

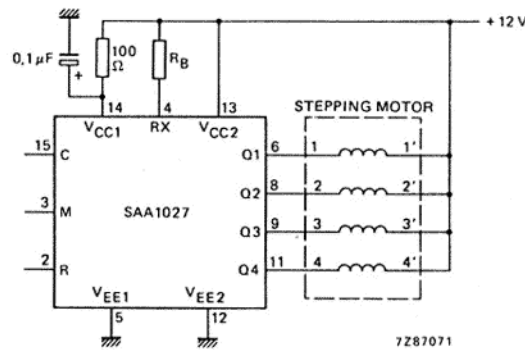


Figura 3.44. Ejemplo de aplicación del circuito integrado SAA1027 de Philips para el control de un motor paso a paso unipolar.

### Motores bipolares

En la figura 3.45 se muestra la estructura básica de un circuito de control para motores paso a paso bipolares. Desde el punto de vista comercial, los circuitos que pueden encontrarse en el mercado responden a variaciones del circuito propuesto.

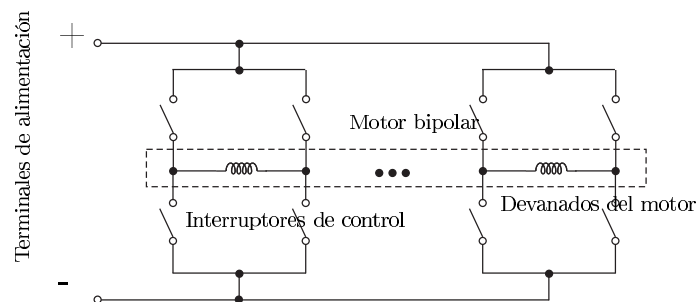


Figura 3.45. Circuito básico de control de un motor bipolar.

Al igual que en el caso de los motores unipolares, el control de motores bipolares exige el control secuencial de los interruptores. Como puede observarse en la figura, la estructura básica de control está formada por un puente en H para cada uno de los devanados de la máquina.

Dicho control puede realizarse mediante circuitos genéricos o dedicados. En las figuras 3.46 y 3.47 se muestra el diagrama de bloques de los circuitos integrados dedicados L297 y L298 de National Semiconductor. Aunque el circuito integrado L297 dispone de una gran cantidad de señales de entrada/salida, su utilización se simplifica enormemente cuando funciona en paralelo con el driver L298. De esta forma, y desde el punto de vista del usuario, sólo es necesario cuatro señales fundamentales:

**Half/Full step** Selecciona el tipo de avance del motor a paso completo o paso mitad.

**Reset** Señal de reset activa a nivel bajo.

**CW/CCW** Sentido de giro.

**Clock** Señal de giro del motor. El motor avanza un paso con cada pulso de la señal de reloj.

En la figura 3.47 pueden observarse los dos puentes en H con sus respectivas salidas (out1, out2) y (out3, out4) que pueden ser utilizadas para alimentar un motor bipolar de dos fases.

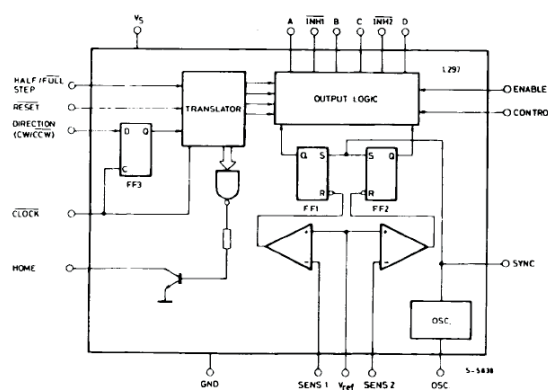


Figura 3.46. Diagrama de bloques del CI L297.

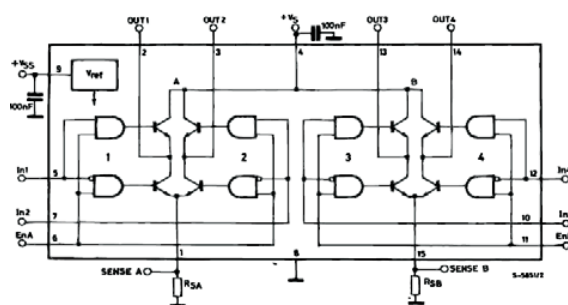


Figura 3.47. Diagrama de bloques del CI L298.

Por último, en la figura 3.48 se muestra un esquema eléctrico de aplicación del par L297-L298 para el accionamiento de motores paso a paso bipolares de dos fases.

### 3.7.4. Micropasos

El funcionamiento en el modo de micropasos consiste en actuar sobre el control del motor de forma que sea posible conseguir pasos de avance distintos a los básicos de  $1,8^\circ$  y  $0,9^\circ$  conseguidos mediante los modos de funcionamiento paso completo y paso mitad. Normalmente

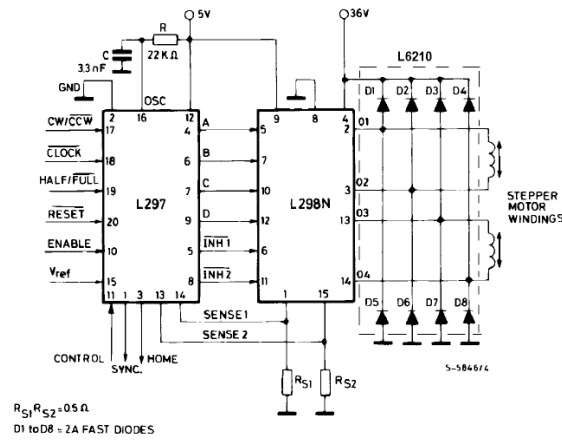


Figura 3.48. Ejemplo de aplicación del control de un motor paso a paso bipolar.

este modo de funcionamiento permite conseguir fracciones de los pasos nominales. Así, es posible conseguir incrementos angulares de  $1/5$ ,  $1/10$ ,  $1/16$ ,  $1/32$ ,  $1/125$  y  $1/250$  del paso completo. De esta forma, y a partir de un paso de  $1,8^\circ$  es posible obtener un paso mínimo de  $0,0072^\circ$ , lo que supone 50.000 pasos por vuelta. Desde el punto de vista práctico, la ventaja del funcionamiento en el modo de micropasos es la reducción en la amplitud de la resonancia que ocurre cuando el motor se opera a su frecuencia natural o a subarmónicos de dicha frecuencia. El procedimiento para conseguir este modo de funcionamiento consiste en alimentar cada fase con valores de intensidad distintos, de forma que la magnetización total obtenida como suma vectorial de las magnetizaciones de cada polo tendrá un ángulo variable, dando lugar por tanto, a un giro con mayor resolución del rotor.

### 3.8. Ejercicios

1. En el circuito magnético de la figura,  $u(t) = 10V$ . Se pide calcular el valor del flujo  $\phi(t)$  y de la intensidad  $i(t)$  en los casos siguientes: a) El núcleo está fabricado en madera ( $\mu_r = 1$ ); b) El núcleo está fabricado en hierro ( $\mu_r = 7000$ ). NOTA: La resistencia del devanado es de  $10\ \Omega$  y  $N=1000$ .
2. Repetir el ejercicio anterior si  $u(t) = 10\sqrt{2}\cos(2\pi 50t)$
3. Se quiere calcular el circuito equivalente aproximado referido al primario de un transformador monofásico 230/24 de 3 kVA de potencia aparente sabiendo que los datos de los ensayos de vacío y cortocircuito son los siguientes: Ensayo de vacío: Realizado en el primario. 230 V, 0,1 A, 18 W. Ensayo de cortocircuito: Realizado en el primario. 30 V,  $I_N$ , 200 W
4. Utilizando como base el ejercicio anterior, obtener la tensión en el secundario del transformador cuando el primario se alimenta con la tensión nominal y está funcionando a plena carga con un  $FP=0,8$  (i).
5. Se dispone de un motor de trifásico de inducción de 4 polos alimentado a 50 Hz. Si se sabe que la velocidad a plena carga es de 1450 rpm, determinar el valor del deslizamiento.
6. Un motor asíncrono trifásico de 4 polos y rotor en jaula de ardilla es alimentado con una fuente de 50 Hz. Calcular la frecuencia de las componentes de corriente inducidas en el rotor en los siguientes casos: a) Con el rotor bloqueado; b) Con el rotor girando a 400 rpm en el mismo sentido que el campo giratorio; c) Con el rotor girando a 2000 rpm en el mismo sentido que el campo giratorio; d) Con el rotor girando a 1000 rpm en sentido contrario al campo giratorio.
7. Un motor asíncrono trifásico tiene una velocidad de sincronismo de 1500 rpm cuando se le alimenta con una frecuencia de 50 Hz. De dicho motor se sabe que en condiciones nominales consume una potencia de 100 kW y presenta unas pérdidas en el hierro y el cobre del estator de 10 kW. Si en dichas condiciones el rotor gira a 1350 rpm, se pide: a) Potencia activa acoplada del estator al rotor; b) Pérdidas Joule en el cobre del rotor; c) Potencia mecánica desarrollada; d) Rendimiento del motor.
8. De un motor paso a paso bipolar se conocen los siguientes datos: Número de fases = 2 Número de dientes del rotor = 10. Se pide: (i) Dibujar la sección del motor; (ii) Obtener el ángulo de paso del motor y (iii) Si el motor se acciona mediante una serie de pulsos de frecuencia 100 Hz, obtener el tiempo necesario para hacer girar el eje una vuelta completa.
9. Del motor del ejercicio anterior se conoce su curva de par motor  
Se pide calcular la potencia que desarrolla cuando gira a una velocidad de 20 rev/s.