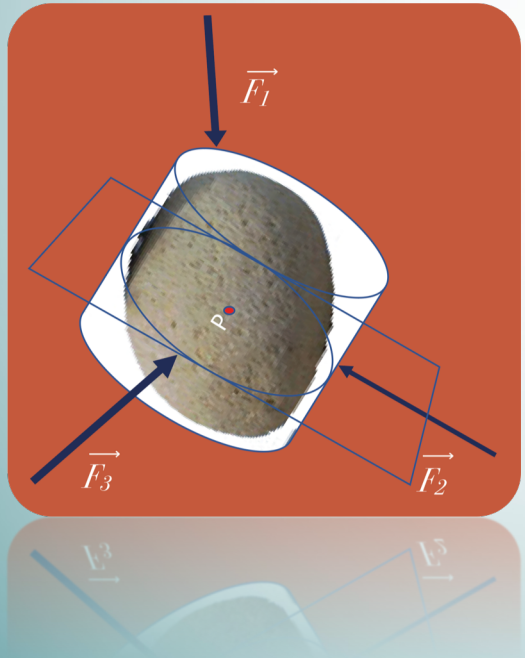
Caracterización geomecánica de suelos y rocas

Tema 2.3 Introducción a la Teoría de Esfuerzos



Alberto González Díez

Patricio Martínez Cedrún

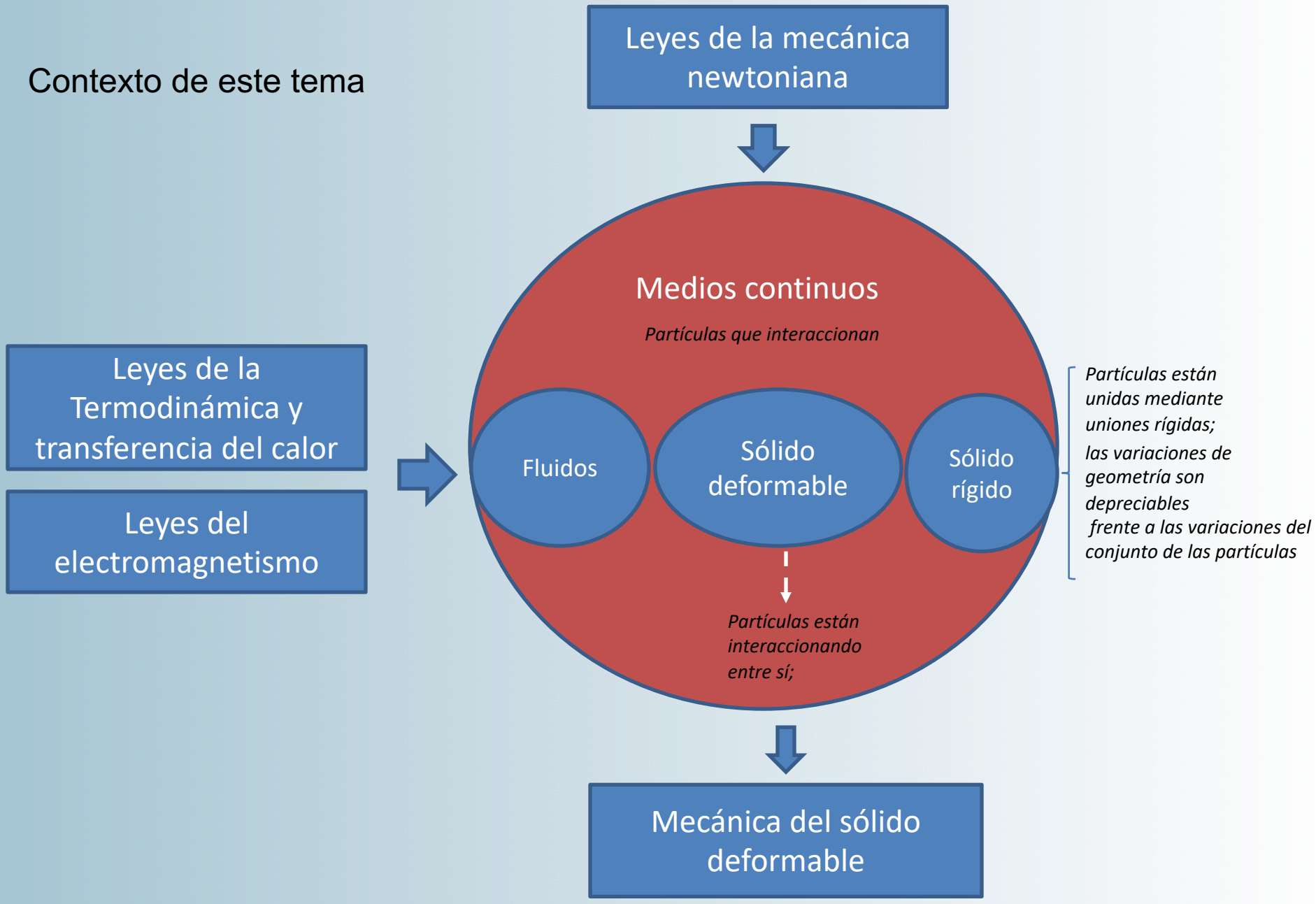
DPTO. DE CIENCIAS DE LA TIERRA Y FÍSICA DE LA MATERIA CONDENSADA (CITIMAC)

Este tema se publica bajo Licencia:

Creative Commons BY-NC-SA 4.0

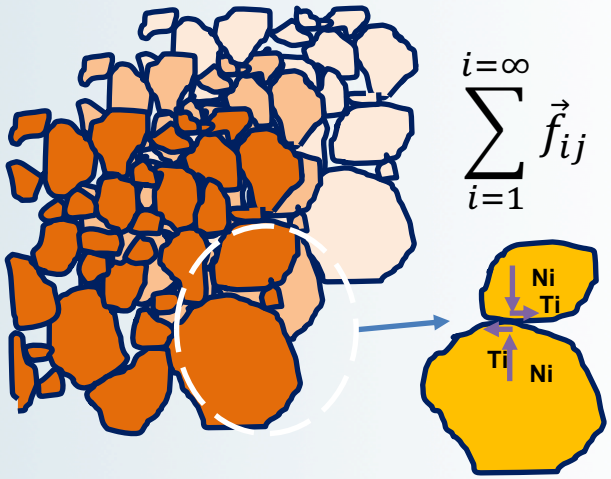
El Tensor de los Esfuerzos y los esfuerzos principales

Contexto de este tema

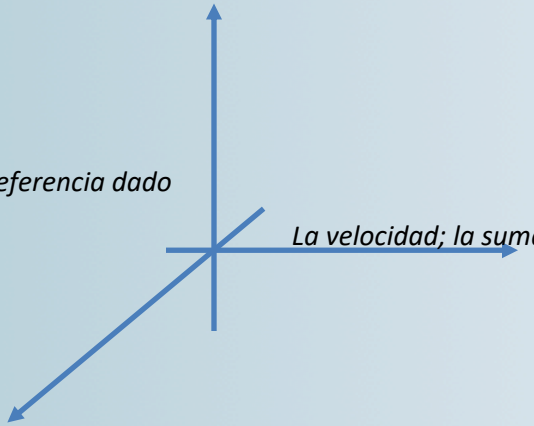


Ecuaciones de EQUILIBRIO

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \vec{F}_{ij}$$



$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \vec{f}_{ij}$$



Sistema de referencia dado

La velocidad; la suma de todas las fuerzas y suma de momentos que actúan se anulan

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \vec{F}_{ij} + \sum_{i=1}^{i=\infty} \vec{f}_{ij} = 0$$

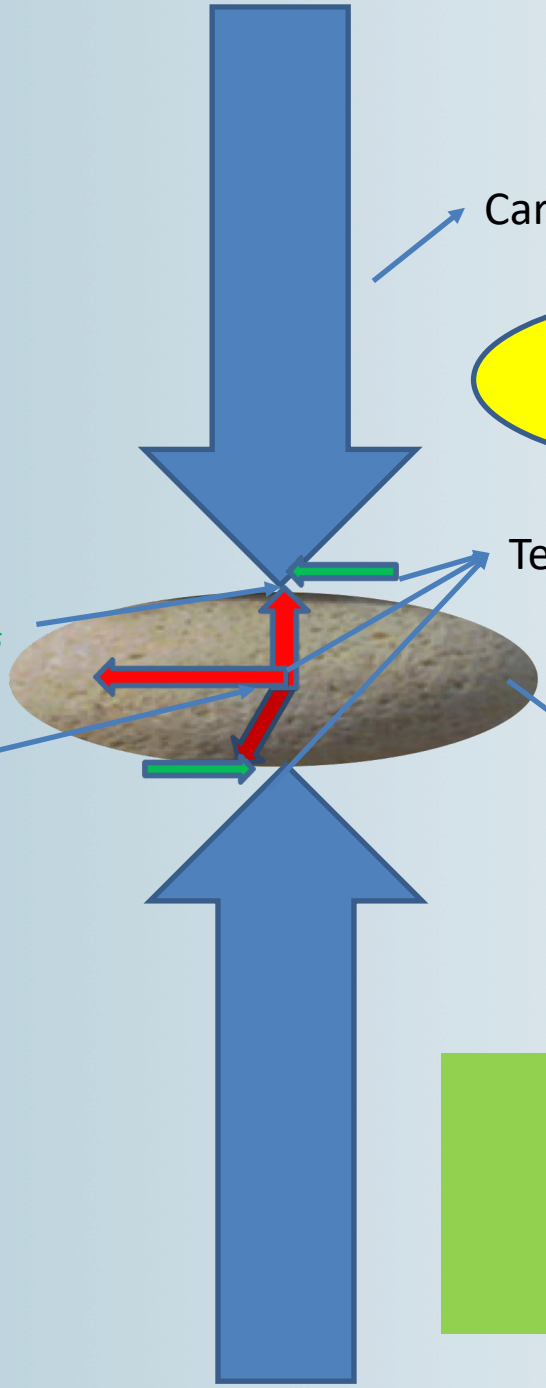
$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \overrightarrow{OP_i} \wedge \vec{F}_{ij} + \sum_{i=1}^{i=\infty} \overrightarrow{OP_i} \wedge \vec{f}_{ij} = 0$$

Ecuaciones CONSTITUTIVAS

$$dE_{\varepsilon}^{*} \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$$

Ecuaciones físicas que describen y caracterizan el tipo de medio; reflejando relaciones entre tensiones y deformaciones, velocidades de deformación.
Por ejemplo, en la ley de Hook, influye tanto la temperatura como la velocidad de deformación

Esquema conceptual



Cargas exteriores → Fuerzas que actúan sobre el sólido

Ecuaciones de equilibrio

Tensiones

Ecuaciones constitutivas

Fuerzas de superficie, f_s

Fuerzas de volumen, f_v

Deformaciones

Esquema conceptual

Fuerzas que actúan

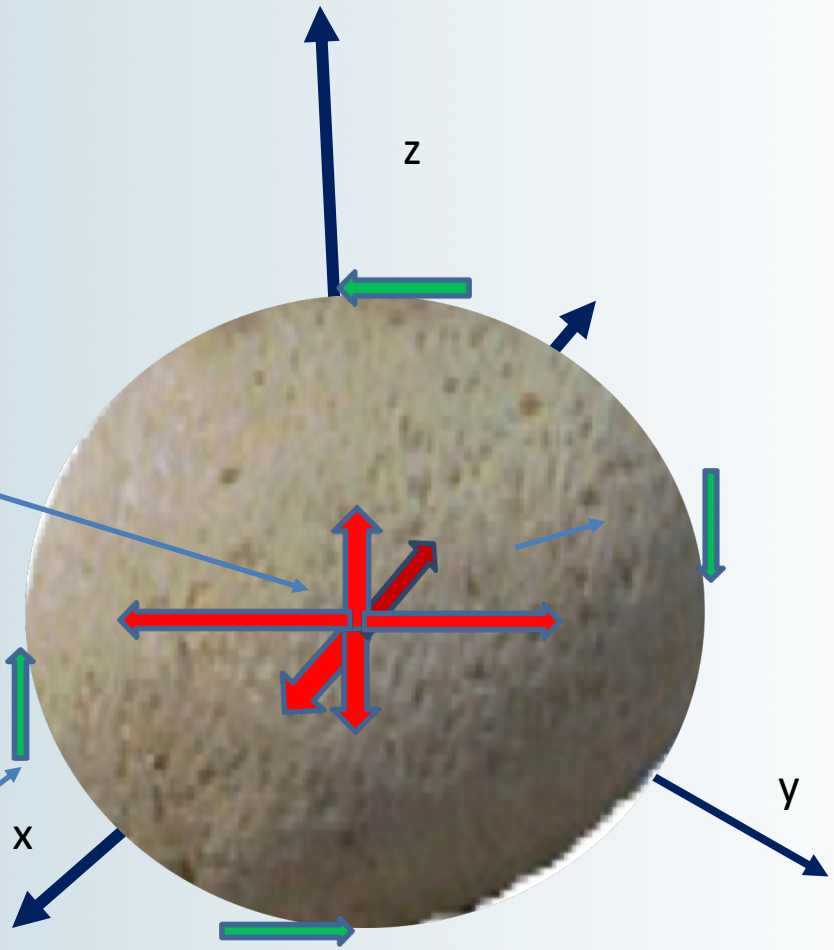
Las fuerzas que se pueden aplicar en un sólido continuo son de dos tipos:

1. Fuerzas de que actúan en el cuerpo, en cualquier parte del mismo y son proporcionales al volúmen o a la masa.

Fuerzas de volumen, f_v

3. Fuerzas que actúan en la superficie. Si imaginamos que le quitamos todo el material que compone este volúmen V, encontramos que hay otras fuerzas que son proporcionales a cada elemento de superficie

Fuerzas de superficie, f_s



Fuerzas que actúan

Las fuerzas que se pueden aplicar en un sólido continuo son de dos tipos:

1. Fuerzas de que actúan en el cuerpo, en cualquier parte del mismo y son proporcionales al volúmen o a la masa.

Fuerzas de volumen, f_v

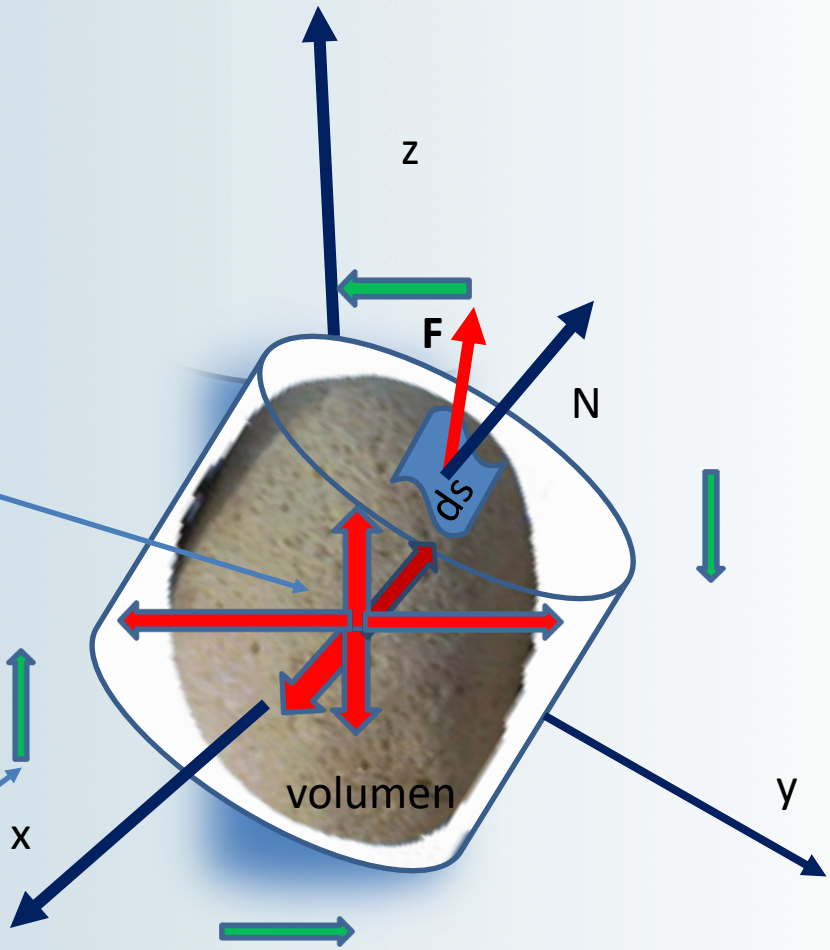
3. Fuerzas que actúan en la superficie. Si imaginamos que le quitamos todo el material que compone este volúmen V, encontramos que hay otras fuerzas que son proporcionales a cada elemento de superficie

Fuerzas de superficie, f_s

Gravedad

Fuerzas de inercia

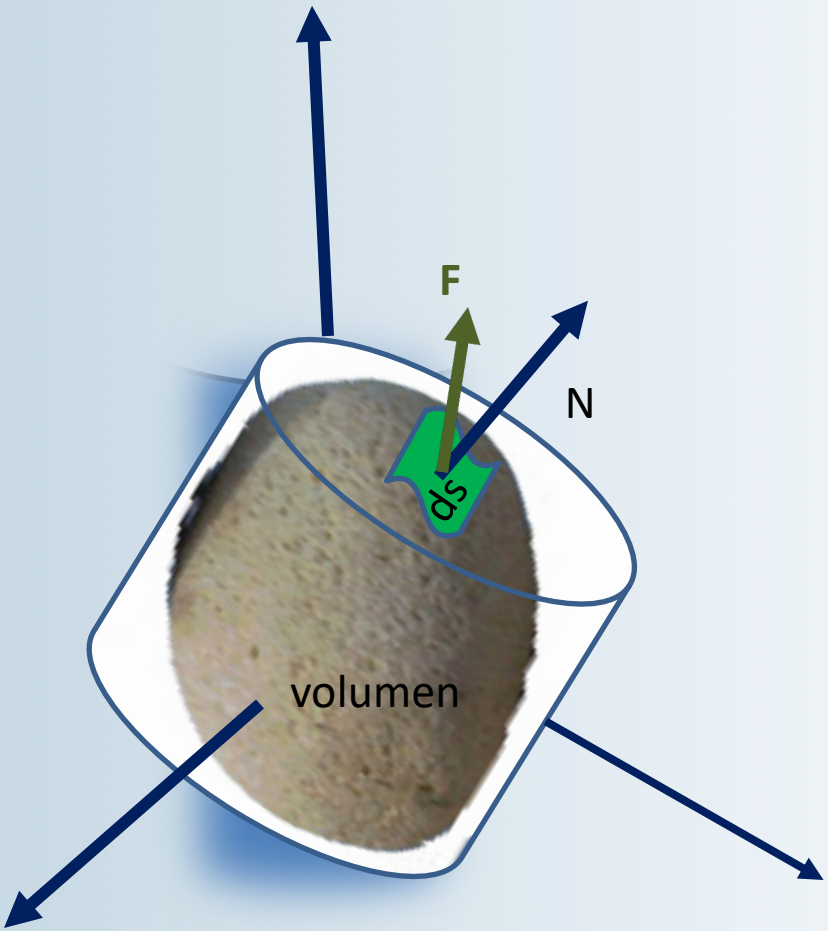
Fuerzas que actúan en el exterior del sólido



F = fuerza ejercida por el material que se encuentra afuera de **V**

N = normal al elemento de superficie **dS**

La Tensión T es una fuerza aplicada sobre una superficie (ds), sirve para cuantificar la fuerza de contacto (por unidad de superficie) con la que las partículas de un lado de una superficie actúan en las partículas del otro lado. En ese diferencial de superficie actúan las fuerza de contacto existentes entre las partículas internas del sólido

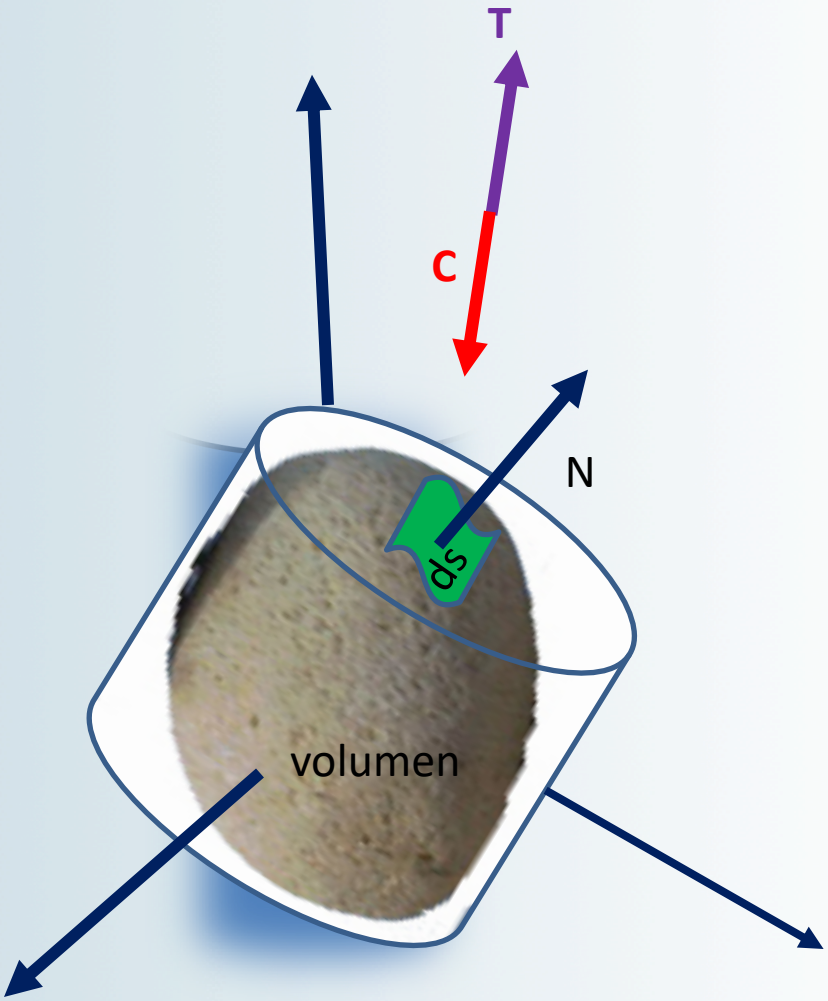


$$T = \lim_{ds \to 0} \left(\frac{F}{ds} \right)$$

La tracción tiene la misma orientación que la Fuerza F, y sentido hacia afuera y es función de la normal que define la superficie N.

En un sólido, *T* no necesariamente es paralela a *N*

La comprensión tiene la misma orientación que la Fuerza F, y sentido hacia el cuerpo y es función de la normal que define la superficie N.



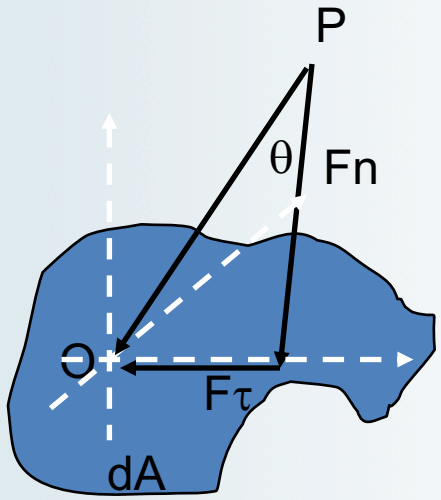
$$T = \lim_{ds \to 0} \left(\frac{F}{ds} \right)$$

El concepto de tensión en más detalle

DRAE-tensión:
Estado de un cuerpo sometido a la acción de fuerzas opuestas que lo atraen
Presión en el interior de sólidos sometidos a esfuerzos

Se trata de un concepto relevante en la mecánica de los medios continuos y en la teoría de la elasticidad.
Se denomina tensión mecánica a la fuerza que actúa por unidad de área, en el entorno de un punto de la materia perteneciente a un medio continuo. La superficie de actuación puede ser real o imaginaria.

Posee unidades físicas de presión.
La definición anterior se aplica tanto a fuerzas localizadas como fuerzas distribuidas, uniformemente o no, que actúan sobre una superficie.



En el Sistema Internacional, la unidad de la tensión mecánica es el pascal (1 Pa = 1 N/m²).
También se suelen emplear otras unidades como kg/cm² o kg/mm², donde «kg» se refiere a kilopondio o kilogramo-fuerza, no a la unidad de masa kilogramo.

Reflexiones sobre el concepto de tensión

¿Porqué es más apropiado usar el concepto de tensión que el de fuerza?

Pesemos montón de piedras

El peso es un fuerza $F = m \times a$. Para un cuerpo de una determinada densidad, como la masa es proporcional al volumen, a mayor volumen implicado mayor masa implicada y, por tanto, mayor peso.

$$g = cte$$

$$d = cte$$

$$Peso \propto V_{olumen}$$

$$\uparrow Peso \propto \uparrow V_{olumen}$$

$$F = m \times a \Rightarrow Peso1 = d \times V \times g \Rightarrow Peso1 = d \times L^3 \times g$$

$$Superficie1 = L^2$$

Reflexiones sobre el concepto de tensión

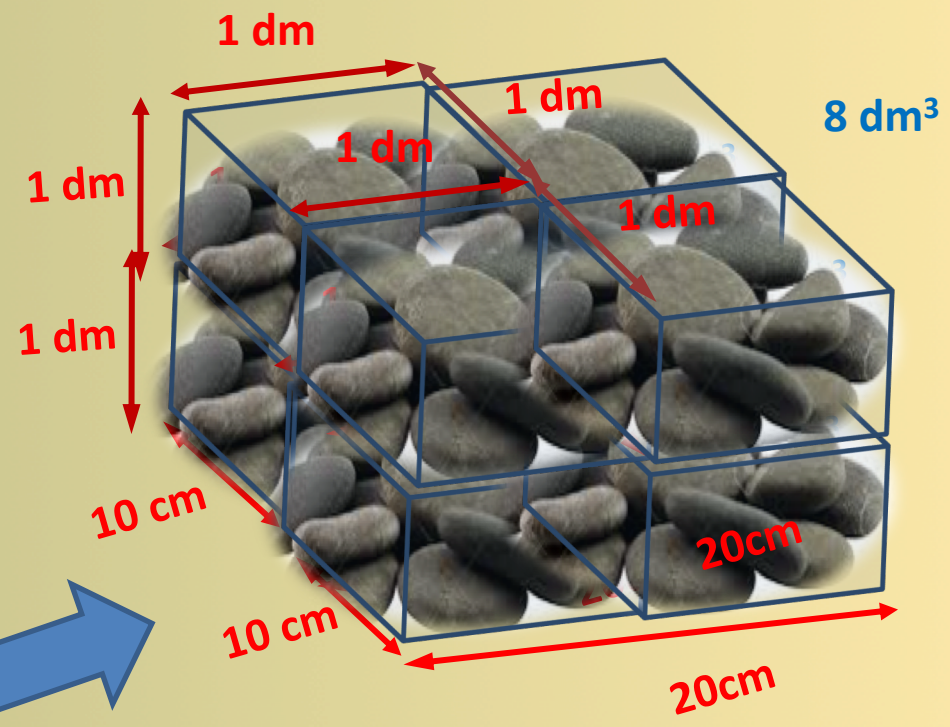
Aumentamos el doble de volumen de piedras a pesar,

$si\ V_2 = 2V_1$

$d = cte$

$g = cte$

x2



$Peso1 = d \times V \times g$

$Superficie1 = 1dm^2$

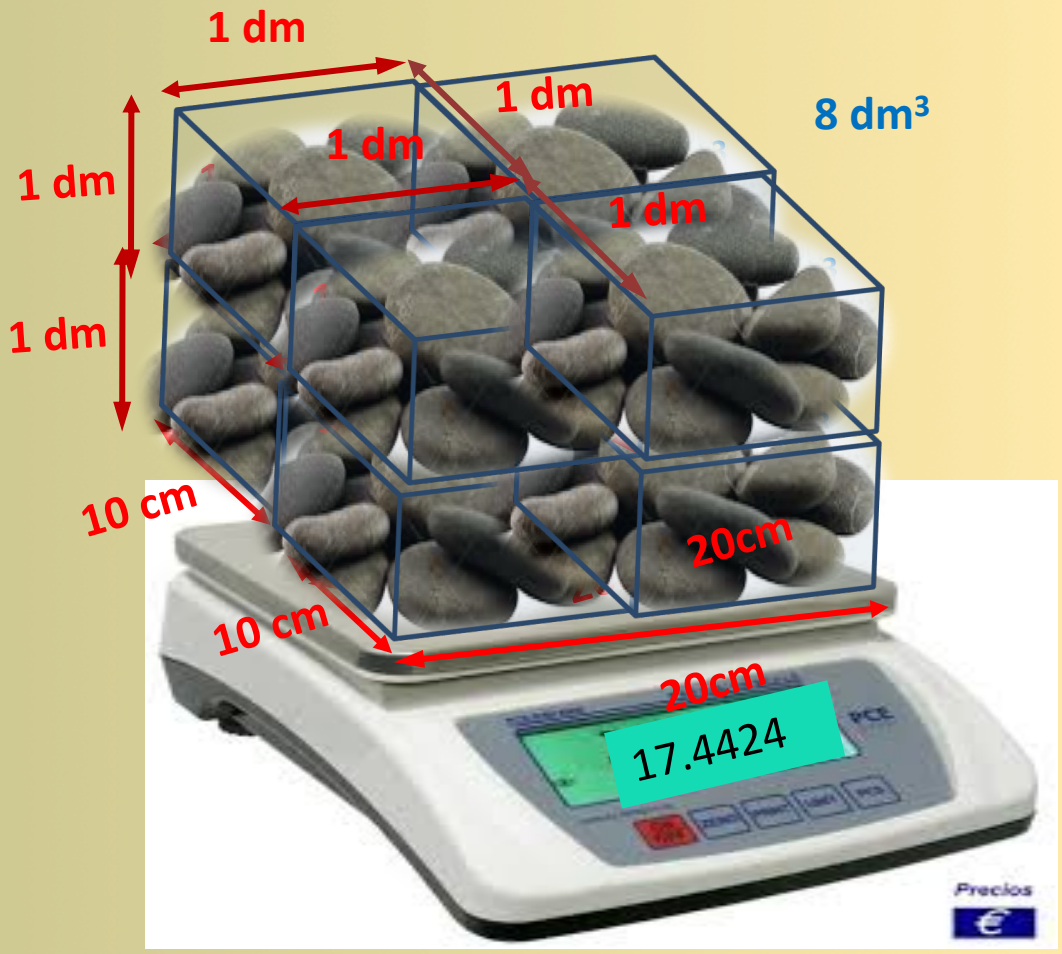
$Superficie2 = 4dm^2$

Reflexiones sobre el concepto de tensión

lógicamente aumentamos en la misma proporción el tamaño de la balanza para que pueda efectuarse la medida de ese peso

$Peso1 = d \times L^3 \times g$ $Peso2 = d \times (2L)^3 \times g$ $Peso2 = d \times 8L^3 \times g$

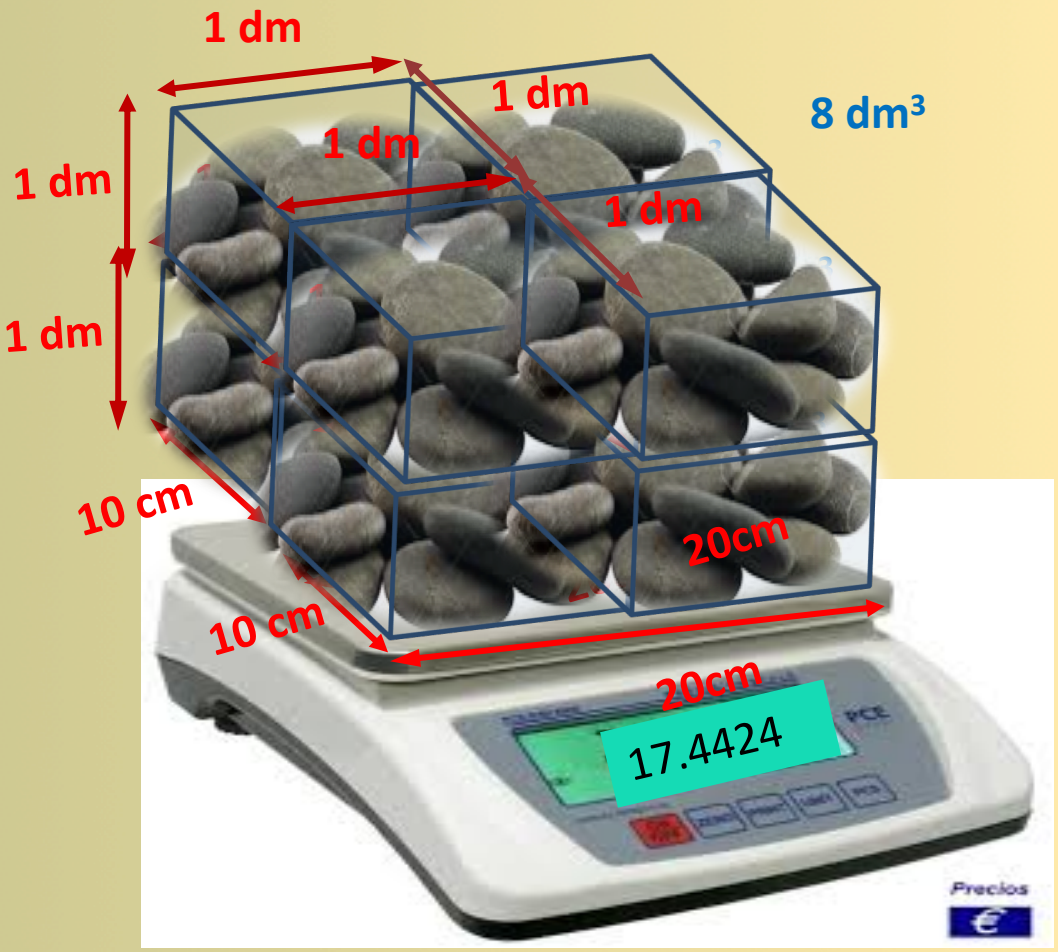
$Superficie1 = L^2$ $Superficie2 = (2L)^2$ $Superficie2 = 4L^2$



Reflexiones sobre el concepto de tensión

Pero….¿ qué pasa con la mesa en la que se coloca la balanza?

$$Peso2 = 8Peso1$$
$$Superficie2 = 4\,Superficie1$$



Reflexiones sobre el concepto de tensión

$Peso1 = 2{,}1803\ Kgf$ $= 2{,}1803\ kgf * 9{,}81 \frac{N}{Kgf} = 21{,}13\ N$

$Superficie1 = 0{,}01\ m^2$

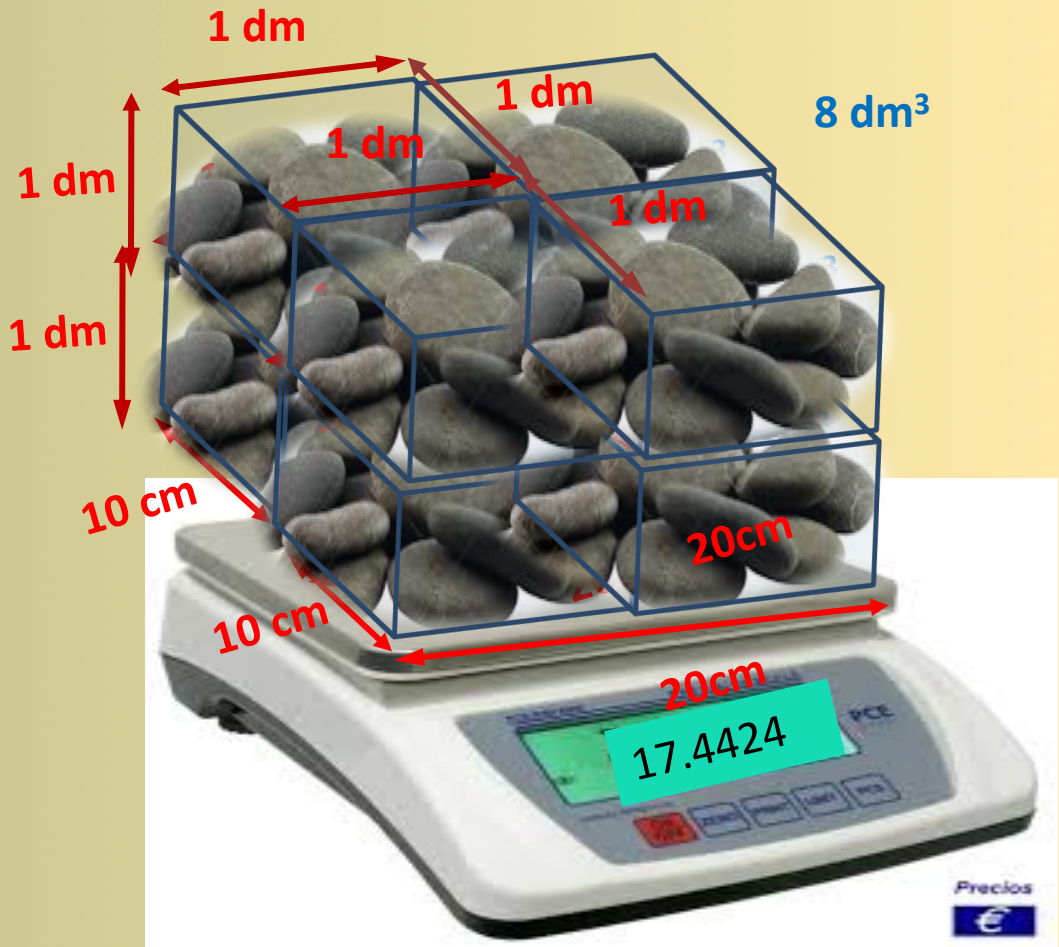
$Presión = 2180{,}3\ \frac{N}{m^2}$

$Presión2 = 2\ Presión\ 1$

$Peso2 = 17.4424$ Kgf

$Superficie2 = 0{,}04 m^2$

$Presión = 4360{,}6\ \frac{N}{m^2}$



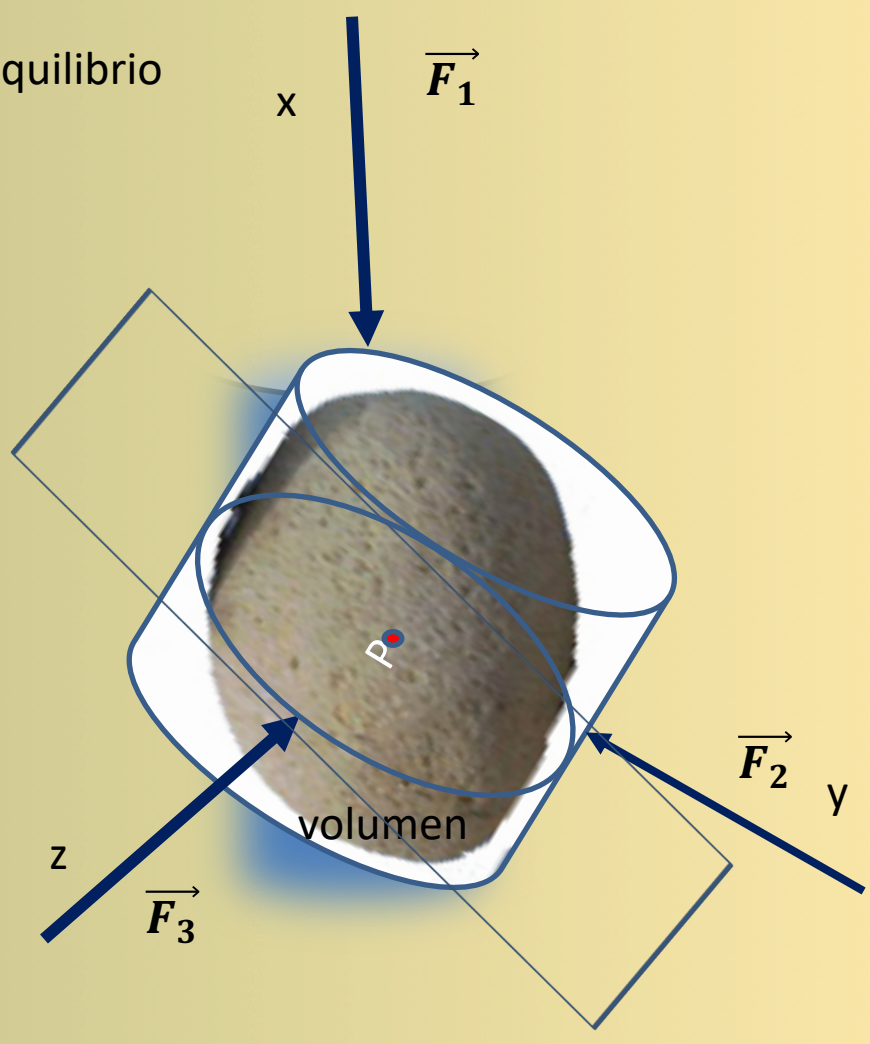
El vector tensión

Sólido rígido en equilibrio

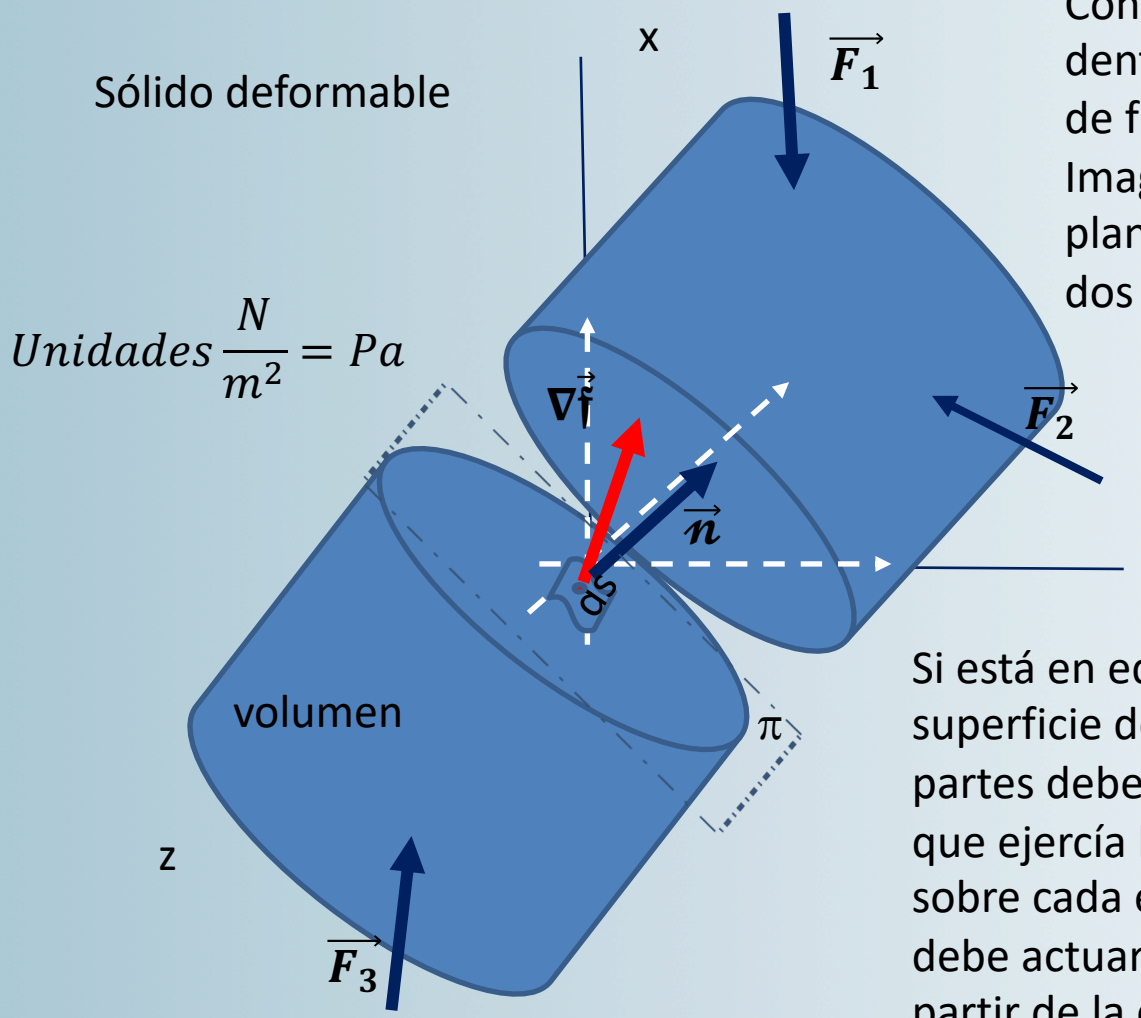
$$\sum_i \overrightarrow{F_i} = 0$$

$$\sum_i \overrightarrow{M_i} = 0$$

Si se expresa las fuerzas en un sistema cartesiano hay tres ecuaciones para la fuerza, una para cada eje; Para los momentos hay tres ecuaciones alrededor de cada eje



El vector tensión

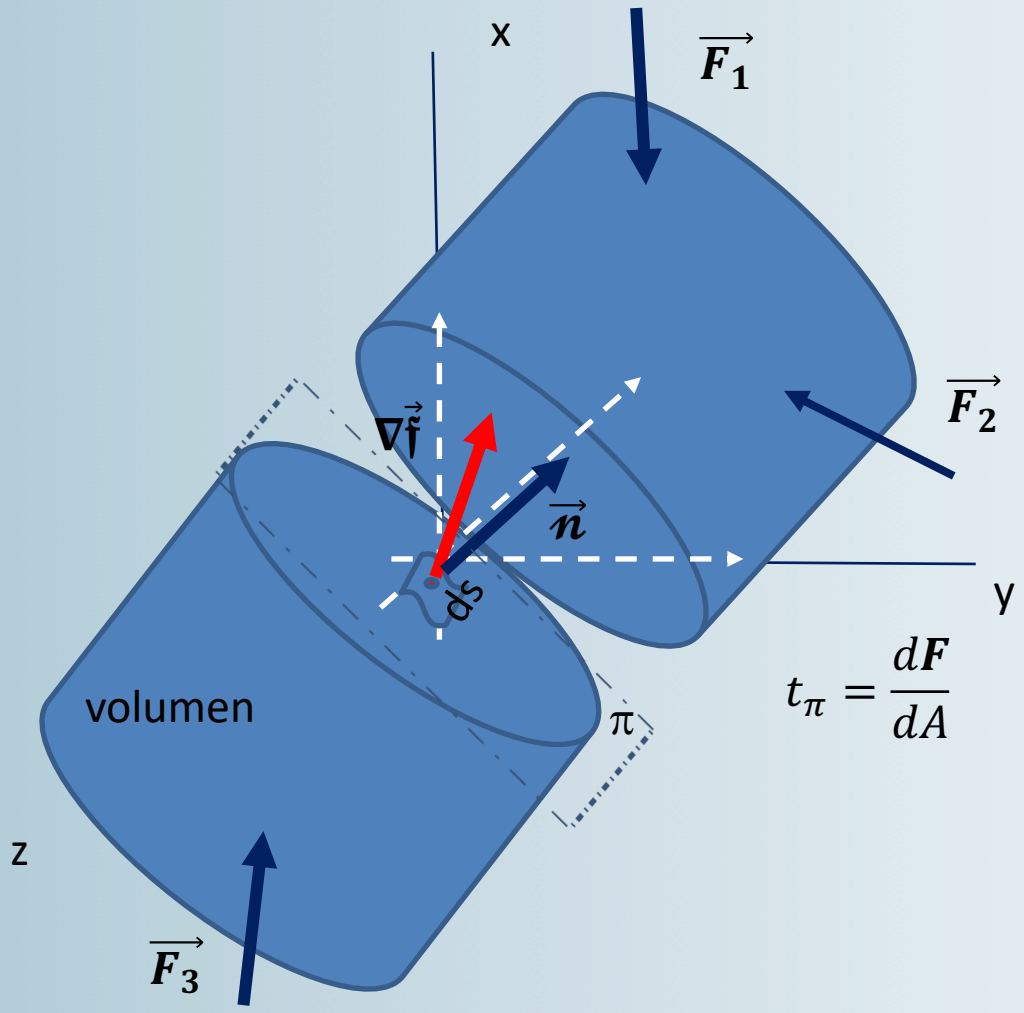


Considérese un cuerpo cilíndrico dentro de un sistema en equilibrio de fuerzas y momentos de fuerza. Imagínese que está cortado por el plano π, que divide el cuerpo en dos partes iguales.

Si está en equilibrio mecánico; sobre la superficie de corte de cada una de las partes debería restablecerse la interacción que ejercía la otra parte del cuerpo. Así, sobre cada elemento de la superficie (dS), debe actuar una fuerza elemental (dF), a partir de la cual se define un vector tensión (tπ) como el resultado de dividir dicha fuerza elemental entre la superficie del elemento.

$$t_\pi = \frac{d\boldsymbol{F}}{dA}$$

El vector tensión



Este vector tensión depende del estado tensional interno del cuerpo, de las coordenadas del punto escogido y del vector unitario normal al plano π (n_π). Se puede probar que t_π y n_π están relacionados por una aplicación lineal T o campo tensorial llamado tensor tensión: $t_\pi = \boldsymbol{T}(n_\pi)$

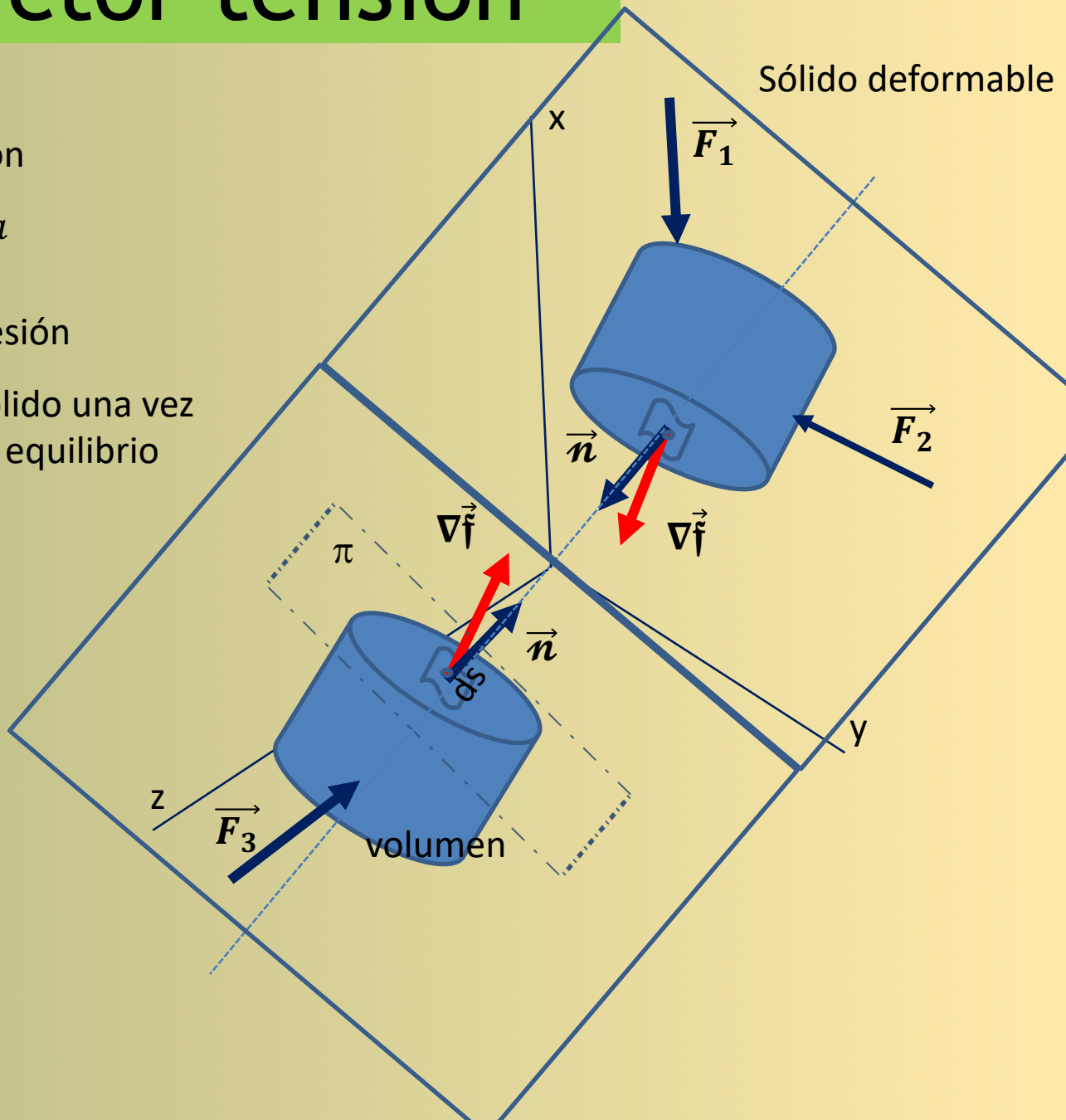
El vector tensión

El vector tensión es una presión

$$Unidades\ \frac{N}{m^2} = Pa$$

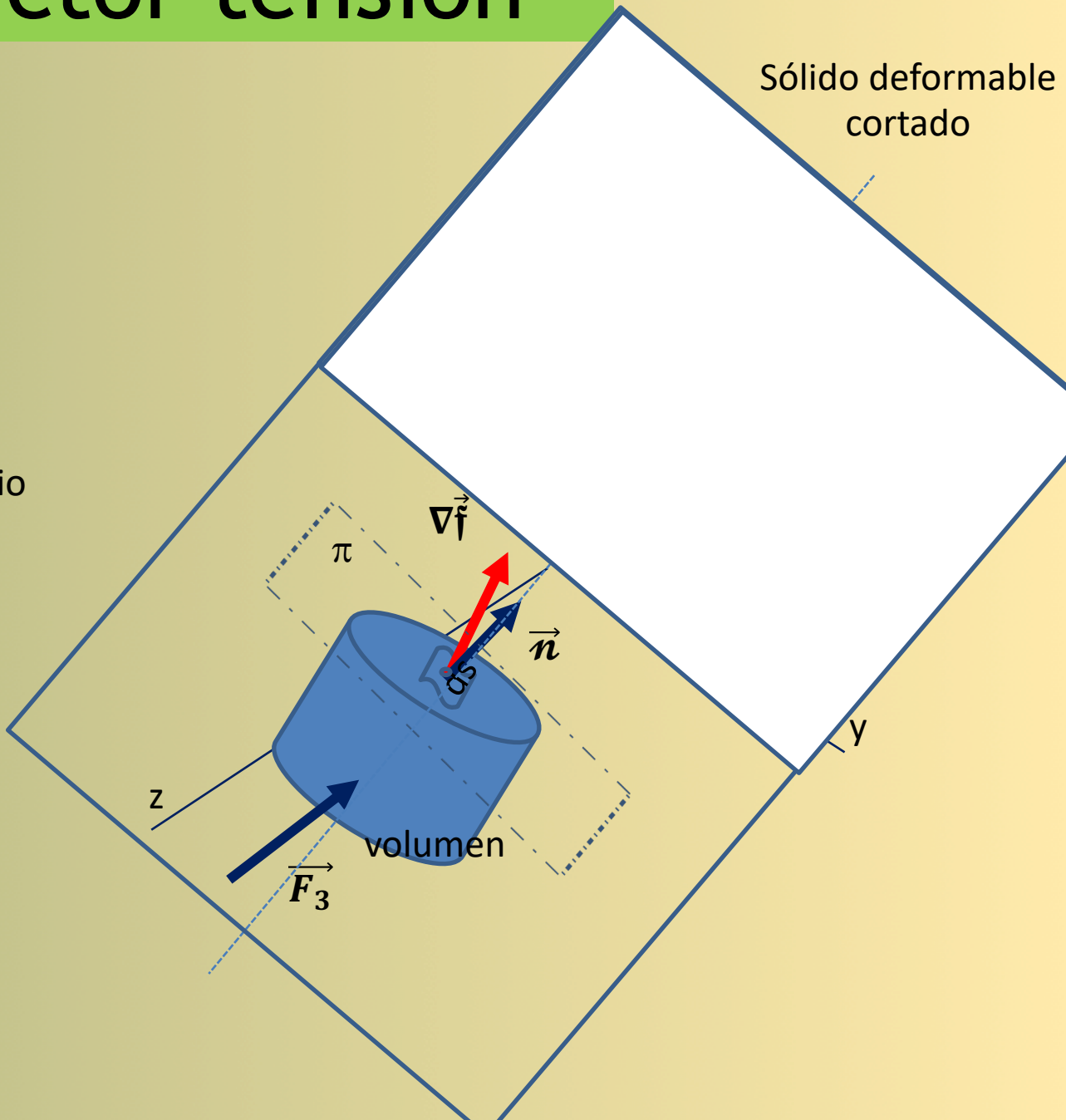
El vector tensión es una presión

Cada una de las partes del sólido una vez cortadas tienen que estar en equilibrio



El vector tensión

En la cara inferior están actuando una serie de fuerzas: las derivadas de la fuerza externa (F3)
Y las que provienen de la parte superior, que sería iguales y de sentido contrario a las que actúan en la cara inferior

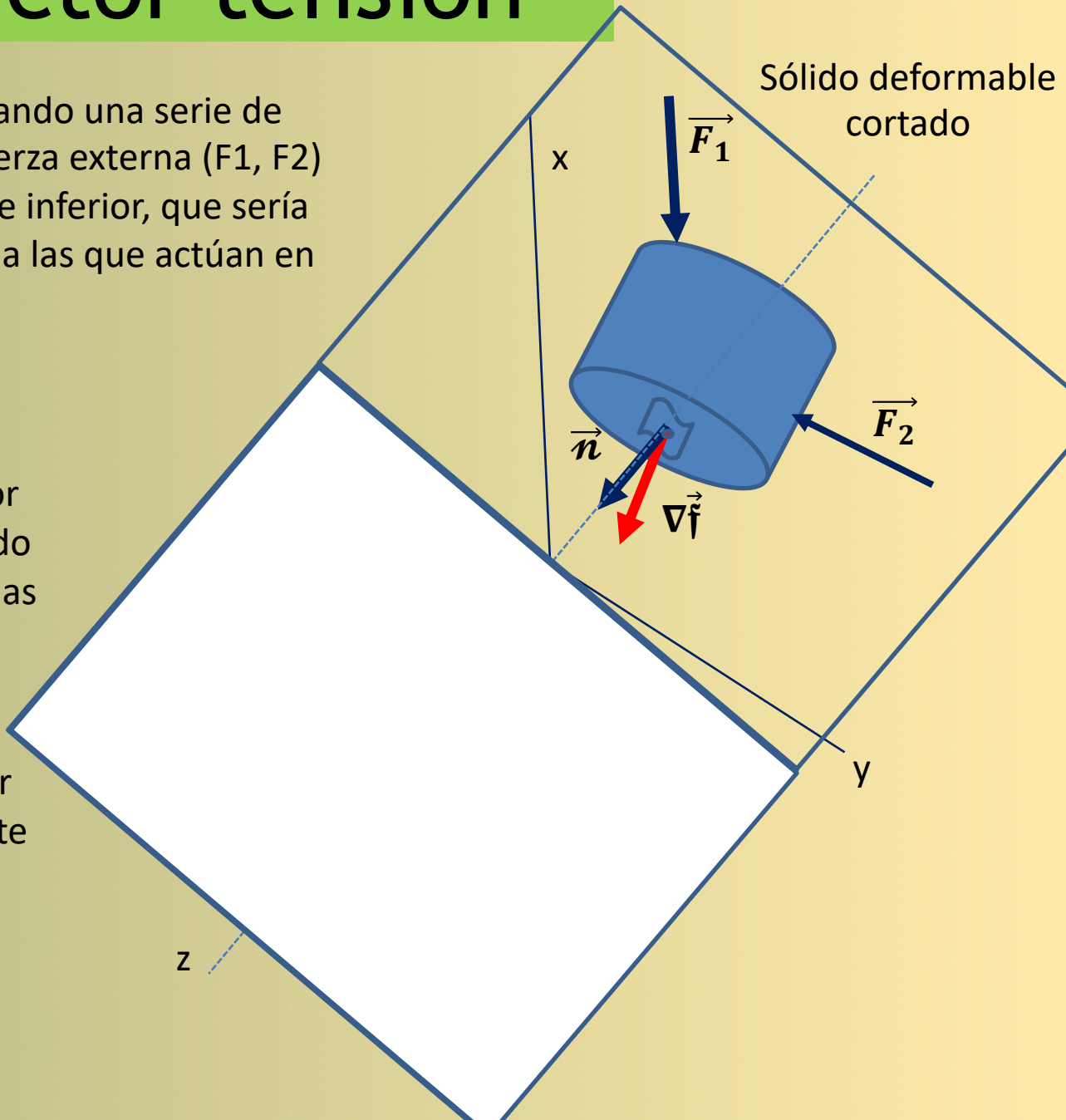


El vector tensión

En la cara superior están actuando una serie de fuerzas: las derivadas de la fuerza externa (F1, F2)
Y las que provienen de la parte inferior, que sería iguales y de sentido contrario a las que actúan en la cara inferior

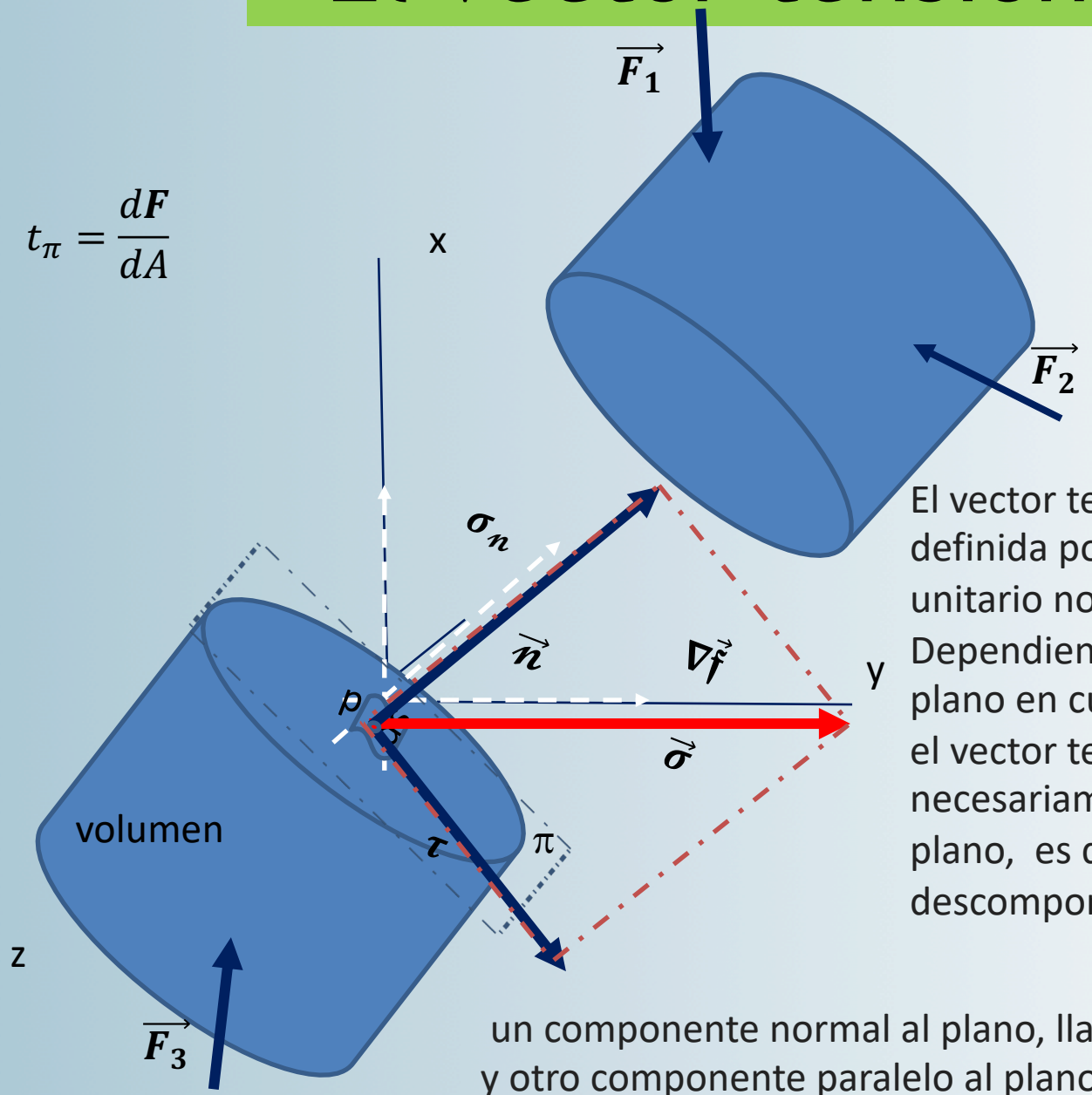
En el plano π están actuando una distribución de fuerzas por unidad de superficie, producido por el efecto de ambos sistemas de fuerzas
Si tomamos una superficie infinitesimal (ds) dentro de dicho plano π, habrá un vector tensión que tomará la siguiente Expresión:

$$\vec{n} = \lim_{\pi \to 0} \frac{\Delta \vec{f}}{\Delta \pi} = \frac{d\vec{f}}{d\pi} = \vec{\sigma}$$



El vector tensión

$$t_\pi = \frac{dF}{dA}$$



El vector tensión en una superficie S definida por medio de su vector unitario normal **n**.
Dependiendo de la orientación del plano en cuestión,
el vector tensión puede no ser necesariamente perpendicular a ese plano, es decir, paralelo a **n** , y puede descomponerse en dos vectores:

un componente normal al plano, llamado *tensión normal* σ_n, y otro componente paralelo al plano, denominado *tensión cortante* τ_n .

El vector tensión

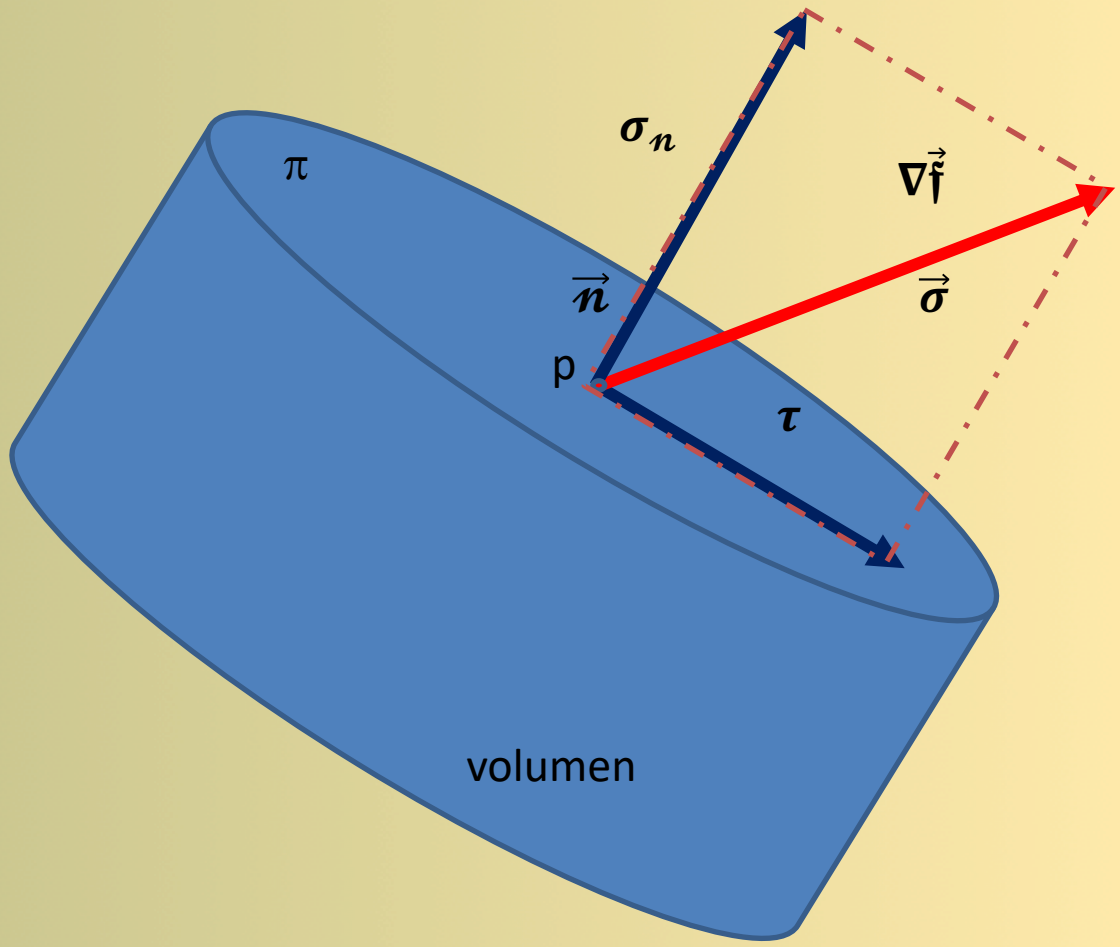
En el plano π están actuando una vector tensión normal al plano y otra tangencial al plano, no dependientes del sistema de referencia, a este par de fuerzas se le denomina COMPONENTES INTRÍNSECAS

Tensión Normal

$$\sigma_n = \vec{\sigma} \cdot \vec{n}$$

Tensión tangencial o de cizalla

$$\tau = \sqrt[2]{\sigma^2 - {\sigma_n}^2}$$



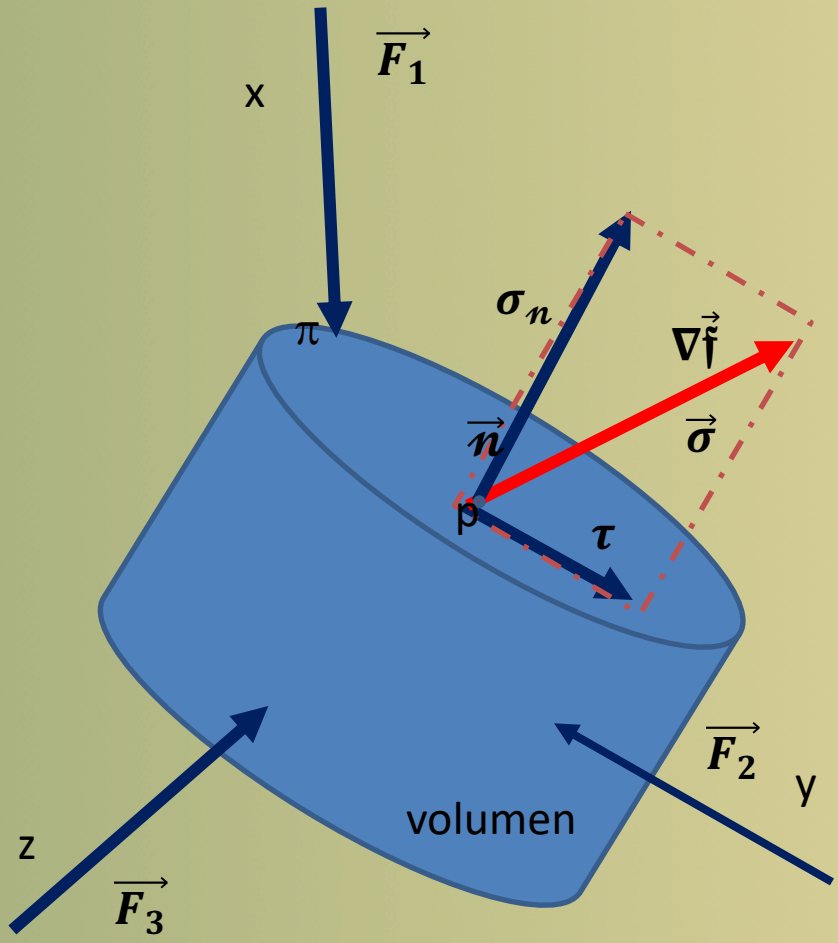
El vector tensión

El vector tensión depende de:

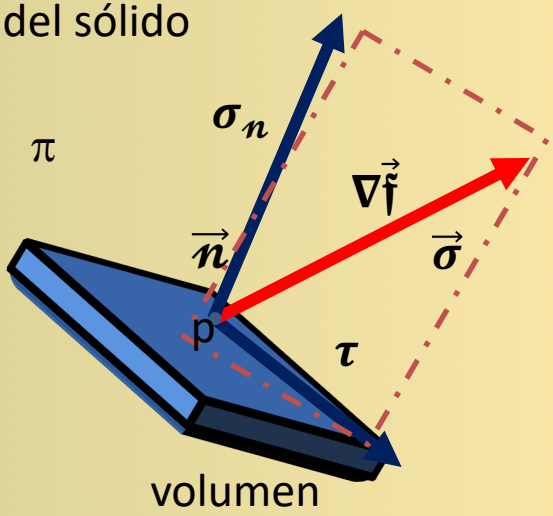
- fuerzas exteriores
- geometría del sólido

$$\sigma_n = \vec{\sigma} \cdot \vec{n}$$

$$\tau = \sqrt[2]{\sigma^2 - {\sigma_n}^2}$$

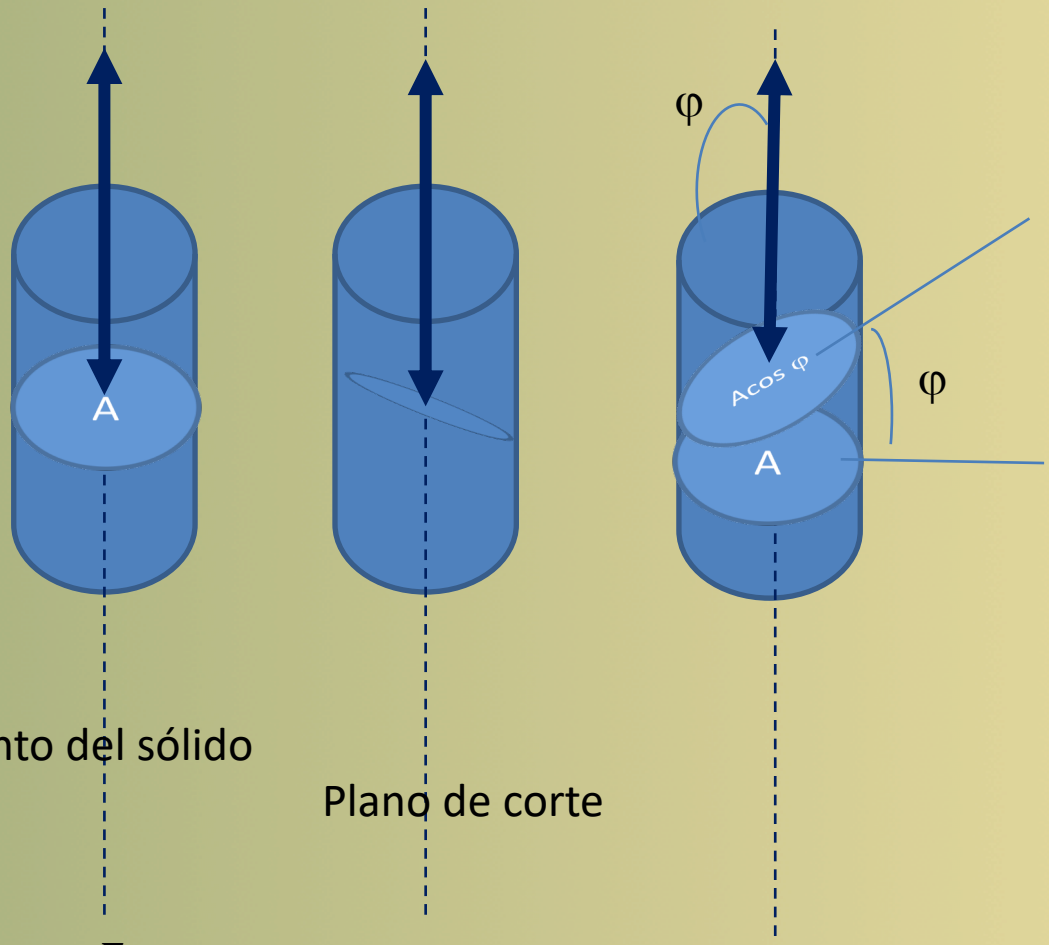


Plano ds Sólido



Tendrán reflejo en las ecuaciones de equilibrio

El vector tensión depende de:



punto del sólido

Plano de corte

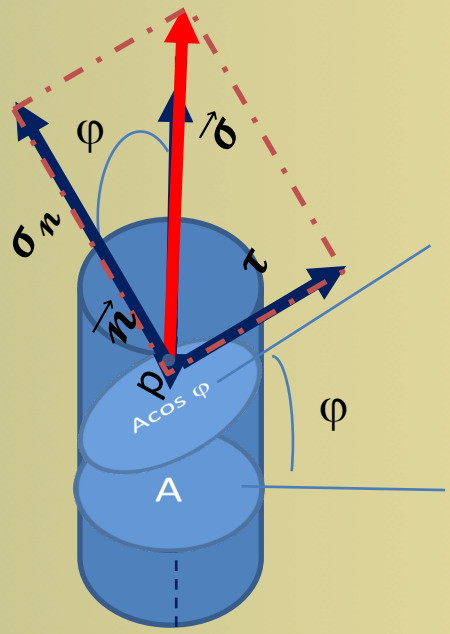
$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$$\sigma_n = \frac{F}{A}$$

$$\tau = 0$$

La tensión, tanto tracción como compresión, que se ejerce en un punto difiere en función de la forma que tiene el plano de interacción.

El vector tensión depende de:



En general tenemos un número infinito de tracciones una para cada posibilidad de plano. Entonces ¿qué hacemos?

$$\sigma = \frac{F}{A}\cos\varphi$$

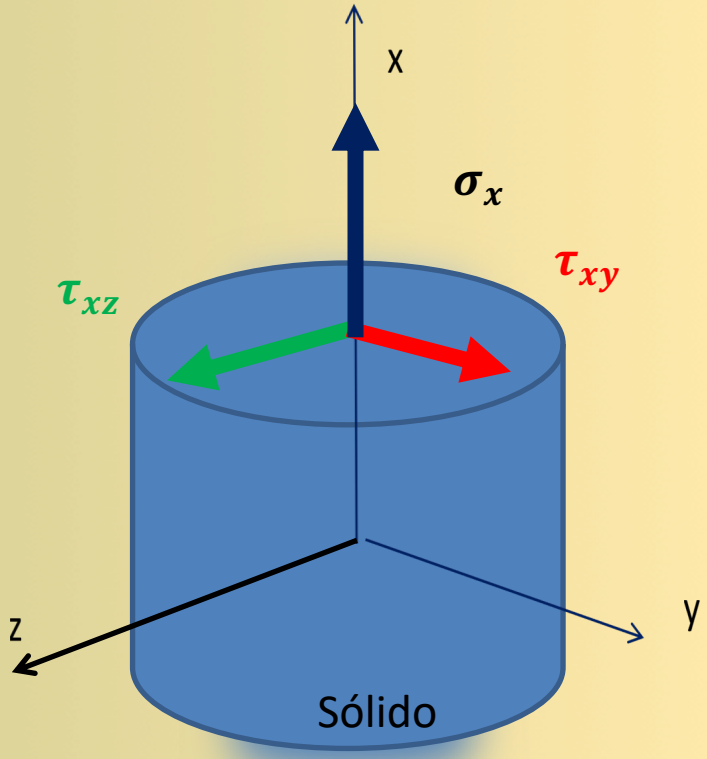
$$\sigma_n = \left(\left(\frac{F}{A}\right)\cos\varphi\right)\cos\varphi \qquad \sigma_n = \frac{F}{A}cos^2\varphi$$

$$\tau = \left(\left(\frac{F}{A}\right)\cos\varphi\right)\sin\varphi$$

El tensor de tensiones

Obtener el valor de tensión para cualquier plano que pasa por un punto

$$\vec{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}$$

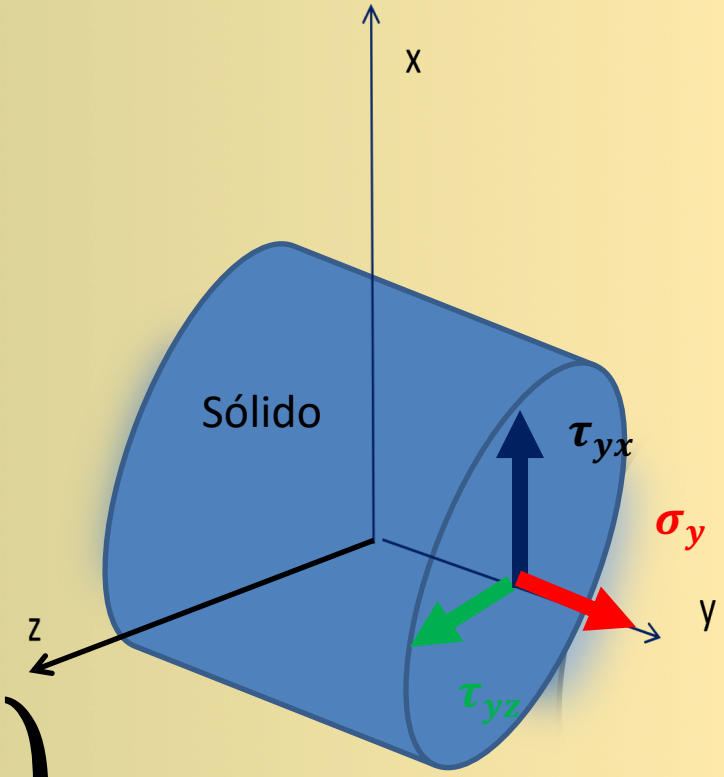


Al cortar por un plano perpendicular al eje x

$$\vec{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}$$

El tensor de tensiones

$$\vec{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_y \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}$$

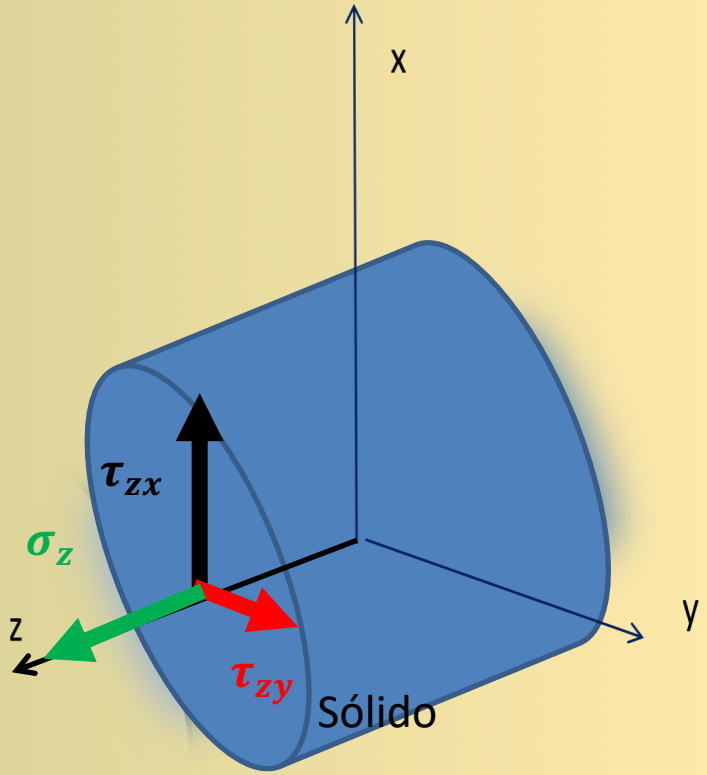


Al cortar por un plano perpendicular al eje y

$$\vec{\sigma} = \begin{Bmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}$$

El tensor de tensiones

$$\vec{\sigma} = \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_z \end{Bmatrix}$$

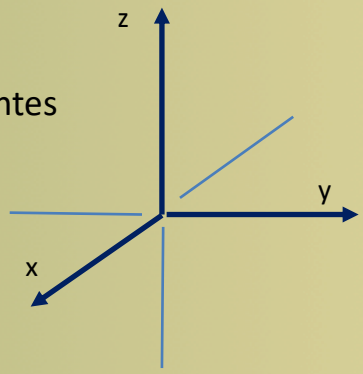


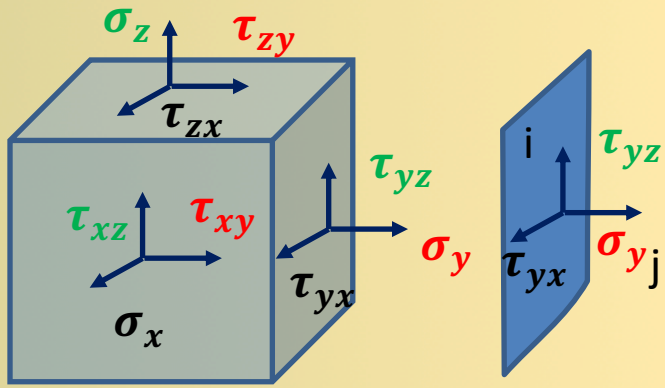
Al cortar por un plano perpendicular al eje z

$$\vec{\sigma} = \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_z \end{Bmatrix}$$

El tensor de tensiones

componentes

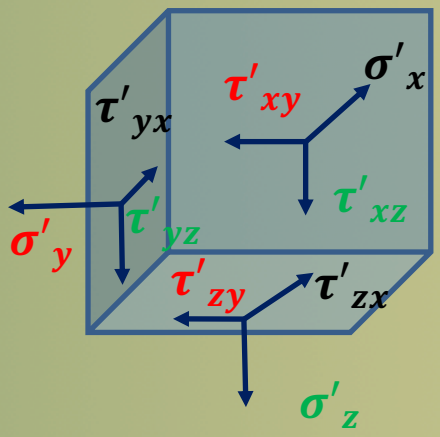


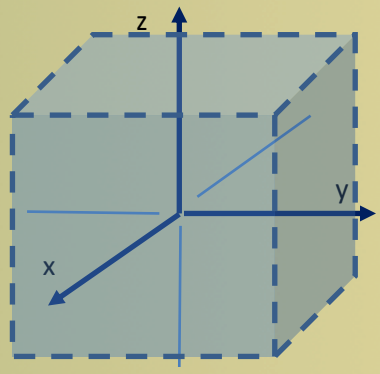


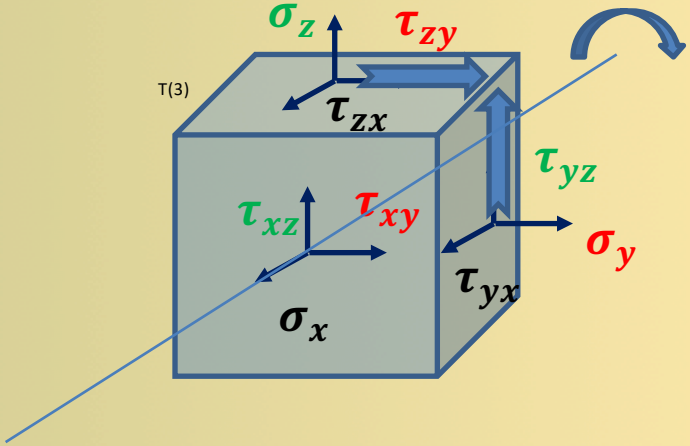
T_{ij} **i** = normal al plano donde actúa **T;**
j = componente de **T**

$$[T]_{xyz} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Teorema de reciprocidad tensiones tangenciales



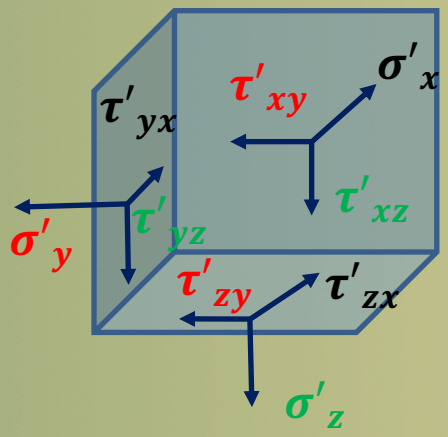


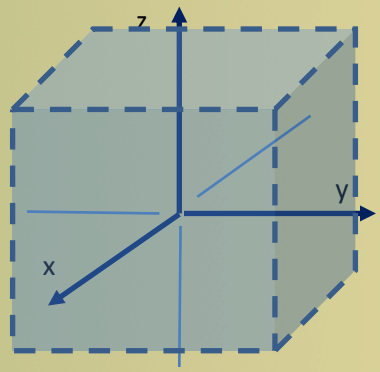


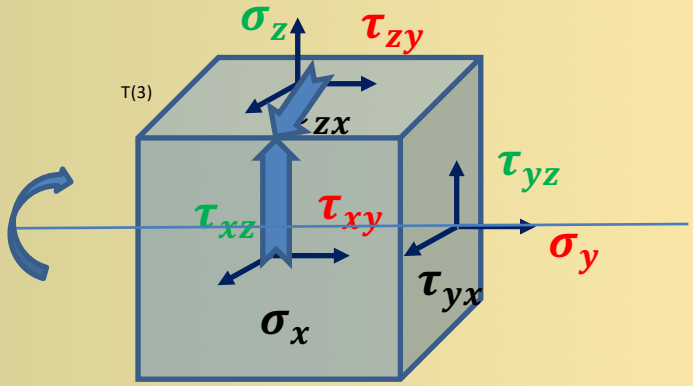
Si está en equilibrio

$$\sum_i \overrightarrow{M_{ix}} = 0 \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Teorema de reciprocidad tensiones tangenciales





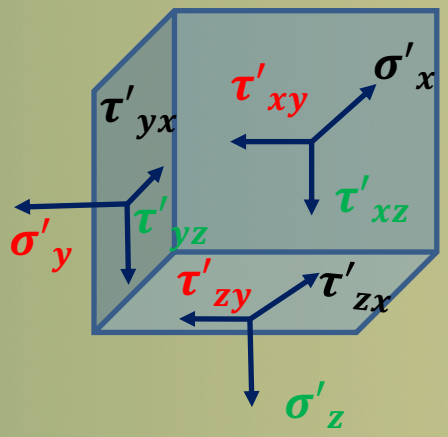


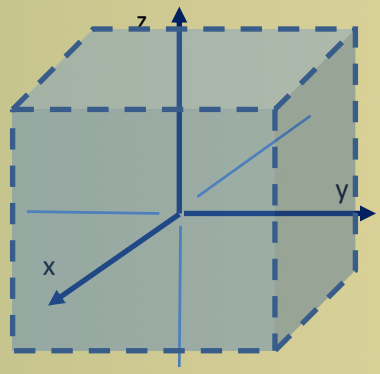
Si está en equilibrio

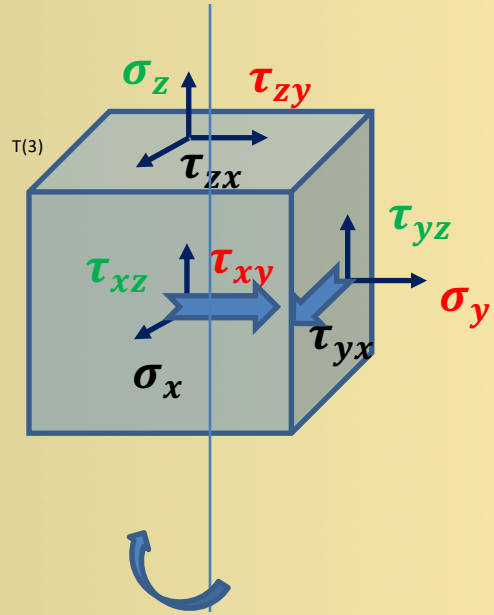
$$\sum_i \overrightarrow{M_{ix}} = 0 \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

$$\sum_i \overrightarrow{M_{iy}} = 0 \qquad \tau_{xz} = \tau_{zx}$$

Teorema de reciprocidad tensiones tangenciales







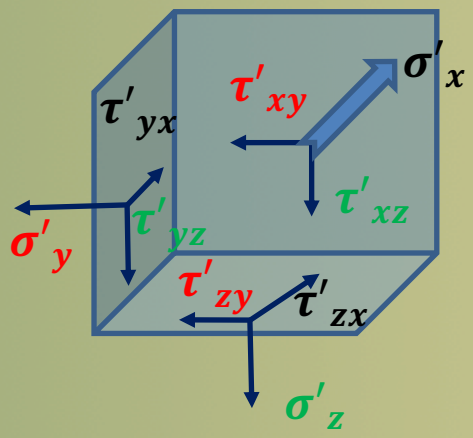
Si está en equilibrio

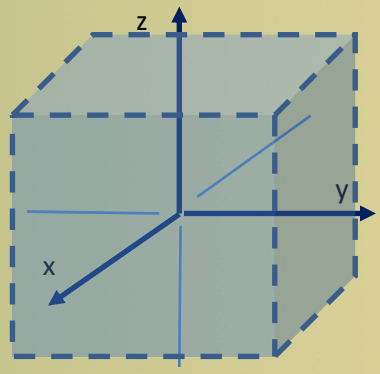
$$\sum_i \overrightarrow{M_{ix}} = 0 \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

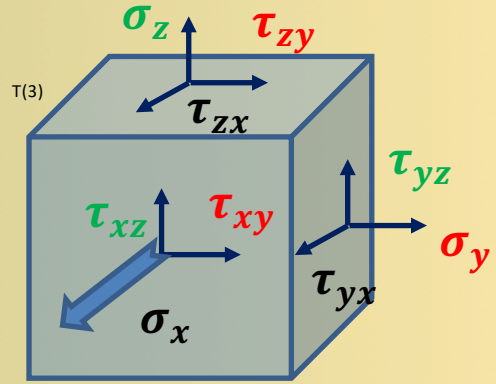
$$\sum_i \overrightarrow{M_{iy}} = 0 \qquad \tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\sum_i \overrightarrow{M_{iz}} = 0 \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Teorema de reciprocidad tensiones tangenciales







Si está en equilibrio

$$\sum_i \overrightarrow{M_{ix}} = 0 \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

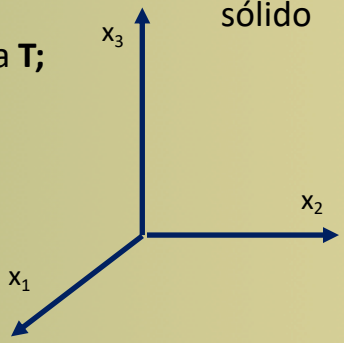
$$\sum_i \overrightarrow{F_i} = 0 \qquad \begin{cases} \sigma_x = \sigma'_x \\ \sigma_y = \sigma'_y \\ \sigma_z = \sigma'_z \end{cases}$$

$$[T]_{xyz} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

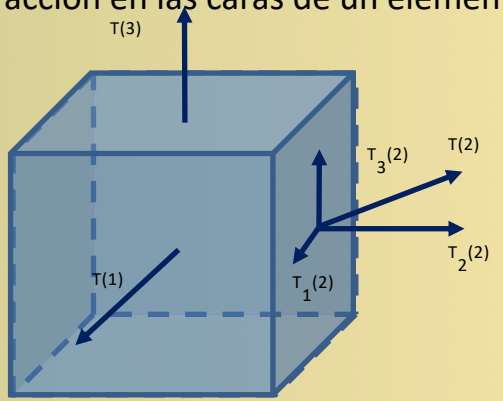
$$[T]_{xyz} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

El tensor de tensiones de cauchy

$T_j^{(i)}$; **i** = normal al plano donde actúa **T;**
j = componente de **T**



Vectores de tracción en las caras de un elemento infinitesimal del sólido



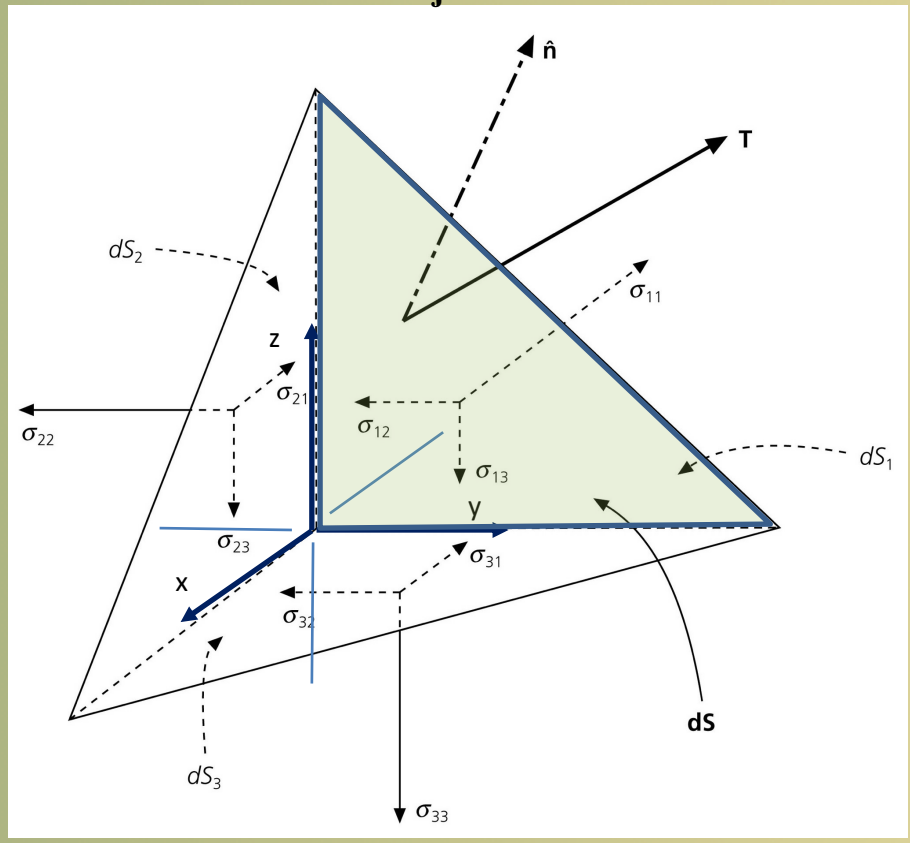
$T^{(j)}$ es el vector tracción actuando en la superficie cuya normal hacia afuera es posiva en la dirección $\hat{e}_j$

Las componentes de los tres vectores de tracción **$T_i^{(j)}$, donde el índice del exponente (j) indica la superficie y el índice (i) indica la componente**

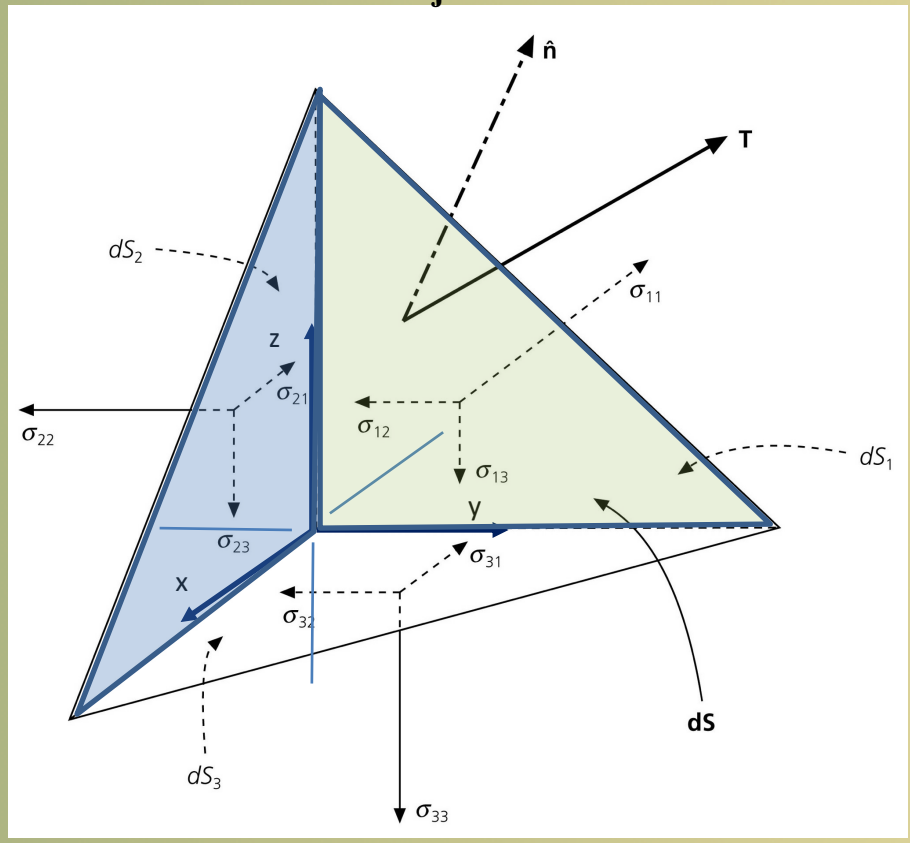
Exemplo $T_3^{(1)}$ es el componente x_3 de tracción sobre la superficie cuya normal es $\hat{e}_1$

$$[T_t]_{xyz} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

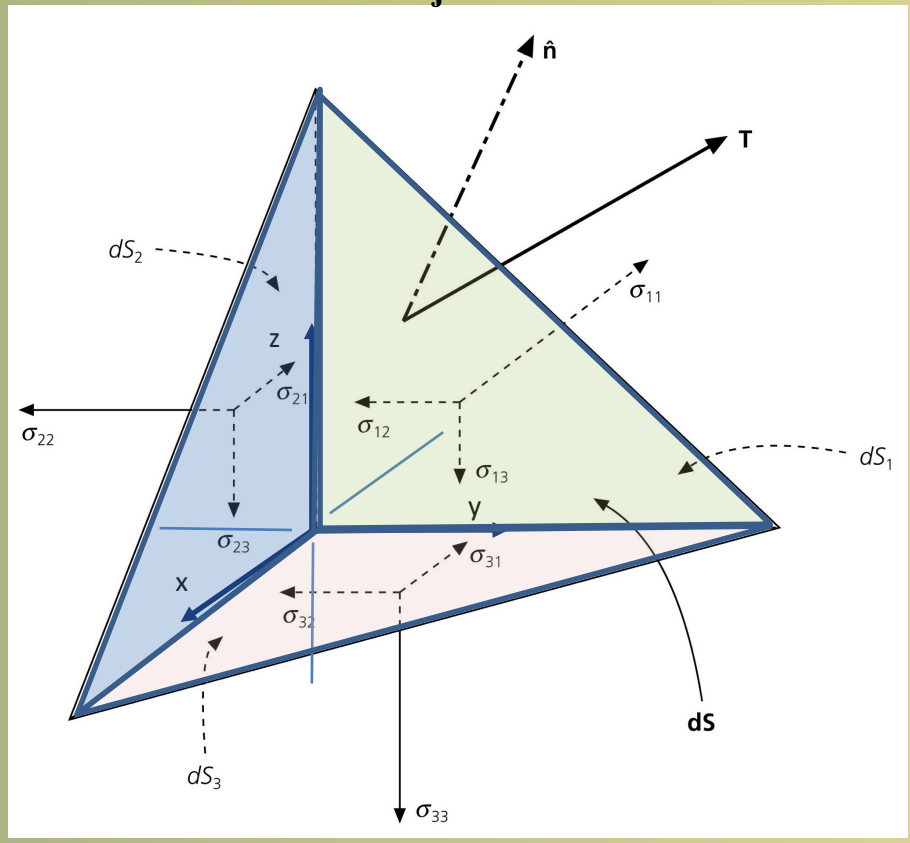
Componentes de esfuerzo que se ejerce en las caras de un tetraedro orientado con los ejes coordenados.



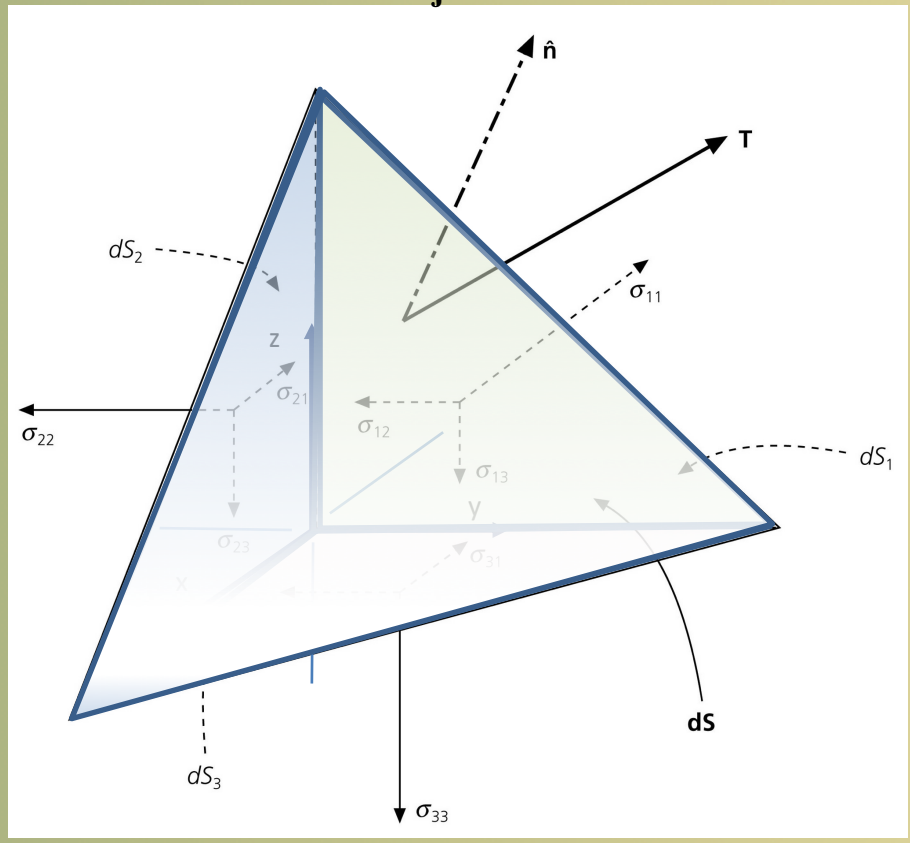
Componentes de esfuerzo que se ejerce en las caras de un tetraedro orientado con los ejes coordenados.



Componentes de esfuerzo que se ejerce en las caras de un tetraedro orientado con los ejes coordenados.



Componentes de esfuerzo que se ejerce en las caras de un tetraedro orientado con los ejes coordenados.



El tensor de esfuerzo da el vector de tracción T que actúa sobre cualquier superficie dentro del medio

La tracción no necesariamente es perpendicular (ortogonal) al plano en que actúa.

Por ejemplo, la tracción en un elemento arbitrario de superficie ds, cuya normal $\hat{n}$ no está a lo largo de un eje de coordenadas se encuentra multiplicando cada componente de tracción por el área de la cara en cual actúa sumando todas las caras

$$T_i = \sigma_{1i}n_1 + \sigma_{2i}n_2 + \sigma_{3i}n_3 = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ji}n_j = \sigma_{ji}n_j$$

Por medio del balance de tracciones en las caras de un tetrahedro orientado con tres caras ortogonales en las direcciones de los ejes coordenados podemos encontrar la tracción en un plano con una inclinación arbitraria. Notar que las tracciones en las caras ortogonales, compensan a la tracción en la cara inclinada.

El Tensor de esfuerzos está definido como:

$$\sigma_{ji} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}^{(1)} \\ \mathbf{T}^{(2)} \\ \mathbf{T}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^{(1)} & T_2^{(1)} & T_3^{(1)} \\ T_1^{(2)} & T_2^{(2)} & T_3^{(2)} \\ T_1^{(3)} & T_2^{(3)} & T_3^{(3)} \end{pmatrix}$$

Tener cuidado con la notación en los textos,

$$\mathbf{T}^{(1)} \neq \mathbf{T}_1$$

El tensor de esfuerzos es simétrico:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

El Tensor de esfuerzos nos da la Tracción que actúa en cualquier superficie dentro del medio que nos interesa.

Por ejemplo, los componentes de la Tracción en un elemento arbitrario de superficie ***dS*** cuya normal ***n*** no es paralela a ningún eje, se encuentra multiplicando los elementos correspondientes del tensor de esfuerzos por los cosenos directores de la normal al área donde actúa y sumando el resultado.
Esto es lo que se conoce como *Ecuación de Cauchy.*

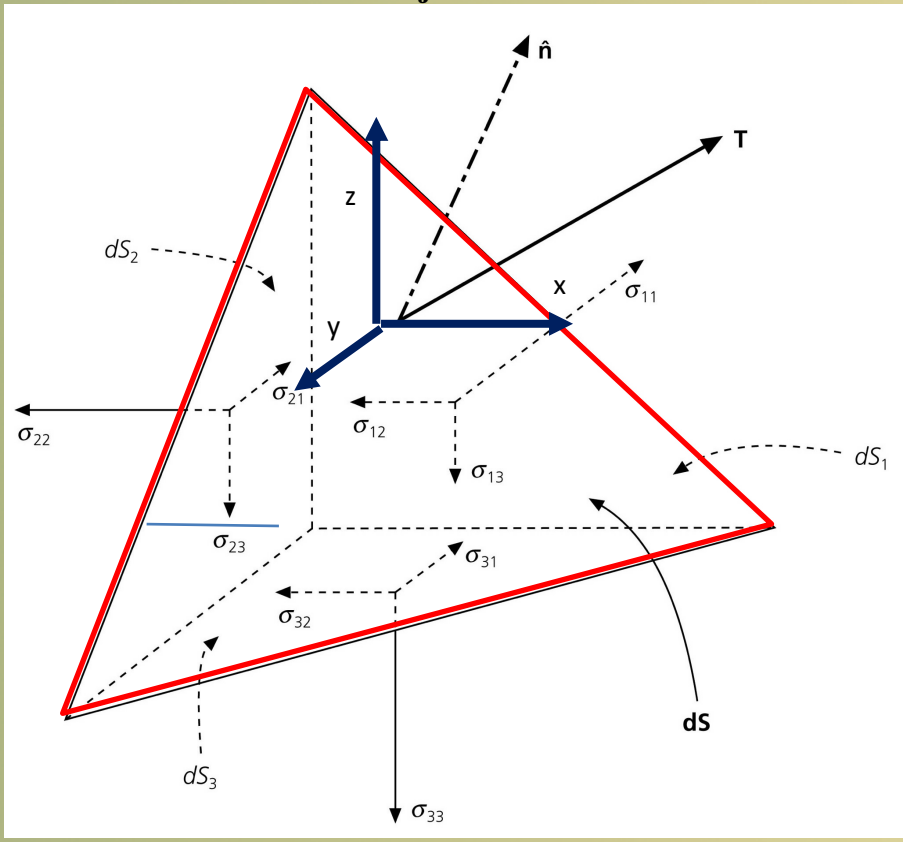
$$T_i = \sigma_{1i} n_1 + \sigma_{2i} n_2 + \sigma_{3i} n_3 = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ji} n_j = \sigma_{ji} n_j$$

Esto nos da cada componente de ***T , i = 1…3***

Notar que es la transpuesta de $\sigma_{ij,}$ pero como es simétrico, no importa

$$T_1 = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2 + \sigma_{31} n_3$$
$$T_2 = \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{32} n_3$$
$$T_3 = \sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 + \sigma_{33} n_3$$

Componentes de esfuerzo que se ejerce en las caras de un tetraedro orientado con los ejes coordenados.



l,m,n cosenos directores del plano ds

$$\vec{\sigma} = \overrightarrow{n} \cdot [T]$$

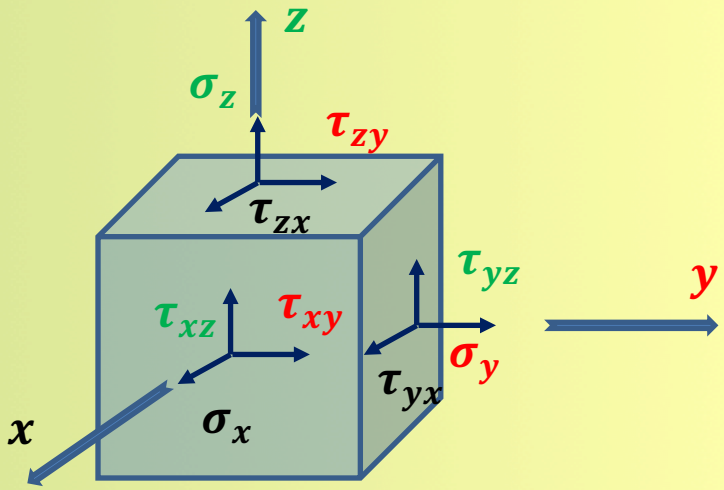
$$\begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix}_{xyz} = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

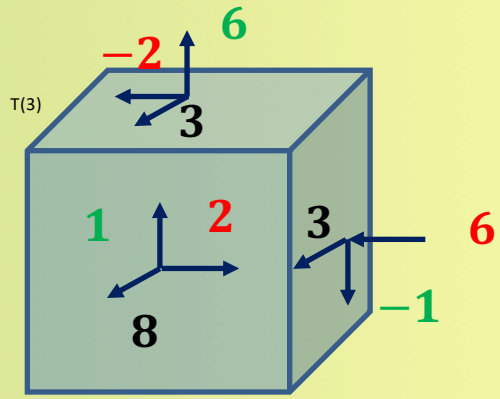
Tensor de Cauchy

Ejemplos

Representar el siguiente vector de tensiones

$$[T]_{xyz} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & -1 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

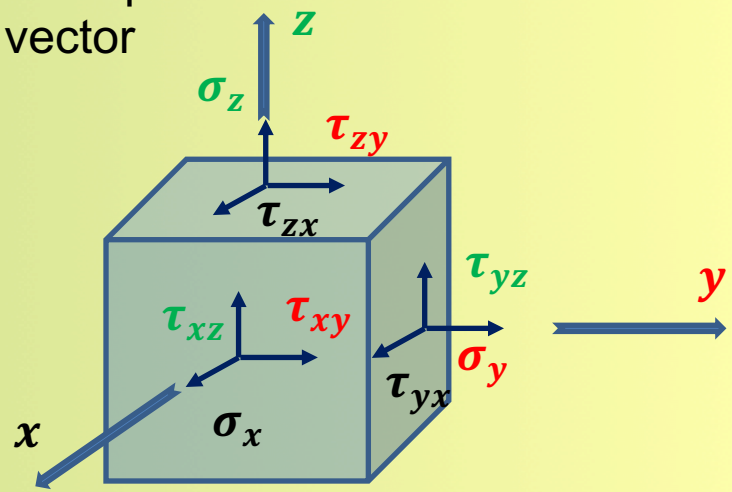


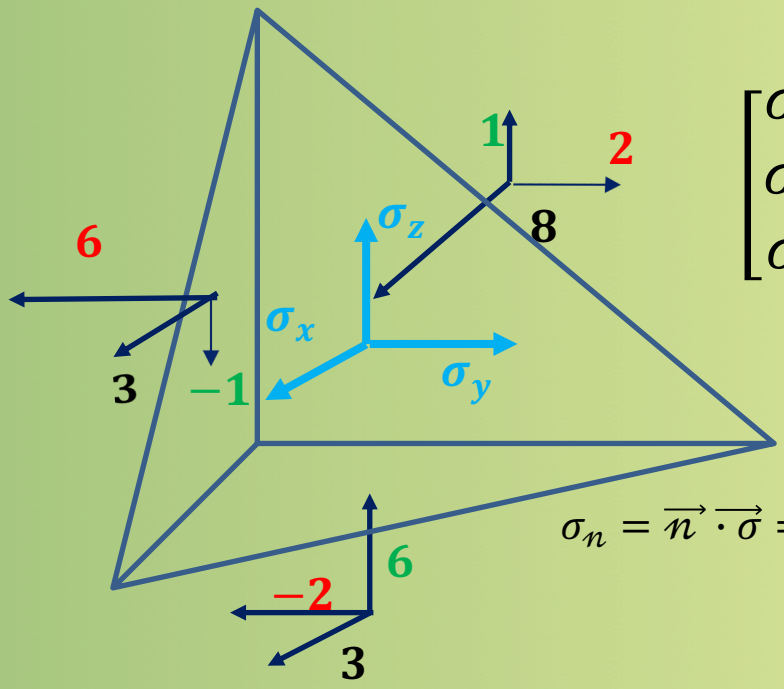


Ejemplos

Determinar el valor de las tensiones normal y tangencial que actúan en un punto contenido en un plano, cuyo vector unitario $\vec{u} = \frac{1}{2}(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$

$$[T]_{xyz} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & -1 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix} \text{ en MPa}$$





$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & -1 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = 1/2 \cdot \begin{bmatrix} 11 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{\sigma} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \cdot 1/2 \cdot \begin{bmatrix} 11 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix} = 1/4\,(11 - 4 + 7) = 14/4 = 3{,}5\ MPa$$

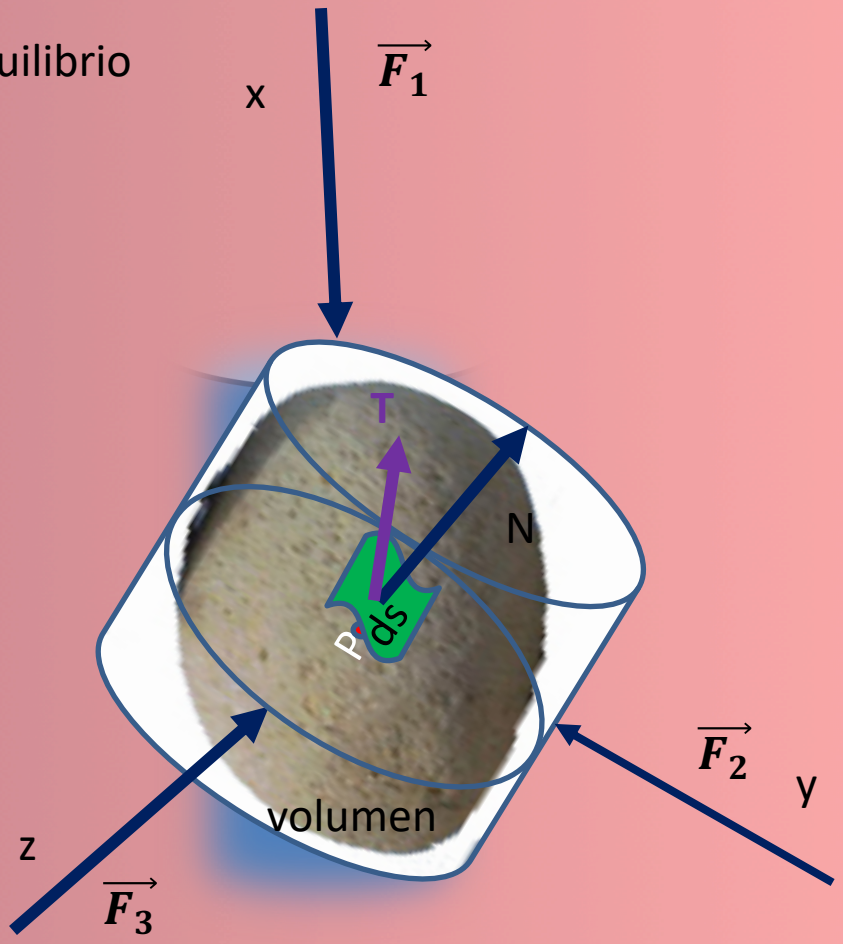
$$\tau = \sqrt[2]{|\vec{\sigma}|^2 - \sigma_n{}^2} = \sqrt[2]{(46{,}5 - 12{,}25)} = 5{,}85\ MPa$$

Ecuaciones de equilibrio

Sólido rígido en equilibrio

$$\sum_i \overrightarrow{F_i} = 0$$

$$\sum_i \overrightarrow{M_i} = 0$$

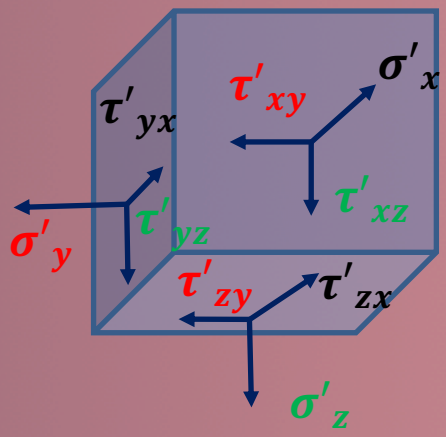


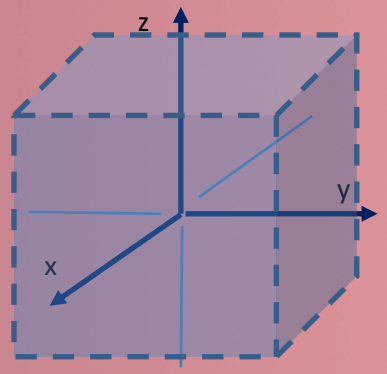
Tensor de tesiones de Cauchy

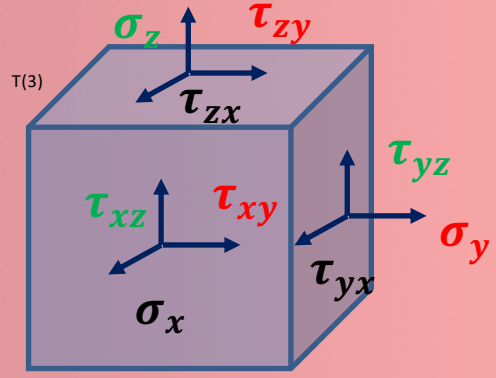
$$\begin{bmatrix} \sigma_x^T \\ \sigma_y^T \\ \sigma_z^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Para conocer las condiciones de equilibrio en un punto del sólido tenemos:

Queremos conocer las condiciones de equilibrio en todos los puntos del sólido







Queremos conocer los lugares más débiles del sólido para esas tensiones

Ecuaciones de equilibrio

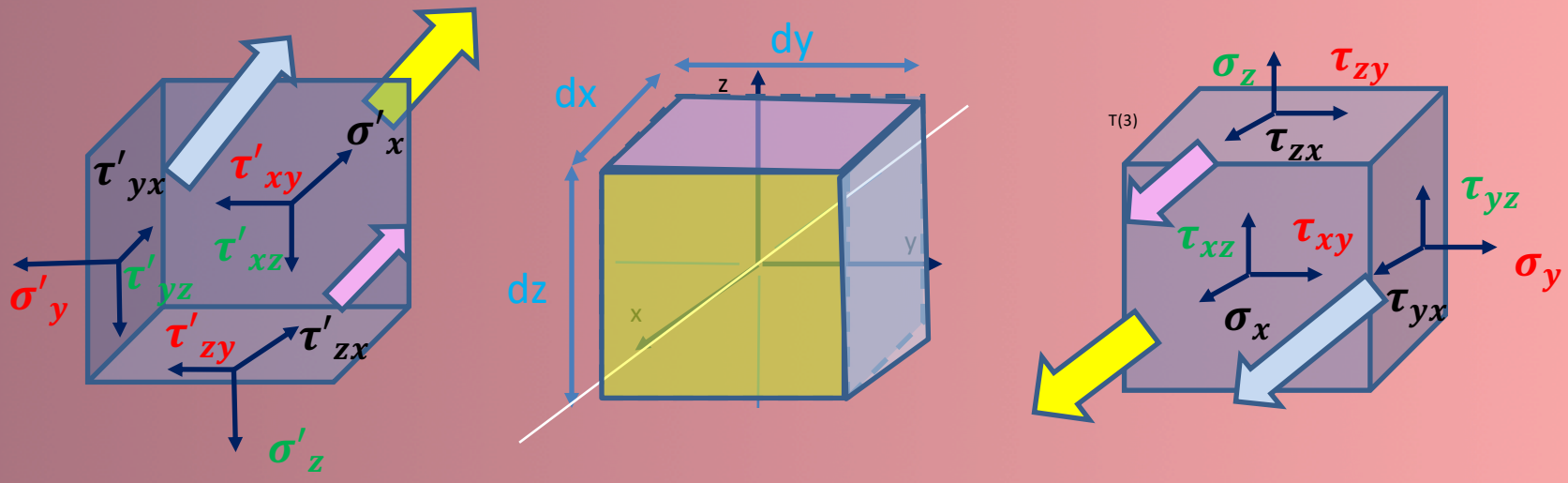
$$\sigma_x = \sigma_x(X,Y,Z)$$
$$\sigma_y = \sigma_y(X,Y,Z)$$
$$\sigma_z = \sigma_z(X,Y,Z)$$
$$\tau_{xy} = \tau_{xy}(X,Y,Z)$$
$$\tau_{xz} = \tau_{xz}(X,Y,Z)$$
$$\tau_{yz} = \tau_{yz}(X,Y,Z)$$

Tomamos los seis componentes del tensor en equilibro y definimos una función que depende de las tres coordenadas cartesianas (X,Y,Z); aportando diferentes valores en función de estas coordenadas.

Esta funciones tienen que cumplir las ecuaciones de equilibrio

Tensor de tesiones de Cauchy

$$\begin{bmatrix}\sigma_x^T\\ \sigma_y^T\\ \sigma_z^T\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}l\\ m\\ n\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{bmatrix}$$



Ecuaciones de equilibrio

La condición de equilibrio es que tiene que haber equilibrio tanto con las fuerzas de volumen f_v y las fuerzas de superficie f_s

$$f_v = \left(X \cdot \vec{\imath} + Y \cdot \vec{\jmath} + Z \cdot \vec{k}\right)$$

Comencemos con las fuerzas de volumen f_v .

Las fuerzas de volumen en función de los tres ejes cartesianos.

Comencemos con las que actúan el eje X

$$\sum_i \overrightarrow{F_i} = 0 \quad X\left(d_x d_y d_z\right) + \left(\sigma'_x - \sigma_x\right)\left(d_y d_z\right) + \left(\tau'_{yx} - \tau_{yx}\right)\left(d_x d_z\right) + \left(\tau'_{zx} - \tau_{zx}\right)\left(d_x d_y\right) = 0$$

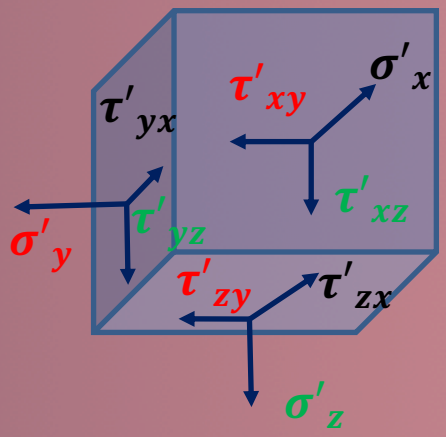
Las fuerzas de volumen en la dirección del eje X tiene que compensarse con las tensiones

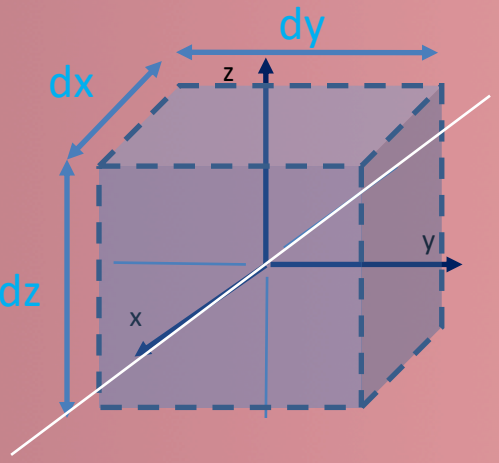
Tensor de tesiones de Cauchy

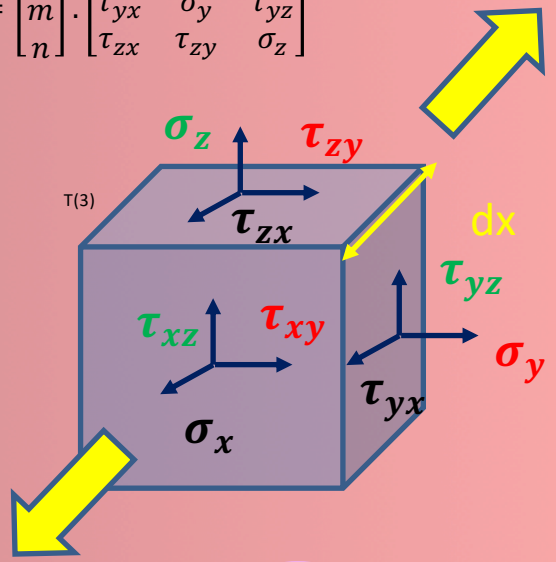
$$\begin{bmatrix}\sigma_x^T\\ \sigma_y^T\\ \sigma_z^T\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}l\\ m\\ n\end{bmatrix} . \begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{bmatrix}$$

Ecuaciones de equilibrio

$$f_v = \left(X \cdot \vec{i} + Y \cdot \vec{j} + Z \cdot \vec{k}\right)$$







$$\sum_i \vec{F_i} = 0 \quad X\left(d_x d_y d_z\right) + \left(\sigma'_x - \sigma_x\right)\left(d_y d_z\right) + \left(\tau'_{yx} - \tau_{yx}\right)\left(d_x d_z\right) + \left(\tau'_{zx} - \tau_{zx}\right)\left(d_x d_y\right) = 0$$

$$\left(\sigma'_x - \sigma_x\right) = \frac{\partial_{\sigma_x}}{\partial_x} d_x \qquad \left(\tau'_{yx} - \tau_{yx}\right) = \frac{\partial_{\tau_{yx}}}{\partial_y} d_y \qquad \left(\tau'_{zx} - \tau_{zx}\right) = \frac{\partial_{\tau_{zx}}}{\partial_z} d_z$$

Volumen del sólido

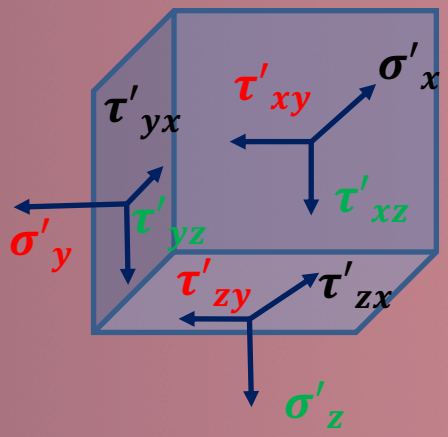
$$X\left(d_x d_y d_z\right) + \frac{\partial_{\sigma_x}}{\partial_x} d_x \left(d_y d_z\right) + \frac{\partial_{\tau_{yx}}}{\partial_y} d_y \left(d_x d_z\right) + \frac{\partial_{\tau_{zx}}}{\partial_z} d_z \left(d_x d_y\right) = 0$$

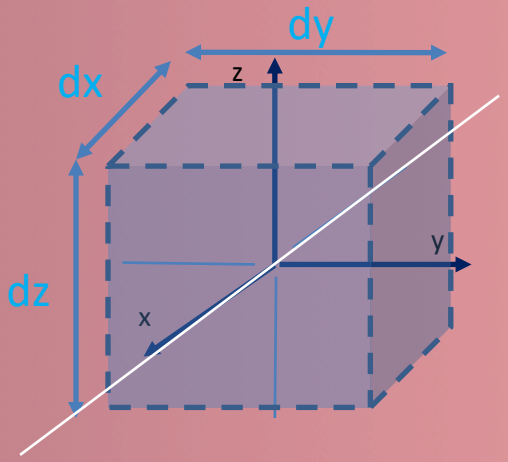
Tensor de tesiones de Cauchy

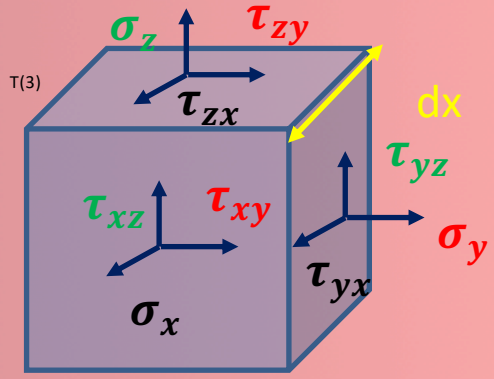
$$\begin{bmatrix}\sigma_x^T\\ \sigma_y^T\\ \sigma_z^T\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}l\\ m\\ n\end{bmatrix} . \begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{bmatrix}$$

Ecuaciones de equilibrio

$$f_v = \left(X \cdot \vec{\imath} + Y \cdot \vec{\jmath} + Z \cdot \vec{k}\right)$$







$$X(d_x d_y d_z) + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} d_x(d_y d_z) + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} d_y(d_x d_z) + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} d_z(d_x d_y) = 0$$

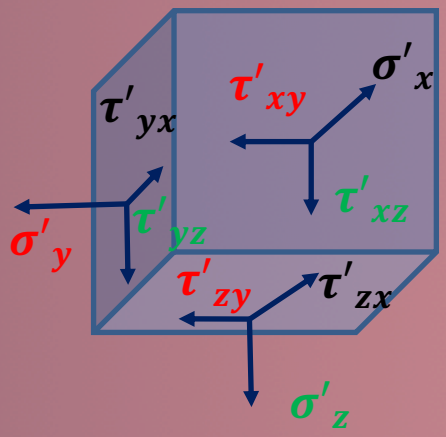
$$X + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0$$

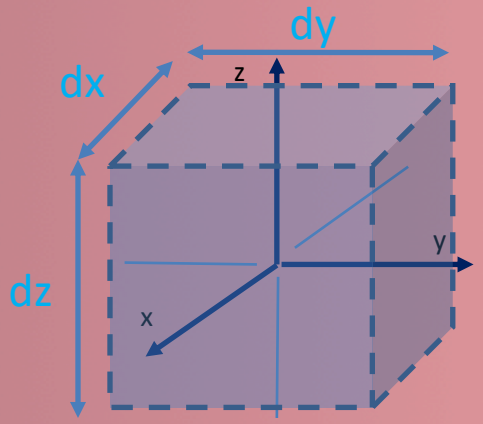
Tensor de tesiones de Cauchy

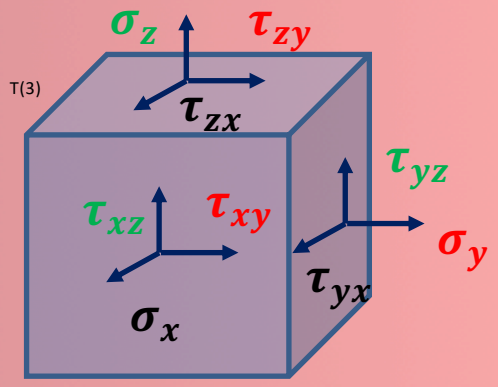
$$\begin{bmatrix} \sigma_x^T \\ \sigma_y^T \\ \sigma_z^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Ecuaciones de equilibrio

$$f_v = \left(X \cdot \vec{\imath} + Y \cdot \vec{\jmath} + Z \cdot \vec{k}\right)$$







Ecuaciones de equilibrio

$$X + \frac{\partial_{\sigma_x}}{\partial_x} + \frac{\partial_{\tau_{yx}}}{\partial_y} + \frac{\partial_{\tau_{zx}}}{\partial_z} = 0$$

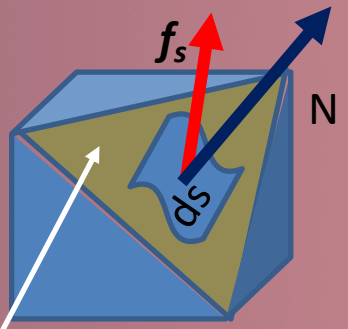
$$Y + \frac{\partial_{\tau_{xy}}}{\partial_x} + \frac{\partial_{\sigma_y}}{\partial_y} + \frac{\partial_{\tau_{yz}}}{\partial_z} = 0$$

$$Z + \frac{\partial_{\tau_{zx}}}{\partial_x} + \frac{\partial_{\tau_{zy}}}{\partial_y} + \frac{\partial_{\sigma_z}}{\partial_z} = 0$$

Estas tres ecuaciones son tres ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer orden

Pero no bastan para la determinación de las componentes del tensor de tensiones

Y ahora con las fuerzas de superficie f_s

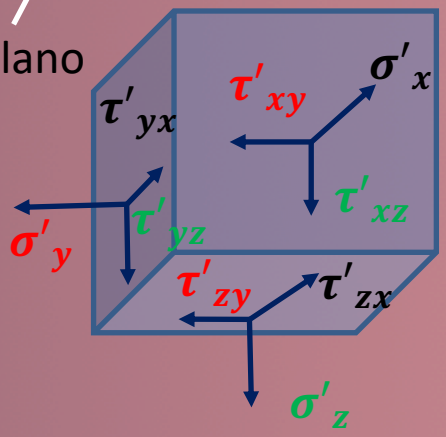


$$\vec{n} = i\vec{l} + j\vec{m} + k\vec{n}$$

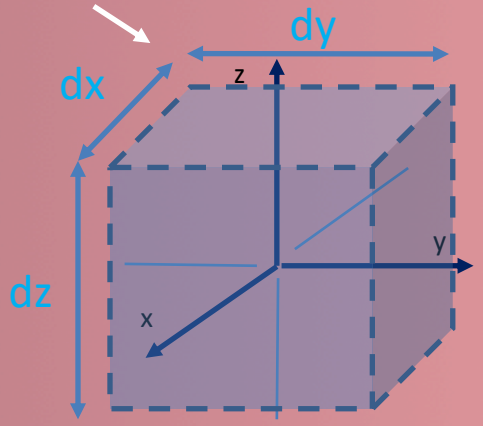
Tensor de tesiones de Cauchy

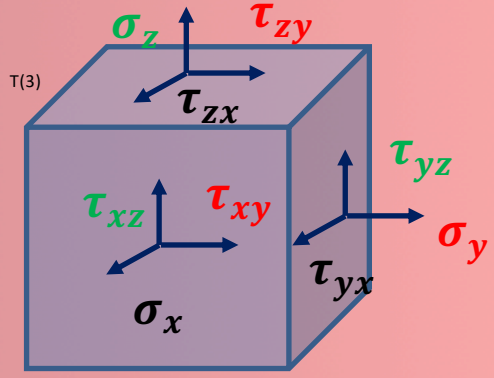
$$\begin{bmatrix} \sigma_x^T \\ \sigma_y^T \\ \sigma_z^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Plano



Elemento infinitesimal





Ecuaciones de equilibrio

fuerzas de superficie f_s

$$f_s = \left(f_x \cdot \vec{i} + f_y \cdot \vec{j} + f_z \cdot \vec{k}\right)$$

$$\vec{\sigma} = \vec{f}$$

$$\vec{f} = [T]\vec{n}$$

El vector fuerza tiene que estar en equilibro con el vector tensor

$$f_x = l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xy}$$

$$f_y = l\tau_{yx} + m\sigma_y + n\tau_{yz}$$

$$f_z = l\tau_{zx} + m\tau_{zy} + n\sigma_z$$

Cambios de sistemas de referencia

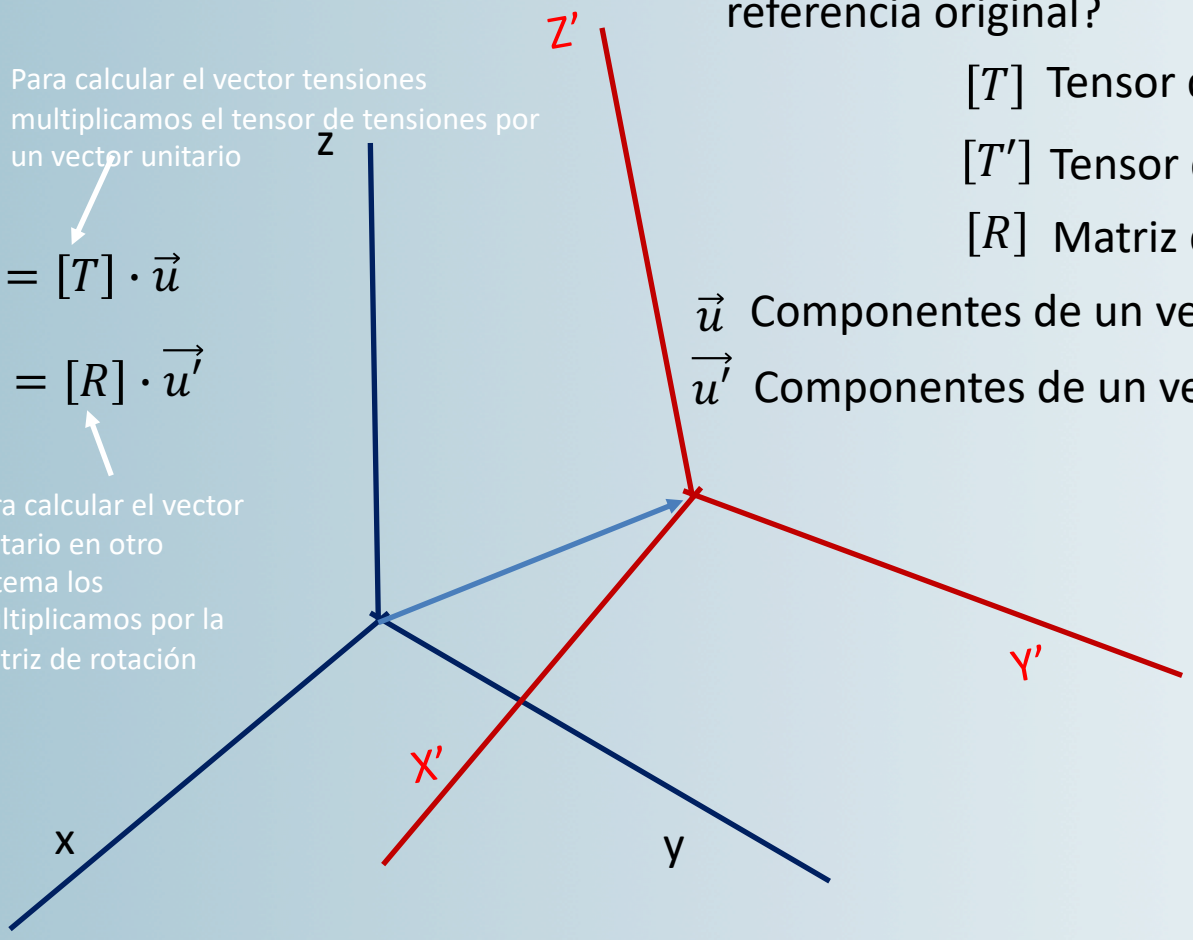
¿Cómo expresar el tensor de tensiones en otros ejes diferentes al sistema de referencia original?

Para calcular el vector tensiones multiplicamos el tensor de tensiones por un vector unitario

$$\vec{\sigma} = [T] \cdot \vec{u}$$

$$\vec{u} = [R] \cdot \overrightarrow{u'}$$

Para calcular el vector unitario en otro sistema los multiplicamos por la matriz de rotación



$[T]$ Tensor de tensiones referido a $P_{X,Y,Z}$

$[T']$ Tensor de tensiones referido a $P_{X',Y',Z'}$

$[R]$ Matriz de cambio de ejes

$\vec{u}$ Componentes de un vector unitario respecto a $P_{X,Y,Z}$

$\overrightarrow{u'}$ Componentes de un vector unitario respecto a $P_{X',Y',Z'}$

$[T]$ ⇓ $[T']$?

Cambios de sistemas de referencia

$\left[\overrightarrow{\sigma'}\right] = [T'] \cdot \left[\overrightarrow{u'}\right]$ En el nuevo sistema de referencia

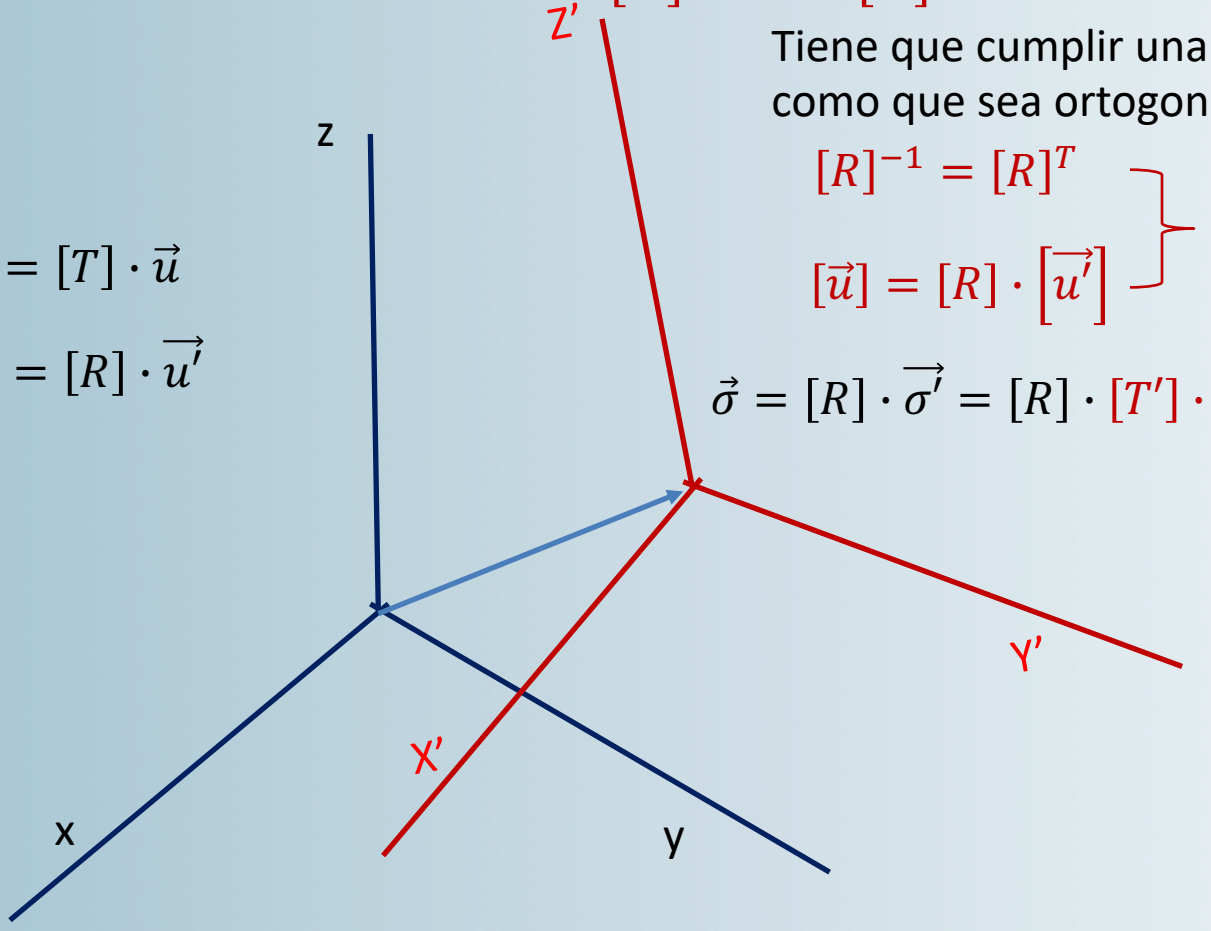
Tiene que cumplir una serie de requisitos como que sea ortogonal

$$[R]^{-1} = [R]^T$$
$$[\vec{u}] = [R] \cdot \left[\overrightarrow{u'}\right]$$
$$\Big\} \left[\overrightarrow{u'}\right] = [R]^T \cdot [\vec{u}]$$

$\vec{\sigma} = [T] \cdot \vec{u}$

$\vec{u} = [R] \cdot \overrightarrow{u'}$

$$\vec{\sigma} = [R] \cdot \overrightarrow{\sigma'} = [R] \cdot [T'] \cdot \left[\overrightarrow{u'}\right] = \underbrace{[R] \cdot [T'] \cdot [R]^T}_{[T]} \cdot [\vec{u}]$$



$$[T] = [R] \cdot [T'] \cdot [R]^T$$
$$[T'] = [R]^T \cdot [T] \cdot [R]$$

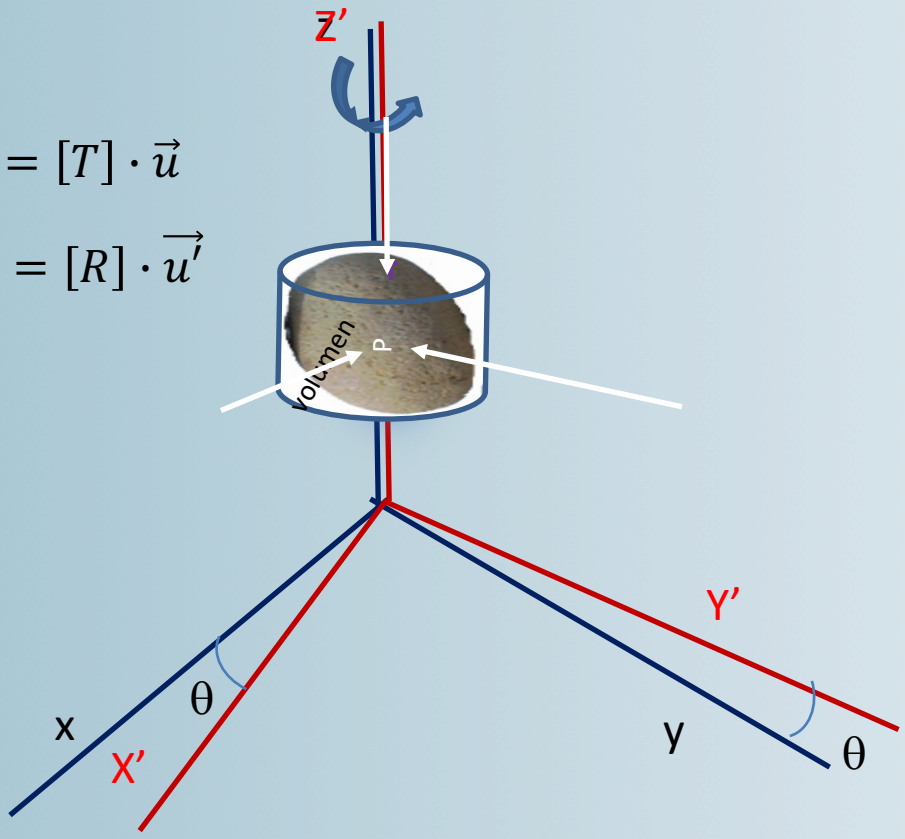
Cambios de sistemas de referencia

Supongamos que el tensor de tensiones obtenido en un sistema X, Y, Z, lo queremos expresar en un sistema de referencia nuevo X', Y', Z', llevando a cabo una rotación θ en el eje Z, que afecta al eje X e Y. La matriz de rotación es:

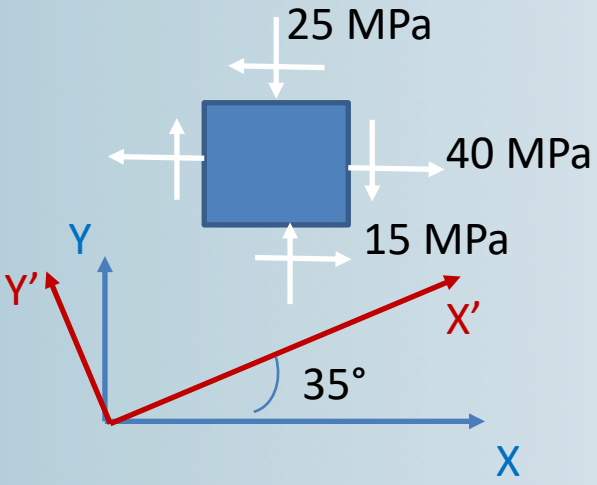
$$[R] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\vec{\sigma} = [T] \cdot \vec{u}$$

$$\vec{u} = [R] \cdot \overrightarrow{u'}$$



Cambios de sistemas de referencia



$$\vec{\sigma} = [T] \cdot \vec{u}$$

$$\vec{u} = [R] \cdot \overrightarrow{u'}$$

Dibujar el tensor de tensiones

$$[T] = \begin{bmatrix} 40 & -15 \\ -15 & -25 \end{bmatrix} MPa$$

Para girarlo al nuevo sistema utilizamos esta matriz

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos 35 & -\sin 35 \\ \sin 35 & \cos 35 \end{bmatrix}$$

$$[T] = [R] \cdot [T'] \cdot [R]^T$$

$$[T'] = [R]^T \cdot [T] \cdot [R]$$

Dibujar el tensor de tensiones en el nuevo sistema

$$[T'] = ?$$

$$[T'] = [R]^T \cdot [T] \cdot [R]$$

$$[T'] = \begin{bmatrix} 4{,}52 & -35{,}67 \\ -35{,}67 & 10{,}48 \end{bmatrix}$$

Este tensor define el nuevo estado tensional en otro eje

Solución:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0.8191 & 0.5735 \\ -0.5735 & 0.8191 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 & -15 \\ -15 & -25 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 24.1615 & -26.624 \\ -35.2265 & -11.875 \end{pmatrix}$$

Los componentes de la matriz **C** se calculan del modo siguiente:

$C_{1,1} = A_{1,1} \cdot B_{1,1} + A_{1,2} \cdot B_{2,1} =$
$= (0.8191) \cdot 40 + (0.5735) \cdot (-15) = (32.764) + (-8.6025) = 24.1615$

$C_{1,2} = A_{1,1} \cdot B_{1,2} + A_{1,2} \cdot B_{2,2} =$
$= (0.8191) \cdot (-15) + (0.5735) \cdot (-25) = (-12.2865) + (-14.3375) = -26.624$

$C_{2,1} = A_{2,1} \cdot B_{1,1} + A_{2,2} \cdot B_{2,1} =$
$= (-0.5735) \cdot 40 + (0.8191) \cdot (-15) = (-22.94) + (-12.2865) = -35.2265$

$C_{2,2} = A_{2,1} \cdot B_{1,2} + A_{2,2} \cdot B_{2,2} =$
$= (-0.5735) \cdot (-15) + (0.8191) \cdot (-25) = (8.6025) + (-20.4775) = -11.875$

OnlineMSchool.com

Solución:

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 0.8191 & 0.5735 \\ -0.5735 & 0.8191 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 40 & -15 \\ -15 & -25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24.1615 & -26.624 \\ -35.2265 & -11.875 \end{pmatrix}$$

Los componentes de la matriz C se calculan del modo siguiente:

$C_{1,1} = A_{1,1} \cdot B_{1,1} + A_{1,2} \cdot B_{2,1} =$

$= (0.8191) \cdot 40 + (0.5735) \cdot (-15) = (32.764) + (-8.6025) = 24.1615$

$C_{1,2} = A_{1,1} \cdot B_{1,2} + A_{1,2} \cdot B_{2,2} =$

$= (0.8191) \cdot (-15) + (0.5735) \cdot (-25) = (-12.2865) + (-14.3375) = -26.624$

$C_{2,1} = A_{2,1} \cdot B_{1,1} + A_{2,2} \cdot B_{2,1} =$

$= (-0.5735) \cdot 40 + (0.8191) \cdot (-15) = (-22.94) + (-12.2865) = -35.2265$

$C_{2,2} = A_{2,1} \cdot B_{1,2} + A_{2,2} \cdot B_{2,2} =$

$= (-0.5735) \cdot (-15) + (0.8191) \cdot (-25) = (8.6025) + (-20.4775) = -11.875$

Solución:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 24.162 & -26.624 \\ -35.227 & -11.875 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.8191 & -0.5735 \\ 0.5735 & 0.8191 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4.5222302 & -35.6646254 \\ -35.6647482 & 10.475872 \end{pmatrix}$$

Los componentes de la matriz **C** se calculan del modo siguiente:

$C_{1,1} = A_{1,1} \cdot B_{1,1} + A_{1,2} \cdot B_{2,1} =$
$= (24.162) \cdot (0.8191) + (-26.624) \cdot (0.5735) = (19.7910942) + (-15.268864) = 4.5222302$

$C_{1,2} = A_{1,1} \cdot B_{1,2} + A_{1,2} \cdot B_{2,2} =$
$= (24.162) \cdot (-0.5735) + (-26.624) \cdot (0.8191) = (-13.856907) + (-21.8077184) = -35.6646254$

$C_{2,1} = A_{2,1} \cdot B_{1,1} + A_{2,2} \cdot B_{2,1} =$
$= (-35.227) \cdot (0.8191) + (-11.875) \cdot (0.5735) = (-28.8544357) + (-6.8103125) = -35.6647482$

$C_{2,2} = A_{2,1} \cdot B_{1,2} + A_{2,2} \cdot B_{2,2} =$
$= (-35.227) \cdot (-0.5735) + (-11.875) \cdot (0.8191) = (20.2026845) + (-9.7268125) = 10.475872$

OnlineMSchool.com

Solución:

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 24.162 & -26.624 \\ -35.227 & -11.875 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.8191 & -0.5735 \\ 0.5735 & 0.8191 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.5222302 & -35.6646254 \\ -35.6647482 & 10.475872 \end{pmatrix}$$

Los componentes de la matriz C se calculan del modo siguiente:

$C_{1,1} = A_{1,1} \cdot B_{1,1} + A_{1,2} \cdot B_{2,1} =$

$= (24.162) \cdot (0.8191) + (-26.624) \cdot (0.5735) = (19.7910942) + (-15.268864) = 4.5222302$

$C_{1,2} = A_{1,1} \cdot B_{1,2} + A_{1,2} \cdot B_{2,2} =$

$= (24.162) \cdot (-0.5735) + (-26.624) \cdot (0.8191) = (-13.856907) + (-21.8077184) = -35.6646254$

$C_{2,1} = A_{2,1} \cdot B_{1,1} + A_{2,2} \cdot B_{2,1} =$

$= (-35.227) \cdot (0.8191) + (-11.875) \cdot (0.5735) = (-28.8544357) + (-6.8103125) = -35.6647482$

$C_{2,2} = A_{2,1} \cdot B_{1,2} + A_{2,2} \cdot B_{2,2} =$

$= (-35.227) \cdot (-0.5735) + (-11.875) \cdot (0.8191) = (20.2026845) + (-9.7268125) = 10.475872$

Tensiones principales

Como se ha visto dado un punto contenido en un plano existirá un vector tensión con componentes normales y tangenciales.

Pero,…**¿Habrá planos en los que el vector tensión es ortogonal?** Es decir, solo tenemos tensiones normales no tangenciales

$$\vec{\sigma} = [T] \cdot \overrightarrow{n}$$

El vector tensión se obtiene multiplicando el tensor de tensiones por un vector normal, entonces **¿cúal es ese vector normal?** Sin duda será un módulo (escalar σ) multiplicado por el vector normal

$$\vec{\sigma} = \sigma \cdot \overrightarrow{n}$$ **¿Cómo calcular?**

Igualando, el tensor de tensiones multiplicado por el vector unitario es igual a ese escalar multiplicado por el vector unitario

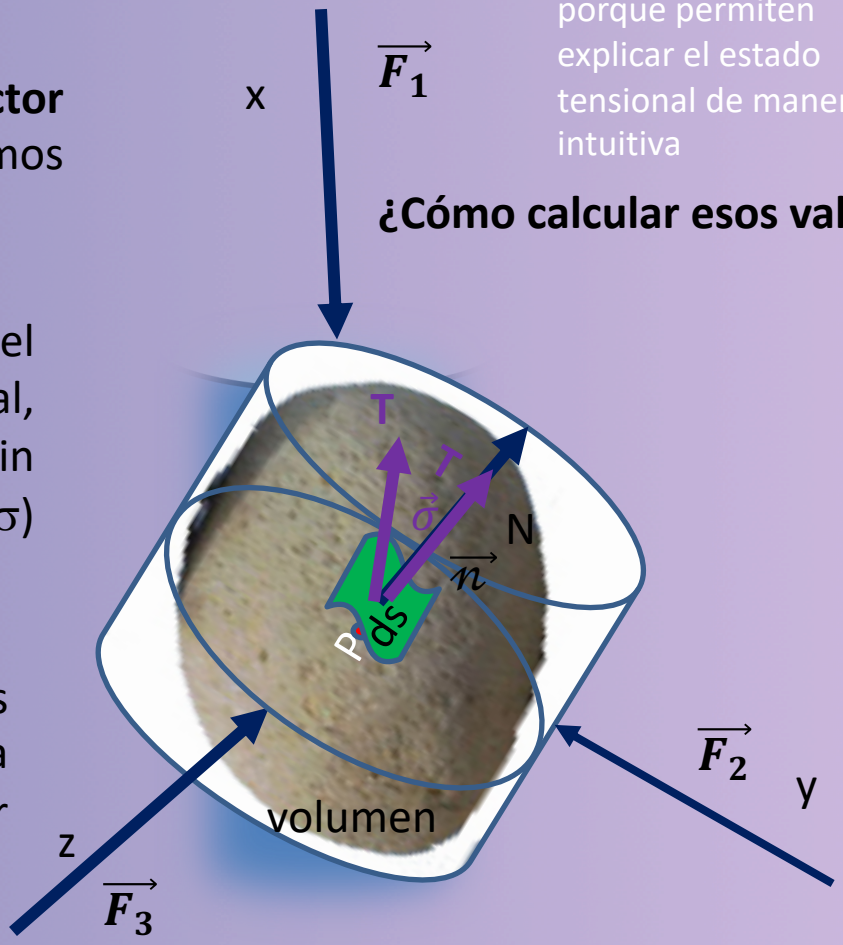
escalar matriz unidad

$$([T] - \sigma[I]) \cdot \overrightarrow{n} = 0$$

La respuesta es SI

Eso es importante porque permiten explicar el estado tensional de manera intuitiva

¿Cómo calcular esos valores?



La expresión del sistema formado es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix} = 0$$

Tres tensiones principales

$\sigma_I, \quad \sigma_{II}, \quad \sigma_{III}$ Son los autovalores, con la propiedad de que son todos reales

Y además

Tres direcciones principales que son vectores unitarios

$\overrightarrow{n_I}, \quad \overrightarrow{n_{II}}, \quad \overrightarrow{n_{III}}$ Son los autovectores, con la propiedad de que son ortogonales, existiendo tres planos perpendiculares en los que las tensiones son normales

Ecuación característica

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$$

No habrá solo un plano a partir del cual habrá un vector tensión que es ortogonal, sino tres planos. Es decir tres direcciones principales con tres valores de las direcciones

Tres tensiones principales

$\sigma_I, \quad \sigma_{II}, \quad \sigma_{III}$

Recordemos de la diapositiva anterior estos tres valores son los autovalores, con la propiedad de que son todos reales

Tres direcciones principales

$\overrightarrow{n_I}, \quad \overrightarrow{n_{II}}, \quad \overrightarrow{n_{III}}$

Recordemos de la diapositiva anterior estos tres vectores son los autovectores, con la propiedad de que son ortogonales, existiendo tres planos perpendiculares en los que las tensiones son normales

Ecuación característica

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$$

invariantes

Los invariantes son independientes del sistema de referencia, es decir, son independientes de cómo se definan los ejes del sistema de referencia

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_x - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{xy}^2$$

$$I_3 = |T|$$

Explicaciones

Se puede cambiar el sistema de referencia pero la suma de los tres valores de la diagonal vale siempre lo mismo

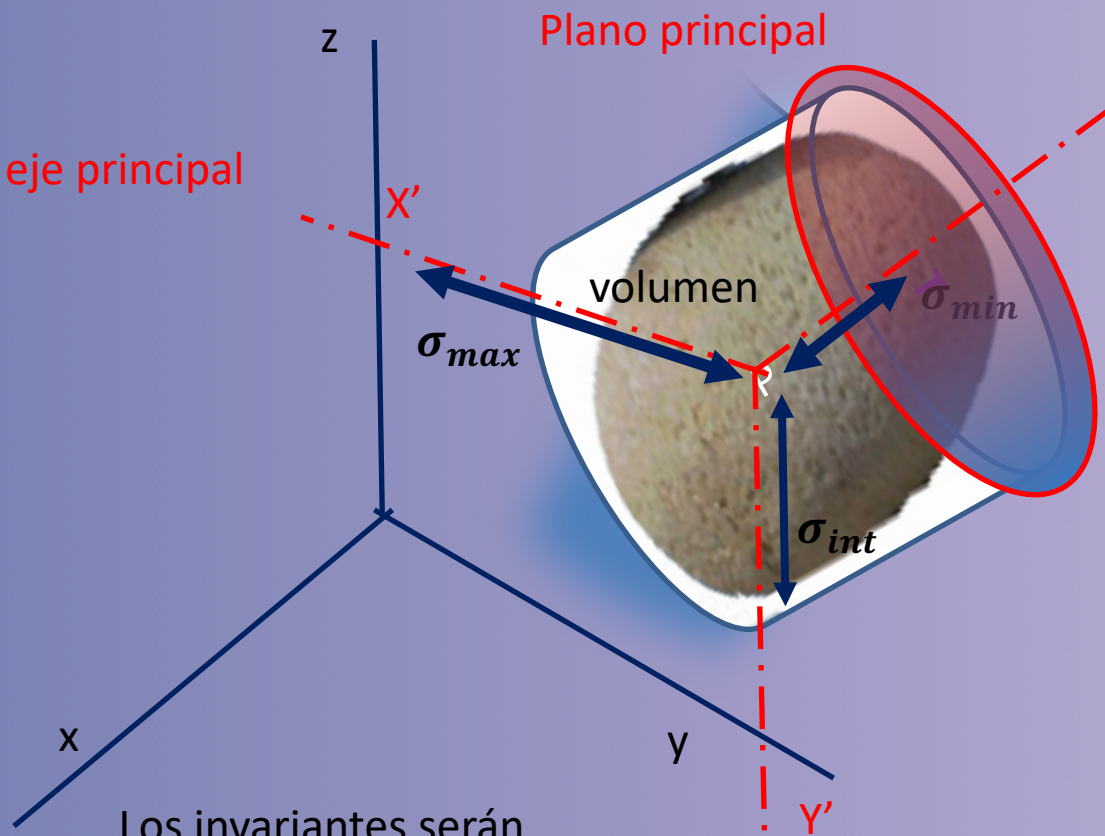
$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

Los productos de los ejes principales menos los cuadrados de la tensiones tangenciales valen lo mismo

$$I_2 = \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_x - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{xy}^2$$

Es el determinante del tensor de tensiones

$$I_3 = |T|$$



$$\sigma_{max} \geq \sigma_{int} \geq \sigma_{min}$$

$$\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$$

Tensor de tensiones

$$\begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{II} \end{pmatrix}$$

Por ser ortogonales

Los invariantes serán

$$I_1 = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}$$

$$I_2 = \sigma_I \cdot \sigma_{II} + \sigma_{II} \cdot \sigma_{III} + \sigma_{III} \cdot \sigma_I - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{xy}^2$$

$$I_3 = \sigma_I \cdot \sigma_{II} \cdot \sigma_{III}$$

Por ser ortogonales

$$I_1 = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}$$

$$I_2 = \sigma_I \cdot \sigma_{II} + \sigma_{II} \cdot \sigma_{III} + \sigma_{III} \cdot \sigma_I$$

$$I_3 = \sigma_I \cdot \sigma_{II} \cdot \sigma_{III}$$

Ejemplo

Calcular:

a) Los dos primeros invariantes del tensor de tensiones
b) Los valores de las tres tensiones principales
c) Los tres vectores unitarios que definen dichas direcciones

$$I_1 = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}$$

$$I_2 = \sigma_I \cdot \sigma_{II} + \sigma_{II} \cdot \sigma_{III} + \sigma_{III} \cdot \sigma_I - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{xy}^2$$

$$I_3 = \sigma_I \cdot \sigma_{II} \cdot \sigma_{III}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 50 & -20 & 0 \\ -20 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = 50 + 20 = 70$$

$$I_2 = 50 \cdot 20 - 20^2 = 600$$

$$I_3 = 0$$

Los valores de las tensiones principales
Se calculan mediante los autovalores

$$[T] = \begin{bmatrix} 50 & -20 & 0 \\ -20 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad |T - \sigma I| = 0$$

porque las componentes tangenciales son cero

Uno de los autovalores es cero $\sigma_{III} = 0$

Cómo se calcula el resto de los autovalores
A los componentes dela diagonal se le resta $-\sigma$
Y El determinante de esta matriz

$$\begin{vmatrix} 50 - \sigma & -20 \\ -20 & 20 - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$(50 - \sigma) \cdot (20 - \sigma) - (-20^2) = 0$$

$$(\sigma^2 - 70\sigma + 1000) \cdot -(400) = 0$$

$$\sigma^2 - 70\sigma + 600 = 0 \quad \sigma = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \sigma = \frac{70 \pm \sqrt{4900 - 2400}}{2} \quad \sigma = \frac{70 \pm 50}{2} =$$

$$\sigma_I = 60$$

$$\sigma_{II} = 10$$

Ejemplo

Calcular:

a) Los dos primeros invariantes del tensor de tensiones
b) Los valores de las tres tensiones principales
c) Los tres vectores unitarios que definen dichas direcciones

$$I_1 = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}$$

$$I_2 = \sigma_I \cdot \sigma_{II} + \sigma_{II} \cdot \sigma_{III} + \sigma_{III} \cdot \sigma_I - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{xy}^2$$

$$I_3 = \sigma_I \cdot \sigma_{II} \cdot \sigma_{III}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 50 & -20 & 0 \\ -20 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$I_1 = 70$
$I_2 = 600$
$I_3 = 0$

$\sigma_I = 60$
$\sigma_{II} = 10$
$\sigma_{III} = 0$

Ahora ordenamos los autovalores de mayor a menor

Las direcciones principales

La dirección principal 3: **es z**

Un autovalor es cero que corresponde con la dirección z

$$\overrightarrow{u_3} = \vec{k} = (0,0,1)$$

Coincide con la dirección z

El vector unitario que va en la dirección Z es la dirección principal 3

Para los otros dos vectores unitarios obtenemos los valores de los autovectores. Para ello nos quedamos con una matriz 2x2 a la que a los valores de la diagonal restamos los valor de los autovectores restantes (σ max. o med.) y que multiplicamos por un vector (a_1, a_2) que son las componentes de los autovectores e igualamos todo a 0

Dirección 1 $\begin{vmatrix} 50-60 & -20 \\ -20 & 20-60 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ $\begin{vmatrix} -10 & -20 \\ -20 & -40 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$-10a_1 \quad -20a_2 = 0$
$-20a_1 \quad -40a_2 = 0$

y $a_1^2 + a_2^2 = 1$ $\overrightarrow{u_1} = 0{,}8943\vec{\imath} - 0{,}4473\vec{\jmath}$

Dirección 2 $\begin{vmatrix} 50-10 & -20 \\ -20 & 20-10 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ $\begin{vmatrix} 40 & -20 \\ -20 & 10 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$\overrightarrow{u_2} = 0{,}4473\vec{\imath} - 0{,}8943\vec{\jmath}$

El tensor de Cauchy

Principio de Cauchy

Principio fue enunciado por Augustin Louis Cauchy (1789-1857),

Sea $\boldsymbol{B}$, *un medio continuo deformado, entonces en cada subdominio* $\boldsymbol{V} \subset \boldsymbol{B}$, *existe un campo vectorial t, llamado campo de tensiones, tal que las fuerzas de volumen* $f \in \mathbb{R}^3$ *y el campo de tensiones* $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^3$ *satisfacen las siguientes ecuaciones de equilibrio*

$$\int_v f(\boldsymbol{x})dV + \int_{\partial V} t\,(\boldsymbol{x}, n)dA = 0$$

$$\int_V \boldsymbol{x} \times f(\boldsymbol{x})dV + \int_{\partial V} \boldsymbol{x} \times t(\boldsymbol{x}, n)dA = 0$$

en su forma más general, su principio basado en las ideas de Leonhard Euler (que había hecho una formulación menos general), desarrolla un principio a partir de la demostración de un teorema para el tensor de tensión. En principio de Cauchy se fundamenta en que el tensor equivale a la existencia de una aplicación lineal, $\boldsymbol{T} \in \boldsymbol{C}^1(\boldsymbol{B}, \mathbb{R}^3)$ con las siguientes propiedades:

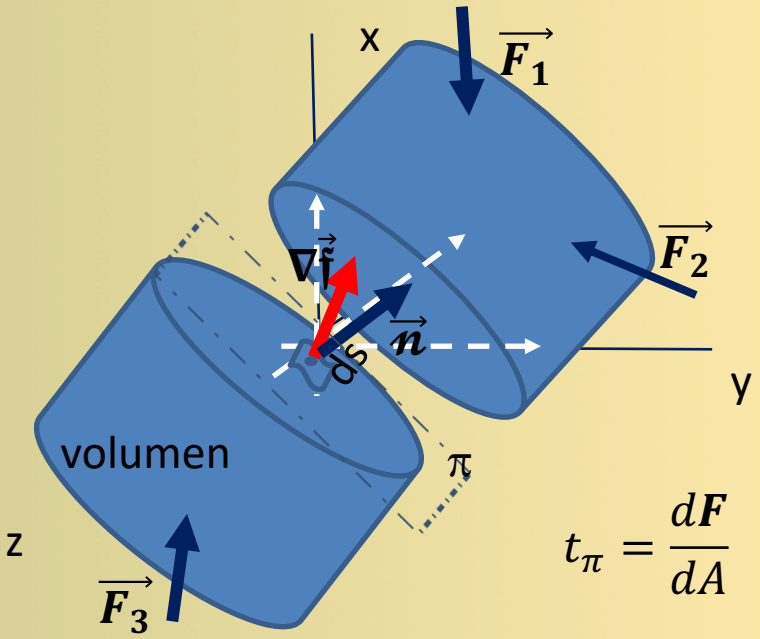
1. $t(\boldsymbol{x}, n) = [T(\boldsymbol{x})](n)$,
2. $div\, T(\boldsymbol{x}) + f_{(\boldsymbol{x})} = 0$,
3. $T(\boldsymbol{x}) = T^T(\boldsymbol{x})$

La descripción de la aplicación del tensor de Cauchy puede hacerse usando los esquemas anteriores, dentro del sólido deformable escogido anteriormente. Dicho sólido está sometido a tensión, y debido a ésta ha sido cortado por el plano imaginario π.

Sobre una de sus caras del sólido, hay un punto concreto. Sobre dicho punto existe un vector tensión t_π que depende del estado tensional interno del cuerpo, de las coordenadas del punto escogido y del vector unitario normal n_π al plano π definida mediante el tensor tensión:

$$\boldsymbol{t}_\pi = T(\boldsymbol{n}_\pi)$$

Usualmente ese vector puede descomponerse en dos componentes que físicamente producen efectos diferentes según el material sea más dúctil o más frágil. Esas dos componentes se llaman componentes intrínsecas del vector tensión respecto al plano π y se llaman **tensión normal** o perpendicular al plano y **tensión tangencial** o rasante al plano, estas componentes vienen dadas por: $\begin{cases} \sigma_\pi = \boldsymbol{t}_\pi \cdot \boldsymbol{n}_\pi \\ \tau_\pi = \| \boldsymbol{t}_\pi \times \boldsymbol{n}_\pi \| \end{cases} \Longrightarrow \| \boldsymbol{t}_\pi \|^2 = \sigma_\pi^2 + \tau_\pi^2$

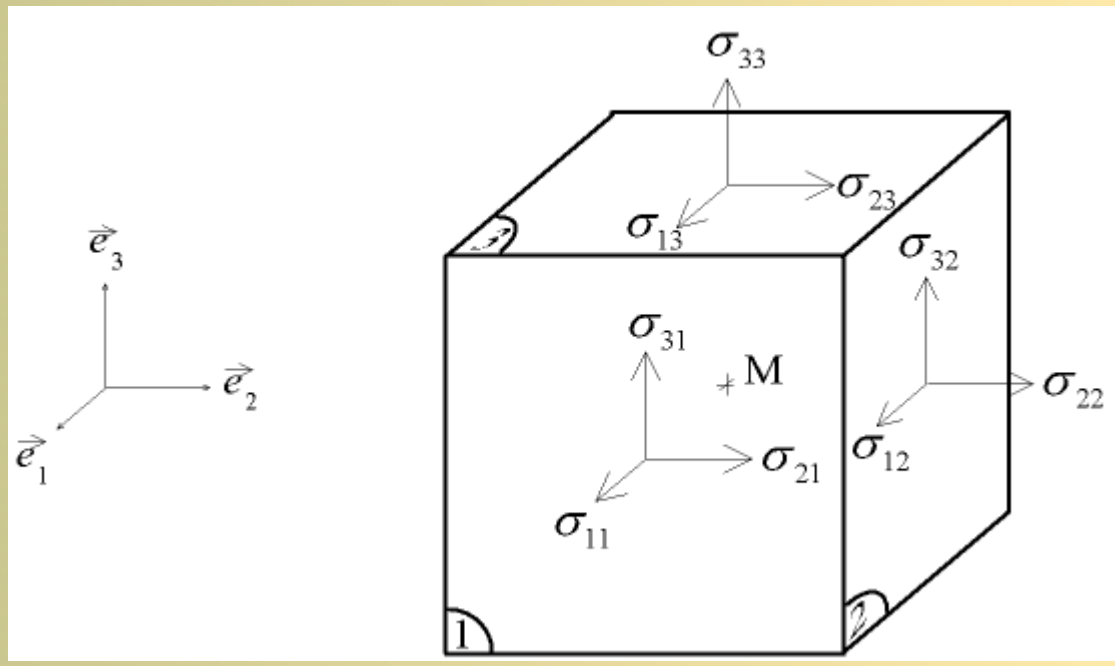


Análogamente cuando existen dos **sólidos en contacto** y se examinan las tensiones entre dos puntos de los dos sólidos, se puede hacer la descomposición anterior de la tensión de contacto según el plano tangente a las superficies de ambos sólidos, en ese caso la tensión normal tiene que ver con la presión perpendicular a la superficie y la tensión tangencial tiene que ver con las fuerzas de fricción entre ambos.

Tensor de Cauchy

El teorema de Cauchy sobre las tensiones de un cuerpo, establece que dada una distribución de tensiones internas sobre la geometría de un medio continuo deformado, que satisfaga las condiciones del principio de Cauchy existe un campo tensorial ***T*** simétrico definido sobre la geometría deformada con las siguientes propiedades:

$$1..\, t(\boldsymbol{x}, n) = [T_c(\boldsymbol{x})](n),$$
$$2..\, \nabla T_c(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x}) = 0,$$
$$3..\, T_c(\boldsymbol{x}) = T_c^T(\boldsymbol{x})$$

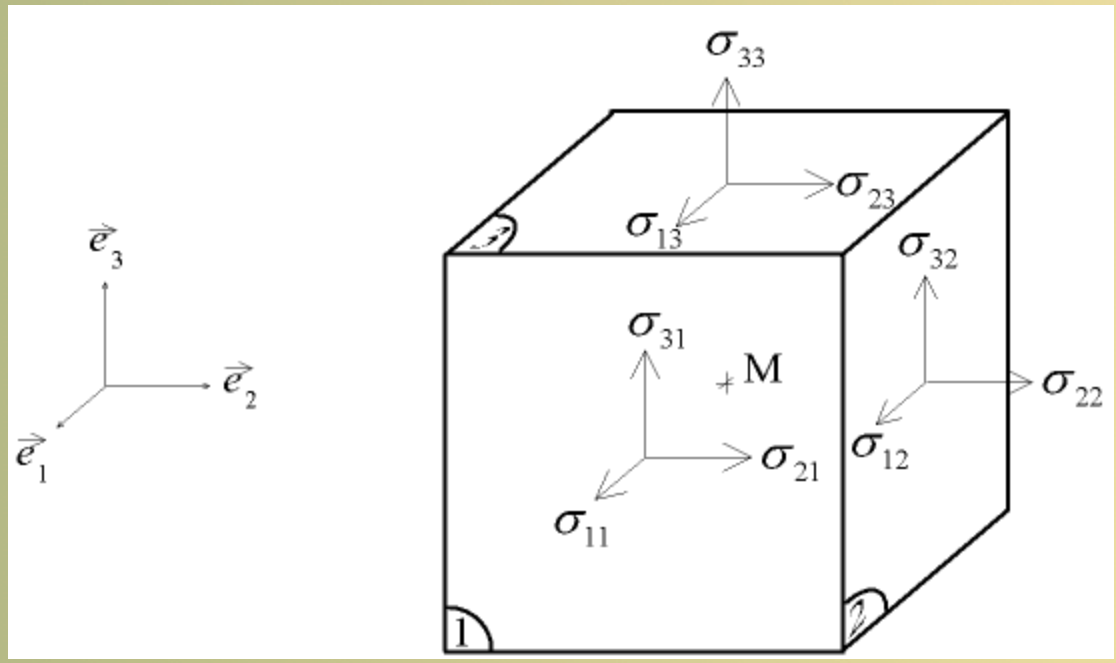


La tercera propiedad significa que este tensor vendrá dado sobre las coordenadas especificadas por una matriz simétrica.

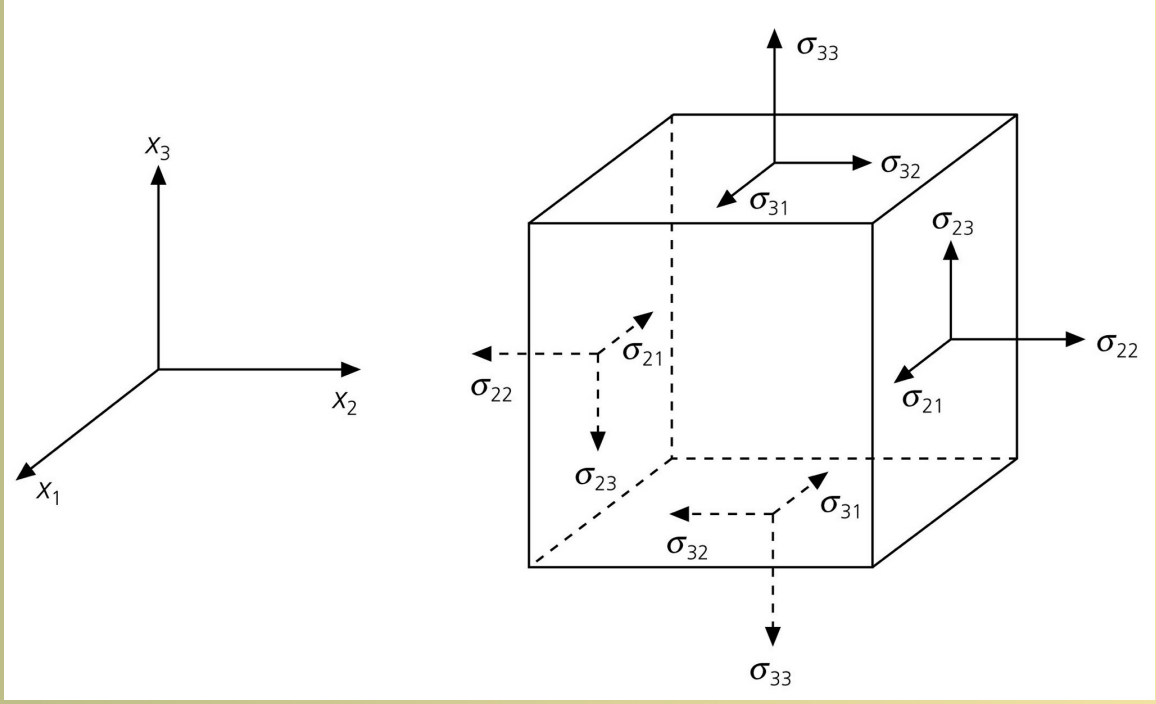
Cabe señalar que en un problema mecánico, a priori, es difícil conocer el tensor tensión de Cauchy, ya que este está definido sobre la geometría del cuerpo una vez deformado, y ésta no es conocida de antemano. Por tanto previamente es necesario encontrar la forma deformada para conocer exactamente el tensor de Cauchy. Sin embargo, cuando las deformaciones son pequeñas, en ingeniería y aplicaciones prácticas se emplea este tensor aunque definido sobre las coordenadas del cuerpo sin deformar (lo cual no conduce a errores de cálculo excesivo si todas las deformaciones máximas son inferiores a 0,01).

Fijado un sistema de referencia ortogonal, el tensor tensión de Cauchy viene dado por una matriz simétrica, cuyas componentes son:

$$[T_c]_{xyz} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{x} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{y} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{z} \end{bmatrix}$$



En resumen



Compomentes de esfuerzo en las caras de un volumen

Esfuerzos normales:

σ_{11}, σ_{22}, σ_{33}

Esfuerzos de corte o cizalla:

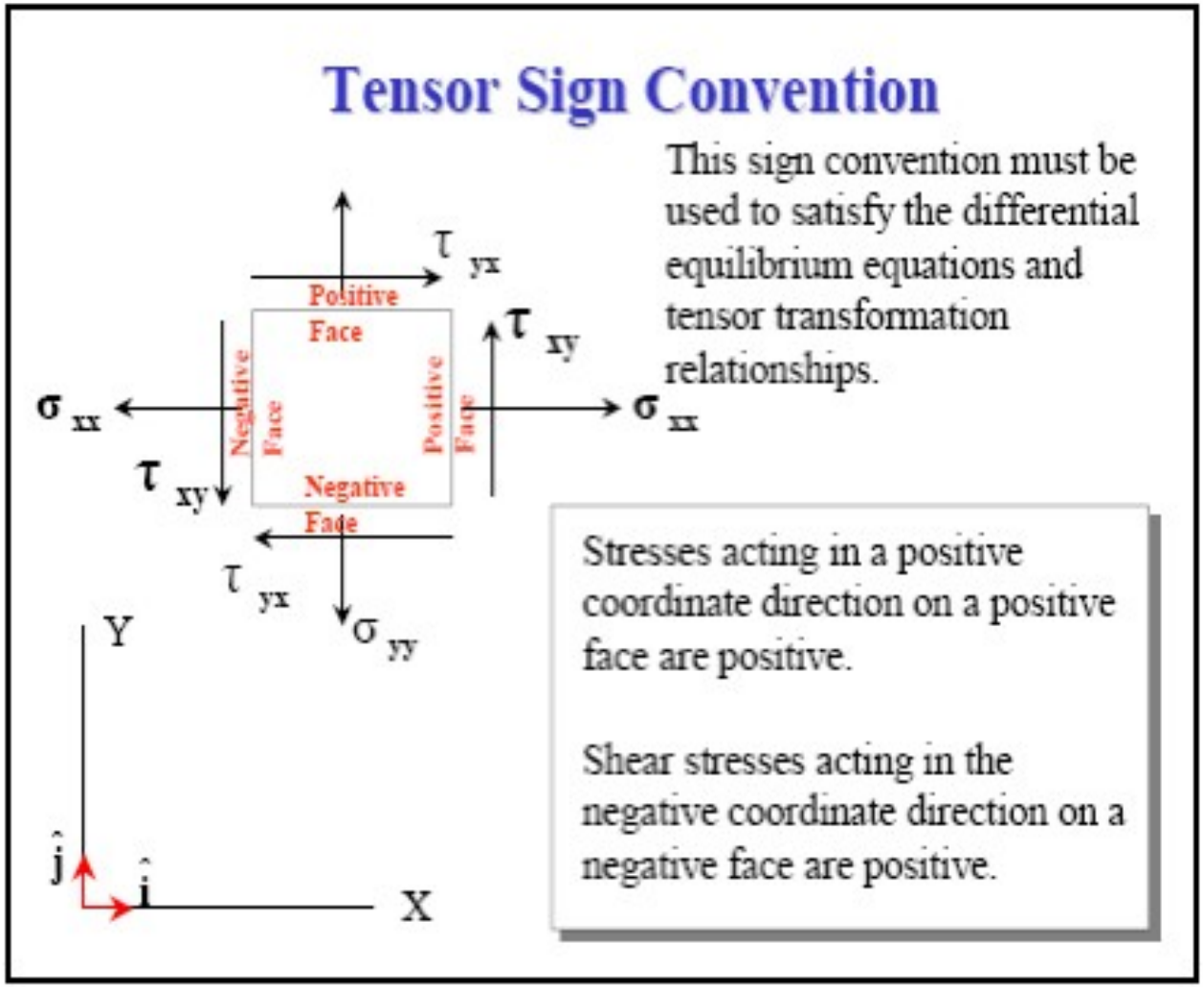
σ_{12}, σ_{21}, σ_{13}, σ_{31}, σ_{23}, σ_{32} o τ_{12}, τ_{21}, τ_{13}, τ_{31}, τ_{23}, τ_{32}

Sobre la convención de signos en los componentes del tensor de esfuerzos

Esfuerzos normales:
Los que producen tensión son positivos.

Esfuerzos de corte:
Si pensamos en un elemento cúbico, la dirección positiva de los esfuerzos de corte corresponde a la dirección positiva del eje si el esfuerzo de tensión que actúa en la cara está en la dirección positiva del eje coordenado (cara positiva).

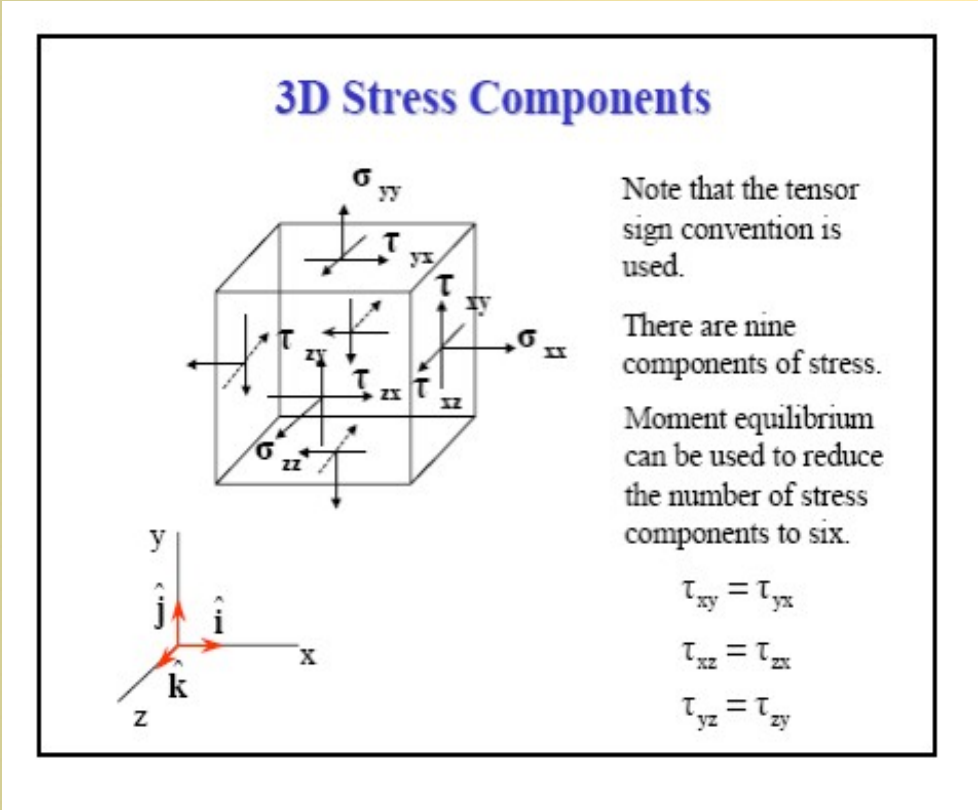
Si el esfuerzo de tensión tiene una dirección opuesta a la dirección positiva del eje coordenado entonces la dirección positiva del esfuerzo de corte es opuesta.



Efecto producido por las Simetrías

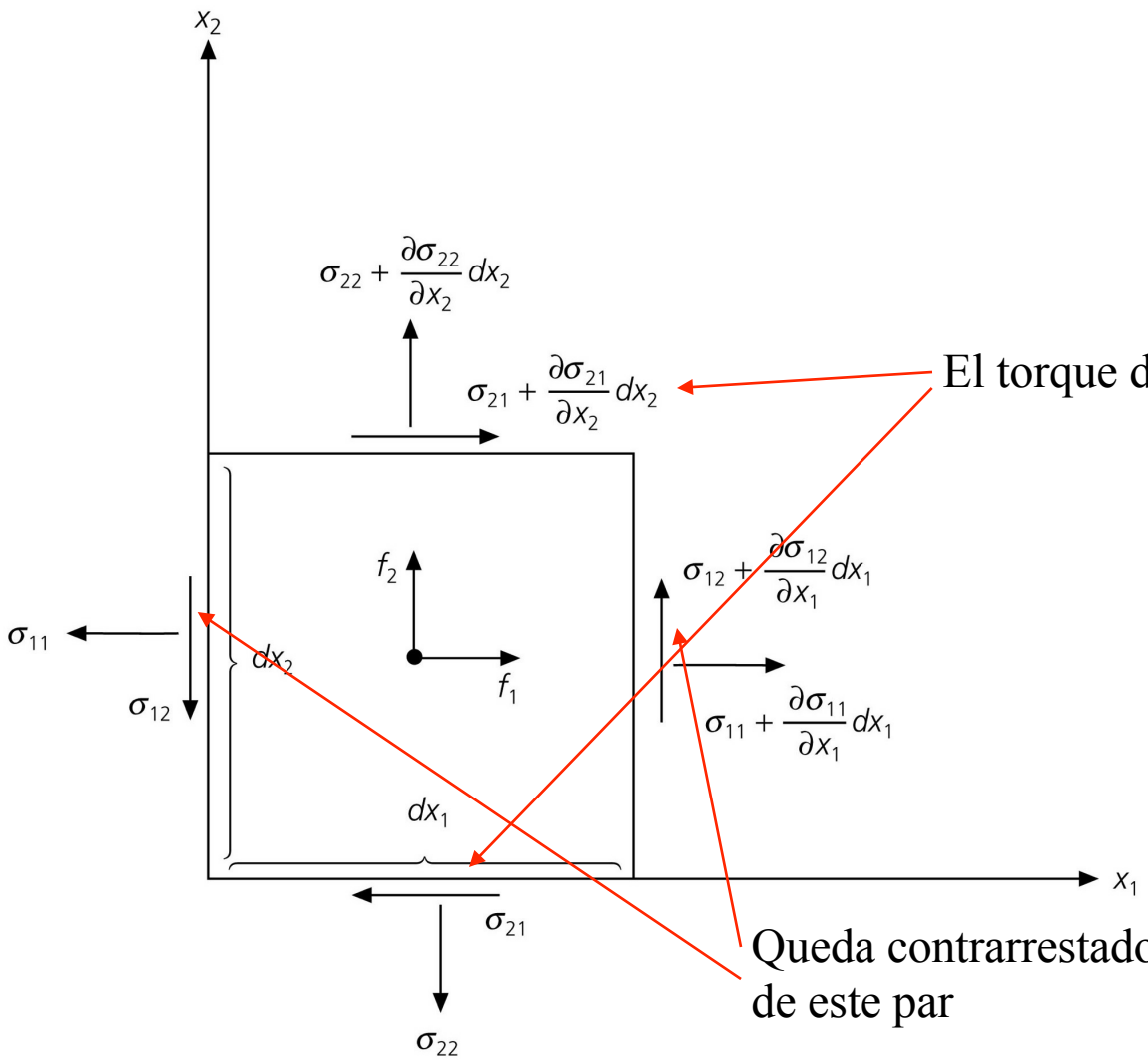
Siguiendo la convención de signos los esfuerzos de corte positivos en las caras visibles del cubo de la figura coinciden con la dirección de los ejes coordenados.
Pero en las caras ocultas estarían al revés.

El equilibrio de momentos (torques) se usa para reducir el número de componentes independientes del esfuerzo, de manera que sólo nos quedan 6.



Las simetrías permiten no tomar en cuenta todos los componentes.

Figure 2.3-5: Torques on a rectangle.



El torque de este par

¡ Pero todas estas tracciones son positivas !

Queda contrarrestado por el torque de este par

Trataremos ahora de ver cómo podemos manipular estas ecuaciones.
En algunos casos lo que vamos a requerir es el esfuerzo normal y el de cizalla en un plano dado, conociendo el tensor de esfuerzos.

Ecuación de Cauchy, componentes del vector tracción

$$T_1 = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2 + \sigma_{31} n_3$$
$$T_2 = \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{32} n_3$$
$$T_3 = \sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 + \sigma_{33} n_3$$

De manera que

$$T = T_1 i + T_2 j + T_3 k$$

La tracción (esfuerzo) normal al plano de interés está dada por la proyección del vector tracción a la normal al plano (es decir el producto punto):

$$\sigma_n = T_i \cdot n_i$$

Lo que nos resulta en:

$$\sigma_n = T_1 \cdot n_1 + T_2 \cdot n_2 + T_3 \cdot n_3$$

Expandiendo y considerando la simetría del tensor de esfuerzos:

$$\sigma_n = n_1^2\sigma_{11} + n_2^2\sigma_{22} + n_3^2\sigma_{33} + 2(n_1n_2\sigma_{12} + n_1n_3\sigma_{13} + n_2n_3\sigma_{23})$$

El esfuerzo de corte sobre el plano se puede encontrar simplemente por trigonometría :

$$\tau^2 = T_i^2 - \sigma_n^2$$

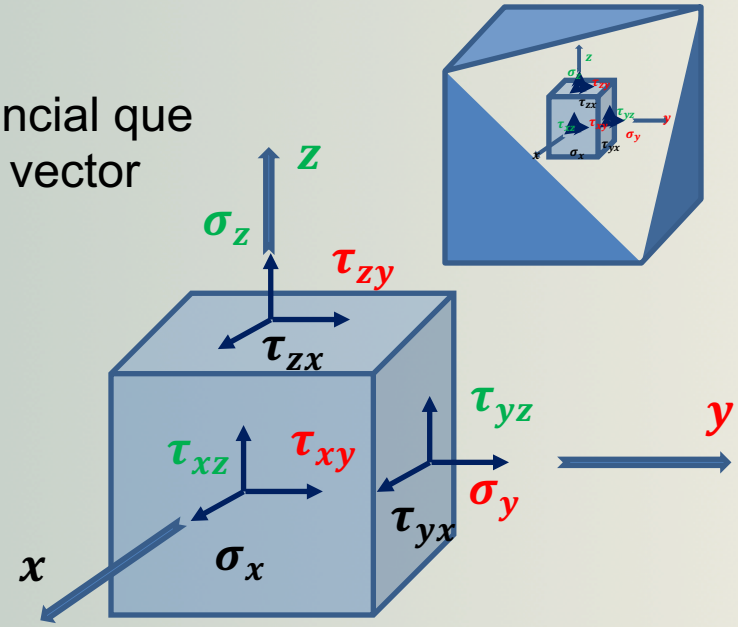
Lo que resulta en:

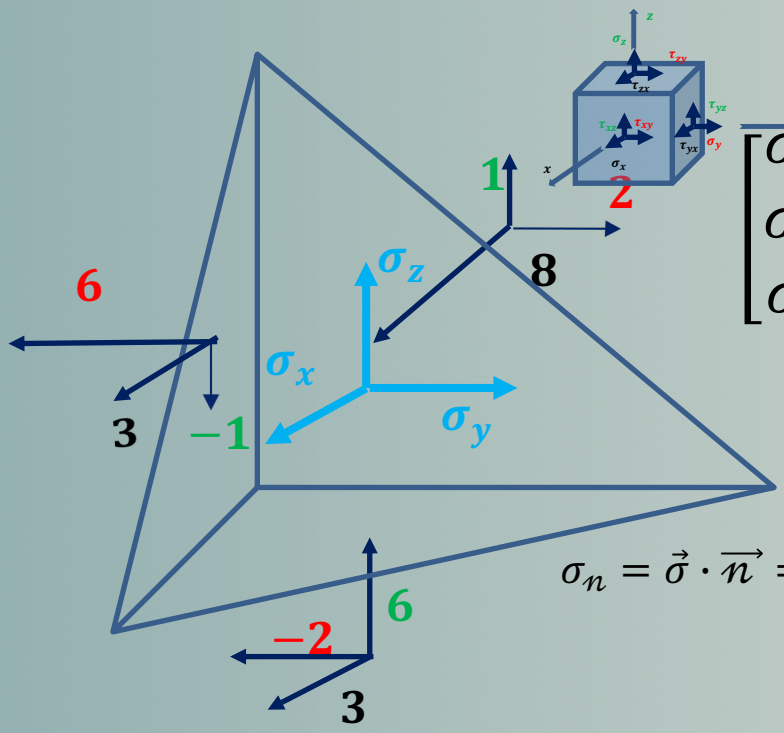
$$\tau^2 = T_1{}^2 + T_2{}^2 + T_3{}^2 - \sigma_n^2$$

Ejemplos

Determinar el valor de las tensiones normal y tangencial que actúan en un punto contenido en un plano, cuyo vector unitario $\vec{u} = \frac{1}{2}(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$

$$[T]_{xyz} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 3 \\ 2 & -6 & -2 \\ 1 & -1 & 6 \end{bmatrix} \text{ en MPa}$$





$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 3 \\ 2 & -6 & -2 \\ 1 & -1 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = 1/2 \cdot \begin{bmatrix} 14 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_n = \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \cdot 1/2 \cdot \begin{bmatrix} 14 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix} = 1/4\,(14 - 6 + 6) = 14/4 = 3{,}5\ MPa$$

$$\tau = \sqrt[2]{|\vec{\sigma}|^2 - {\sigma_n}^2} = \sqrt[2]{(67 - 12{,}25)} = 7{,}3\ MPa$$