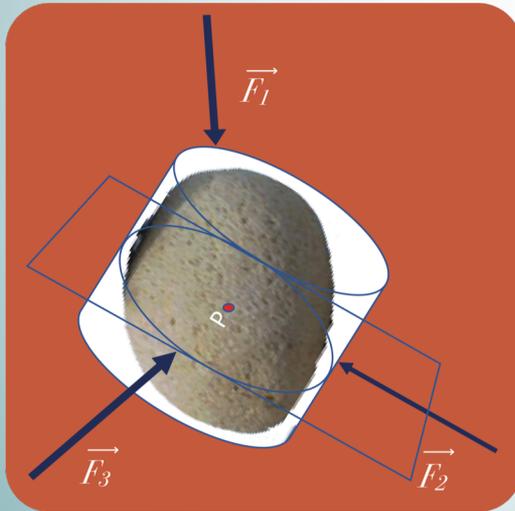


Caracterización geomecánica de suelos y rocas

Tema 3.2.1 Cómo actúan las tensiones sobre un objeto



Alberto González Díez

Patricio Martínez Cedrún

DPTO. DE CIENCIAS DE LA TIERRA Y FÍSICA DE LA
MATERIA CONDENSADA (CITIMAC)

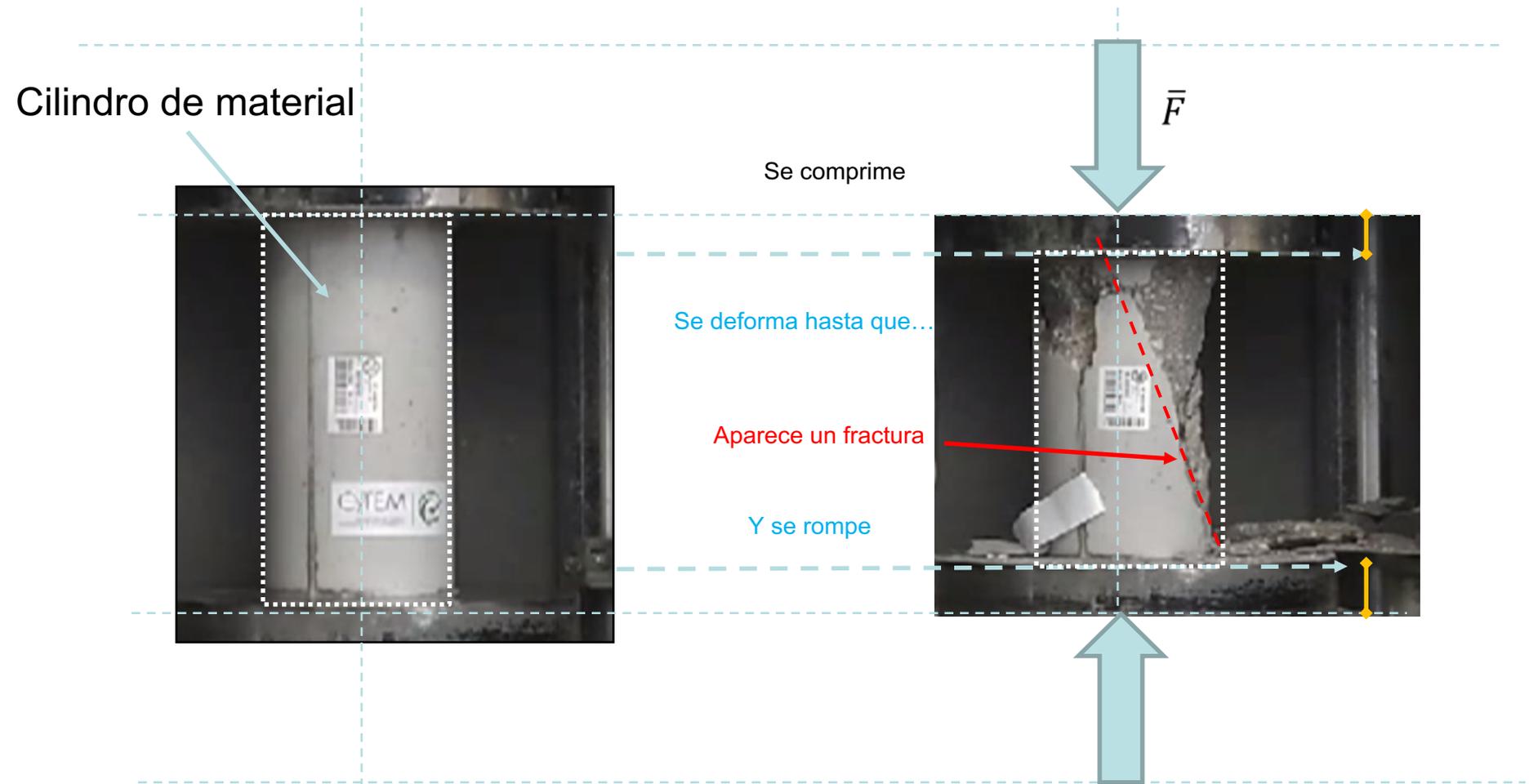
Este tema se publica bajo Licencia:

[Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)



¿Cómo actúan las tensiones sobre un objeto?

- Veamos el siguiente experimento



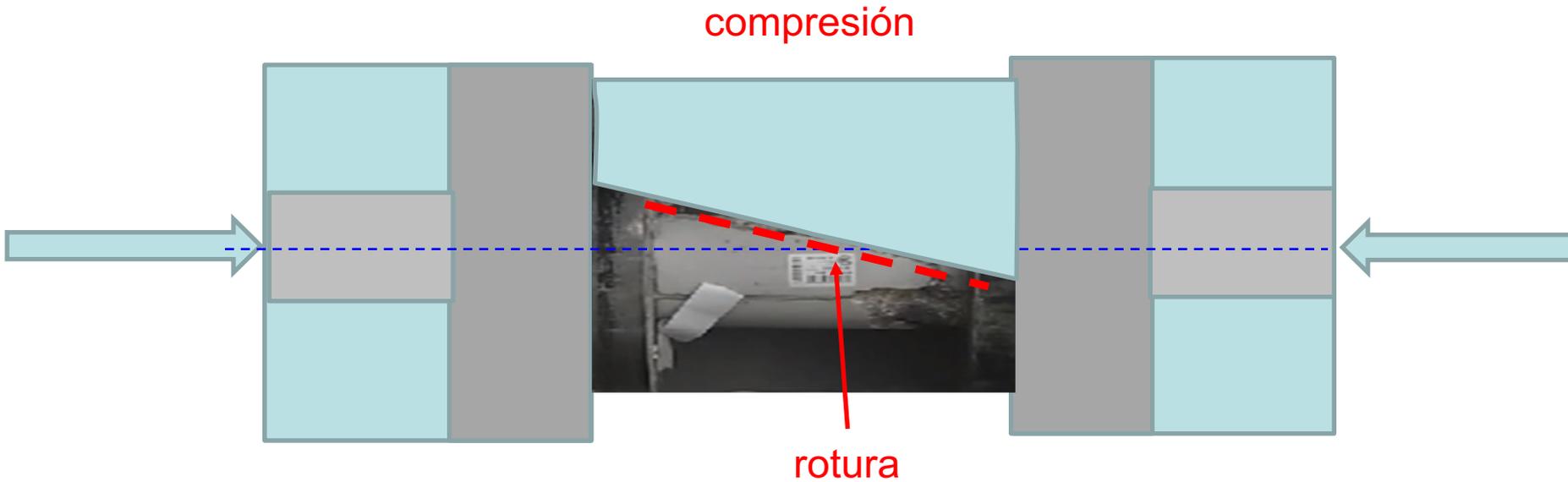
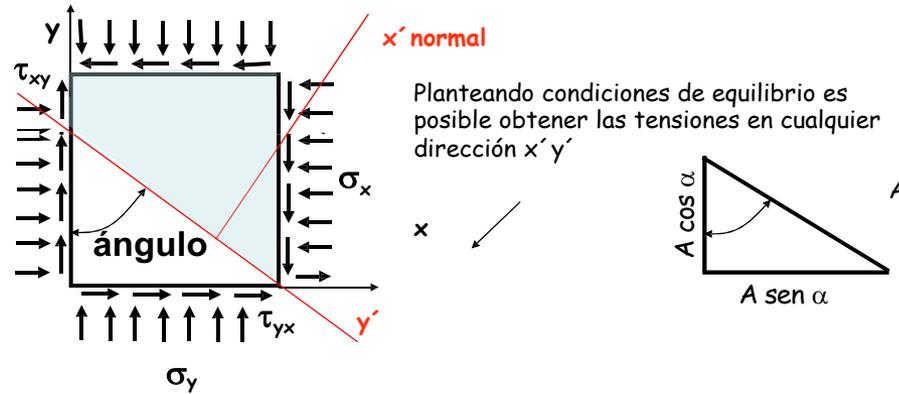
¿Qué ha ocurrido?

- El cilindro se ha comprimido por la acción de una fuerza, y se ha roto

¿Cómo analizar los cambios?

- Volteemos a la horizontal el cilindro y analicemos el sistema de tensiones en 2D

TENSIONES EN 2D



Ahora veamos lo mismo desde un punto de vista numérico

Para analizar numéricamente las consecuencias las fuerzas que actúan sobre ese cilindro de material, se han hecho una serie de consideraciones:

1º El cilindro es igual de alto que de ancho, y que su proyección sobre el plano de esta diapositiva es un cuadrado.

2º Este cuadrado posee caras a izquierda y derecha, perpendiculares al eje X cartesiano; asimismo otras localizadas en la parte superior e inferior, perpendiculares al eje Y.

3º Respecto al sistema de fuerzas que actúa sobre las caras mencionadas. Las fuerzas que actúan sobre dichas superficies son presiones que denominamos **tensiones (o esfuerzos)**. Sobre el eje X rige la regla de la mano derecha; sobre el Y la de la izquierda.

4º Las tensiones que utiliza el modelo representado en la figura corresponden a fuerzas con sentido hacia las caras (compresión).

5º Como consecuencia de dicho sistema de fuerzas se produce un plano de rotura AB que viene definido por su perpendicular o normal, que se construye a partir de un ángulo respecto a sus ejes (X-Y)

6º Las fuerzas que actúan en las caras opuestas son iguales pero de signo contrario. Por lo que no hace falta pintar las fuerzas sobre todas las caras del cuadrado sino aquellas localizadas bajo o sobre una diagonal, en este caso la diagonal izquierda.

Reglas de la mano derecha o izquierda para las fuerzas

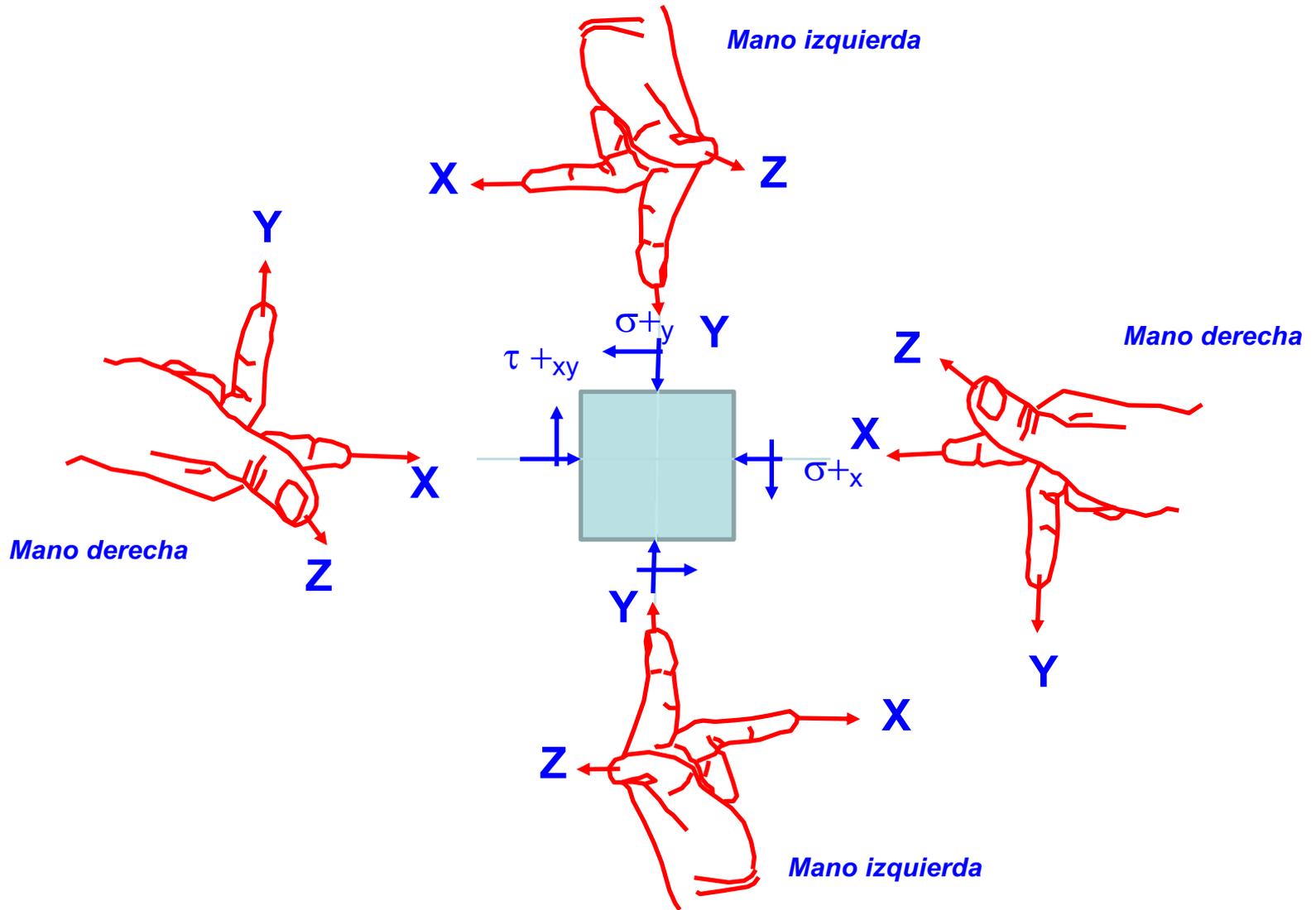
- Compresión
- Tracción

Utilizamos los dedos:

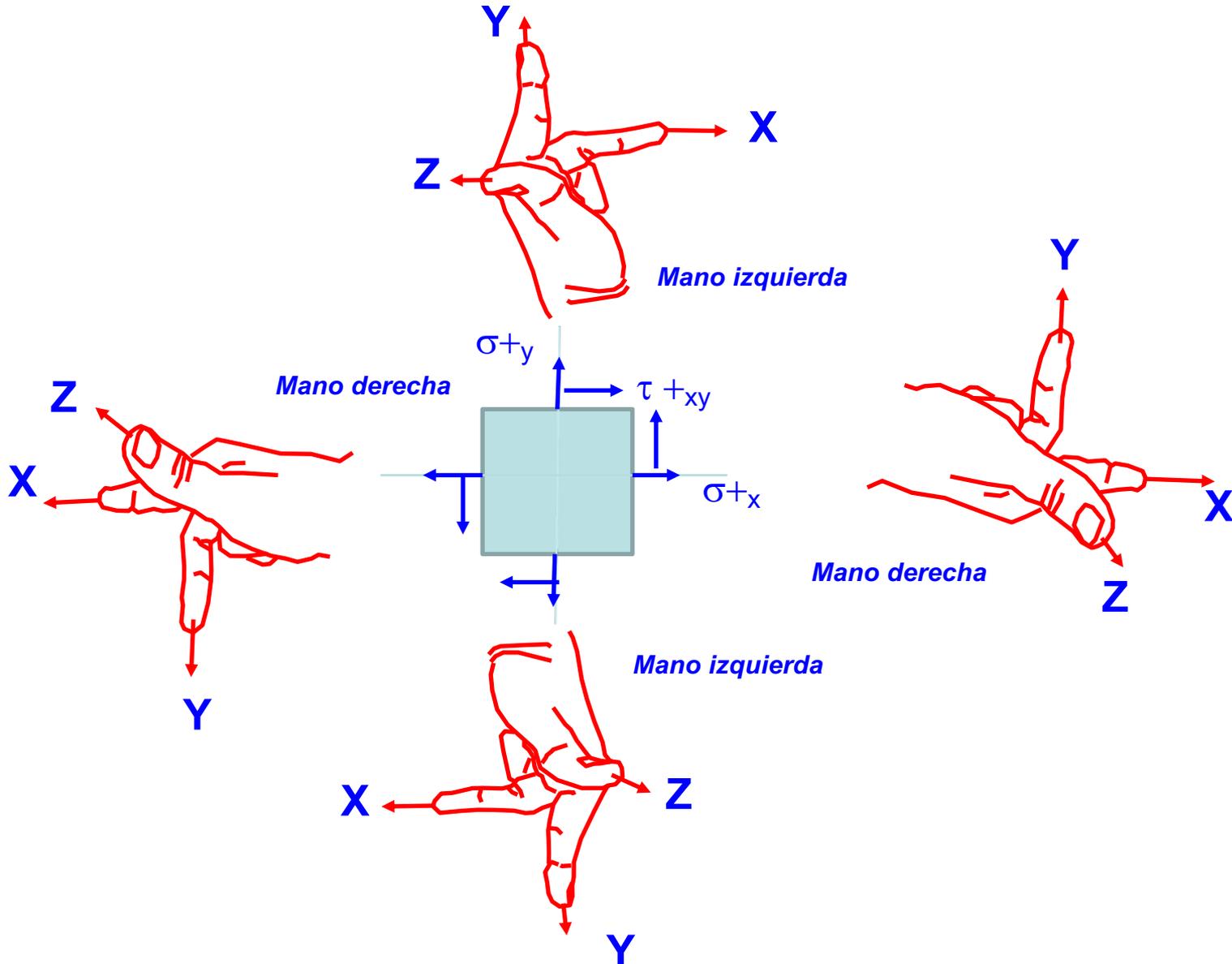
índice, corazón y pulgar.

El dedo índice siempre se sitúa sobre el eje en el que actúa la fuerza

Compresión



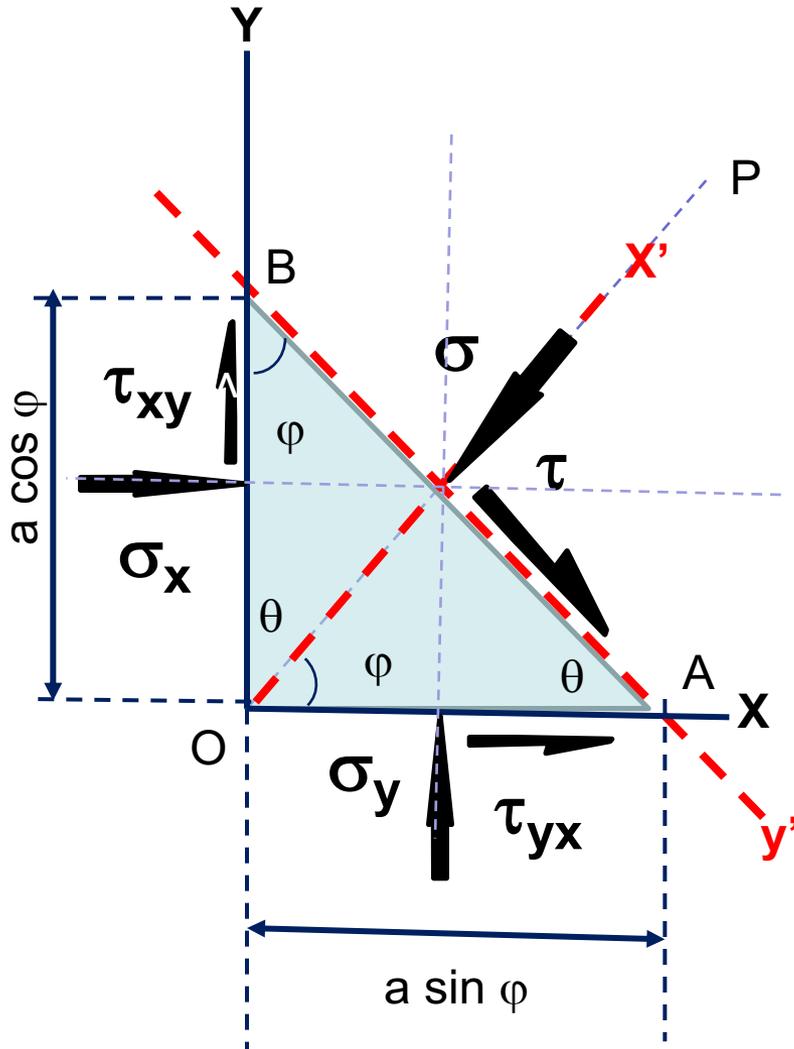
Tracción



Utilizando la Teoría de Esfuerzos en 2D

- Creamos un sistema de referencia 2D
- Deducimos las ecuaciones para los esfuerzos normales σ y tangenciales τ que actúan sobre un plano

Sistema de referencia en 2D compresión



$$\widehat{OBA} = \varphi$$

$$AB = 1 = a$$

$$OA = a \sin \varphi$$

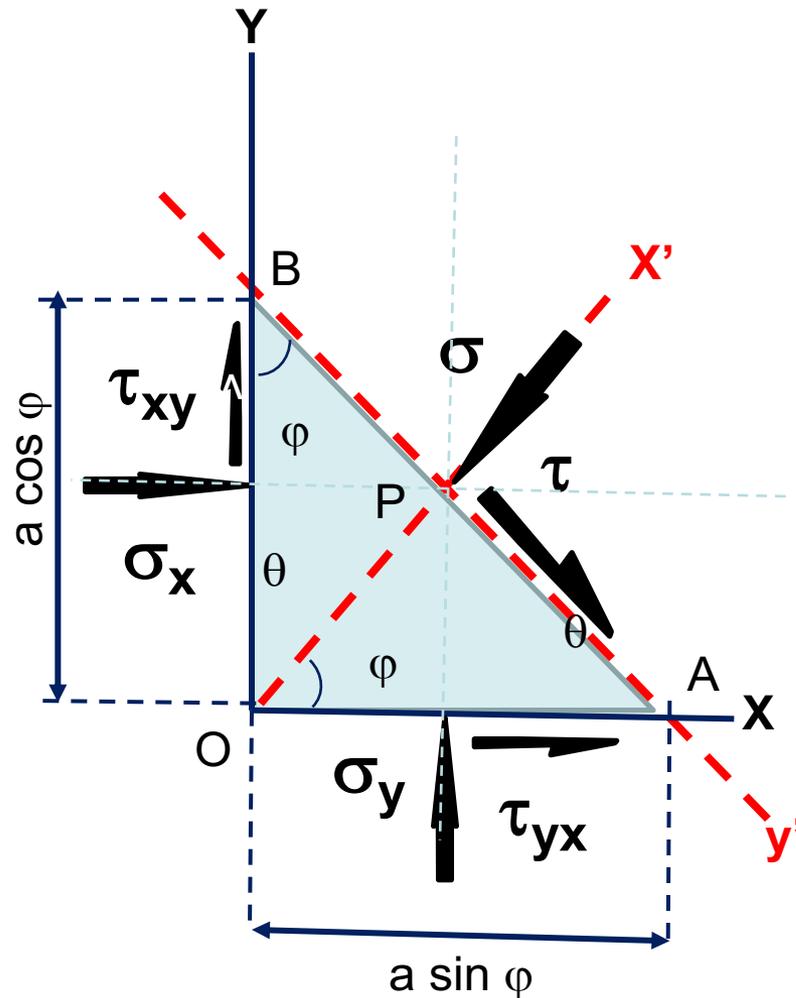
$$OB = a \cos \varphi$$

Análisis del esfuerzo en un plano inclinado

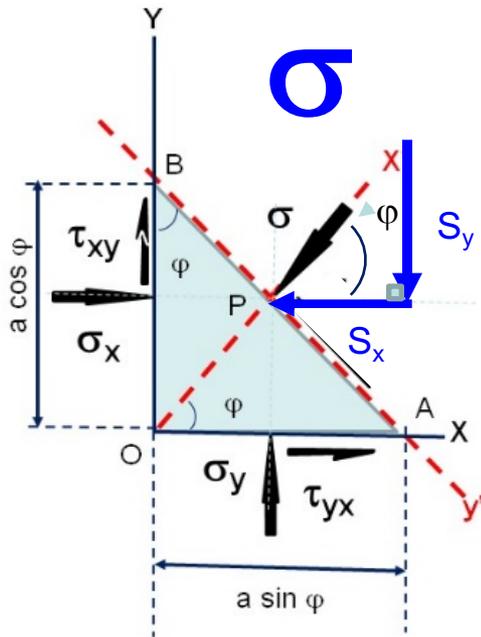
Si se considera un plano AB cuya normal OP está inclinada un ángulo φ respecto al eje OX. Las componentes p_x y p_y del vector P, paralelo a OP pueden determinarse considerando el equilibrio del área triangular OAB, para que la suma de las fuerzas actuantes en cualquier dirección sea cero.

OJO!

¡Apréndete este sistema de referencia en 2D, es fundamental!



Mediante dicho sistema podemos calcular el valor de la componente σ que actúa sobre el plano AB



$$\sigma \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \end{pmatrix}$$

$$S_x AB = \sigma_x OB + \tau_{yx} OA \quad S_x = \sigma_x OB / AB + \tau_{yx} OA / AB$$

$$S_y AB = \sigma_y OA + \tau_{xy} OB \quad S_y = \sigma_y OA / AB + \tau_{xy} OB / AB$$

$$[1a] \quad \begin{aligned} S_x &= \sigma_x \cos \varphi + \tau_{yx} \sin \varphi \\ S_y &= \sigma_y \sin \varphi + \tau_{xy} \cos \varphi \end{aligned}$$

$$[2a] \quad \sigma = S_x \cos \varphi + S_y \sin \varphi$$

$$\sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}$$

$$\sin \varphi \cos \varphi = 1/2 \sin 2\varphi$$

Solución componente σ

Teniendo en cuenta

$$[1a] \quad S_x = \sigma_x \cos\varphi + \tau_{yx} \sin\varphi$$

$$S_y = \sigma_y \sin\varphi + \tau_{xy} \cos\varphi$$

$$[2a] \quad \sigma = S_x \cos\varphi + S_y \sin\varphi$$

$$\sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}$$

$$\sin \varphi \cos \varphi = 1/2 \sin 2\varphi$$

$$\sigma = (\sigma_x \cos\varphi + \tau_{yx} \sin\varphi) \cos\varphi + (\sigma_y \sin\varphi + \tau_{xy} \cos\varphi) \sin\varphi$$

$$\sigma = \sigma_x \cos^2 \varphi + \tau_{yx} \sin\varphi \cos\varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + \tau_{xy} \cos\varphi \sin\varphi$$

$$\sigma = \sigma_x \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) + \tau_{yx} \left(\frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) + \sigma_y \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right) + \tau_{xy} \left(\frac{1}{2} \sin 2\varphi \right)$$

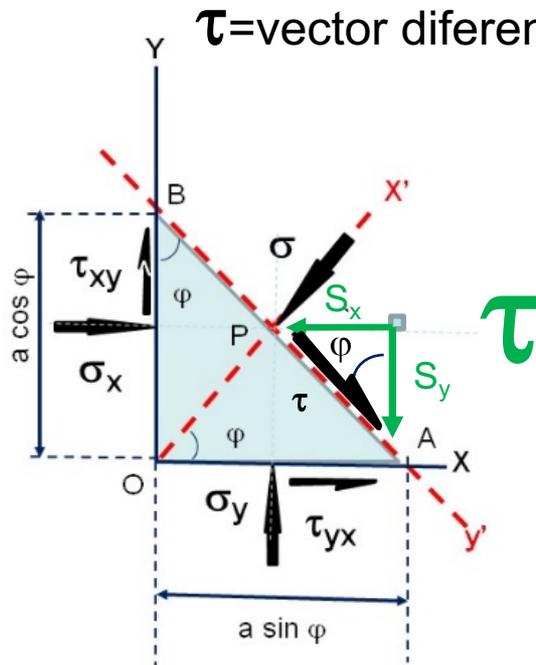
$$\sigma = \sigma_x \cos^2 \varphi + \tau_{yx} \sin \varphi \cos \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + \tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\sigma = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2\tau_{yx} \sin \varphi \cos \varphi$$



$$[3a] \quad \sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi$$

Mediante dicho sistema podemos calcular el valor de la componente τ que actúa sobre el plano AB



Teniendo en cuenta

$$[1b] \quad \tau = S_y \cos \varphi - S_x \sin \varphi$$

$$[2a] \quad \begin{aligned} S_x &= \sigma_x \cos \varphi + \tau_{yx} \sin \varphi \\ S_y &= \sigma_y \sin \varphi + \tau_{xy} \cos \varphi \end{aligned}$$

$$\sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}$$

$$\sin \varphi \cos \varphi = 1/2 \sin 2\varphi$$

$$\tau = \sigma_y \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{yx} \cos^2 \varphi - (\sigma_x \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{xy} \sin^2 \varphi)$$

$$\tau = (\sigma_y - \sigma_x) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{yx} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$$

$$[3b1] \quad \tau = -\frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi$$

Solución componente σ

$$\tau = (\sigma_y \sin \varphi + \tau_{xy} \cos \varphi) \cos \varphi - (\sigma_x \cos \varphi + \tau_{yx} \sin \varphi) \sin \varphi$$

$$\tau = (\sigma_y \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{xy} \cos^2 \varphi) - (\sigma_x \cos \varphi \sin \varphi + \tau_{yx} \sin^2 \varphi)$$

$$\tau = \left(\sigma_y \left(\frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) + \tau_{xy} \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) \right) - \left(\sigma_x \left(\frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) + \tau_{yx} \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right) \right)$$

$$\tau = \left(\frac{\sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi \right) - \left(\left(\frac{\sigma_x}{2} \sin 2\varphi \right) + \frac{\tau_{yx}}{2} - \frac{\tau_{yx}}{2} \cos 2\varphi \right)$$

$$\tau = \left(\frac{\sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x}{2} \right) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi$$



$$[3b2] \quad \tau = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \text{sen}2\varphi + \tau_{xy} \text{cos}2\varphi$$

Ecuaciones que expresan los esfuerzos normal y tangencial que actúan sobre un plano que pasa por el punto P

Las expresiones anteriores dan los valores de los esfuerzos normal (σ) y tangencial (τ) sobre cualquier plano que pase por O punto de aplicación de los esfuerzos σ_x , σ_y y τ_{xy} , cuya normal a ese plano P está inclinada un ángulo φ respecto al eje OX

$$\sigma \quad [3a] \quad \sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\varphi$$

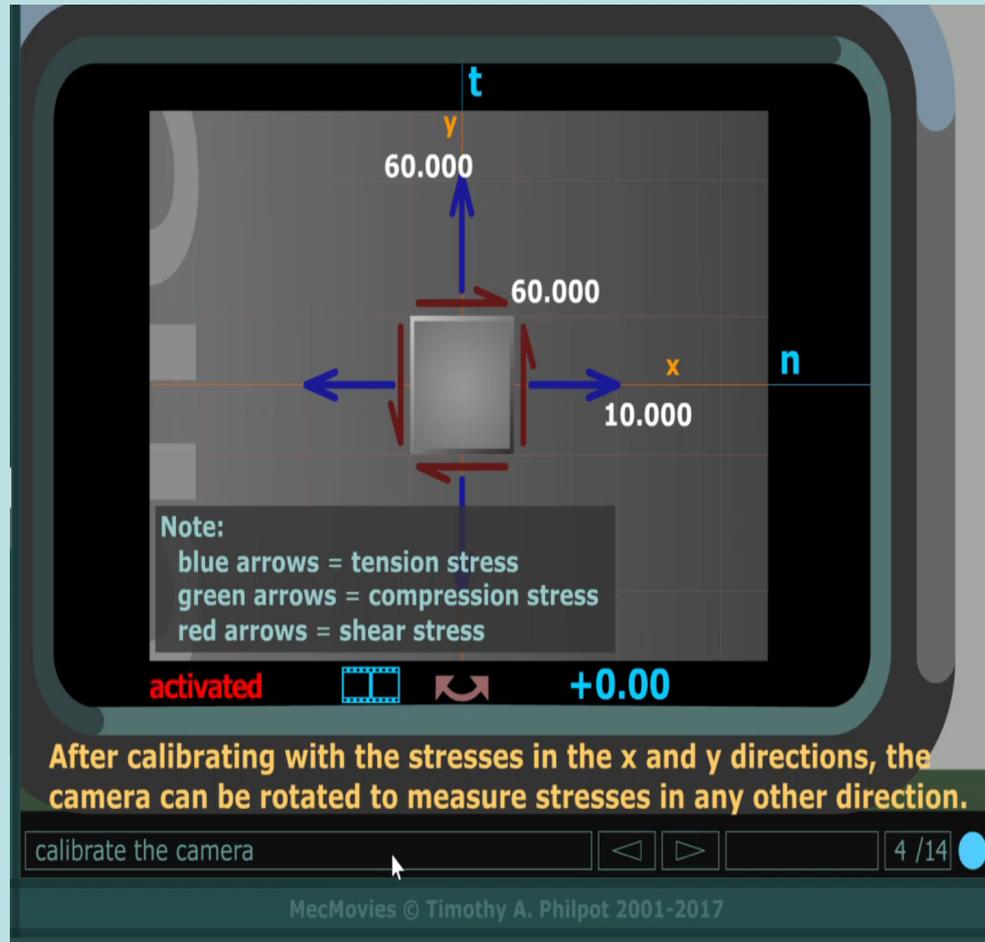
$$\tau \quad [3b1] \quad \tau = -\frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi$$

$$[3b2] \quad \tau = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \operatorname{sen} 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi$$

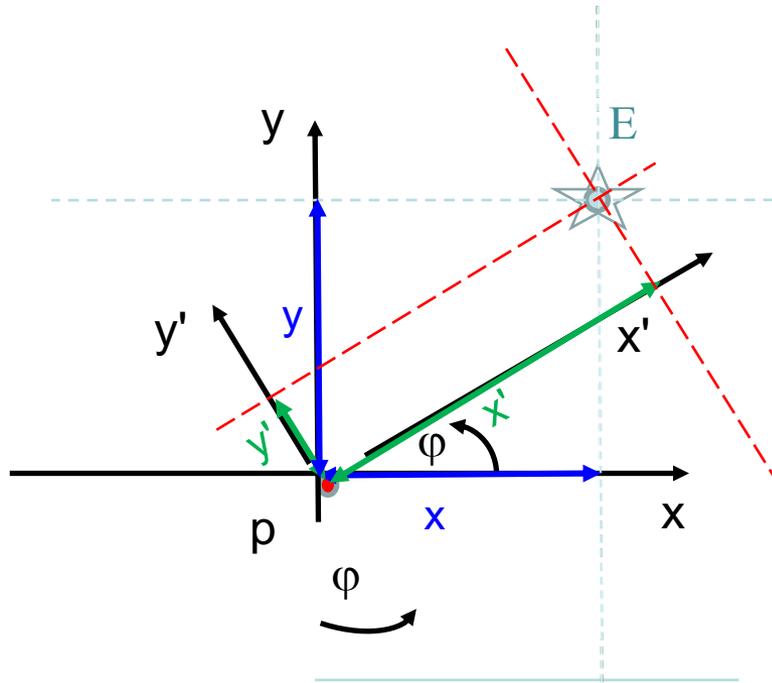
Ojo! estas dos expresiones son equivalentes

¿Qué significa el sistema de ecuaciones anterior?

La Camara de esfuerzos, ese gran instrumento



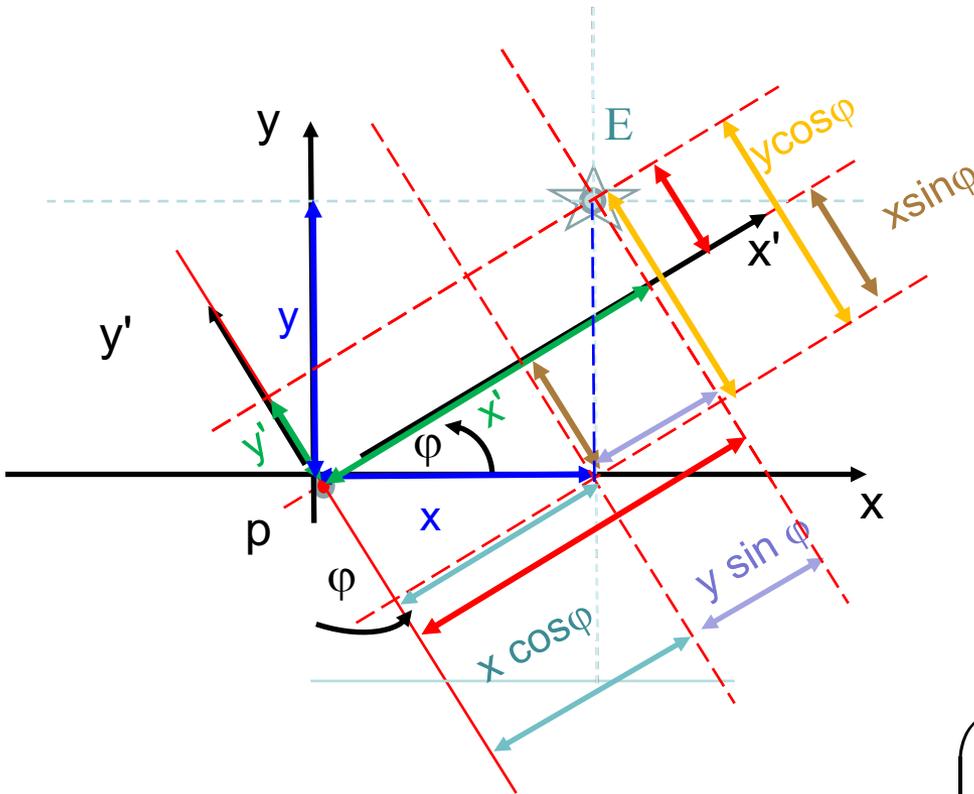
Recordemos: rotación de un sistema de coordenadas



El cambio de sistema de coordenadas rectangular (x,y) de la estrella (E) a otro sistema (x',y') con el mismo origen, pero girado a la izquierda (antihorario) un ángulo ϕ .

Recordemos que una rotación de una coordenada

Se trata de un cambio de sistema de coordenadas rectangular (x,y) de la estrella (E) a otro sistema (x',y') con el mismo origen, pero girado a la izquierda (antihorario) un ángulo φ .



$$x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi$$

$$y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi$$

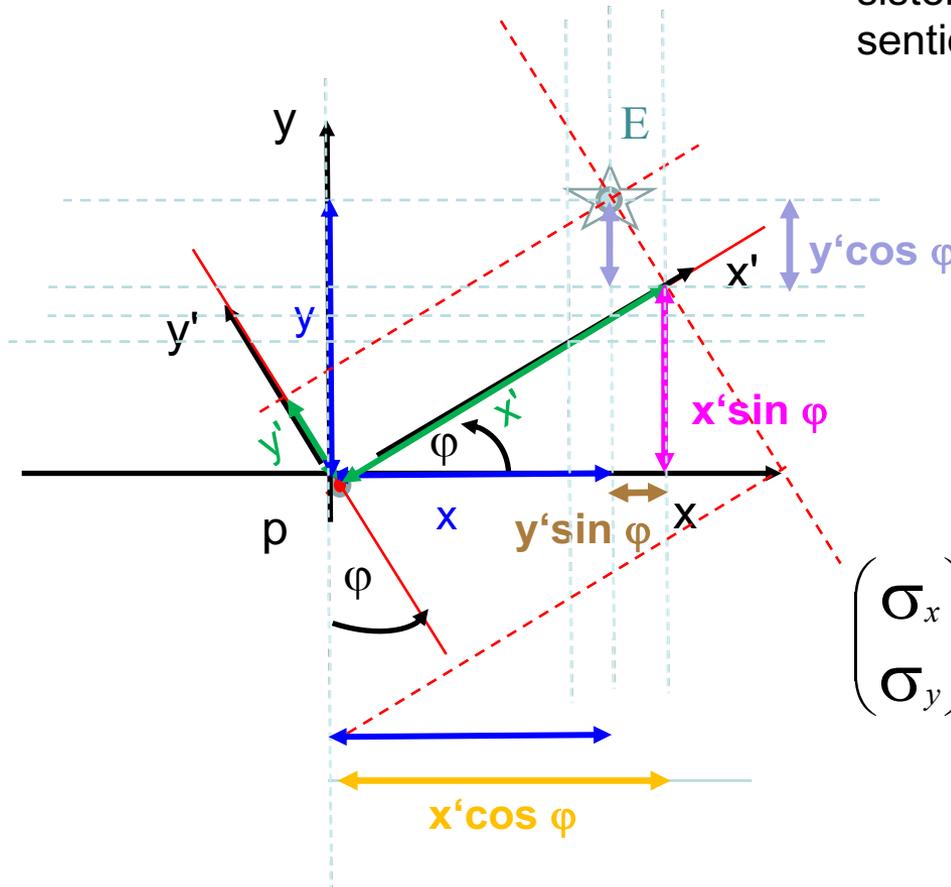
$$\begin{pmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{pmatrix}$$

Recordemos: La transformación inversa

La transformación inversa del sistema anterior rotando en sentido horario φ .

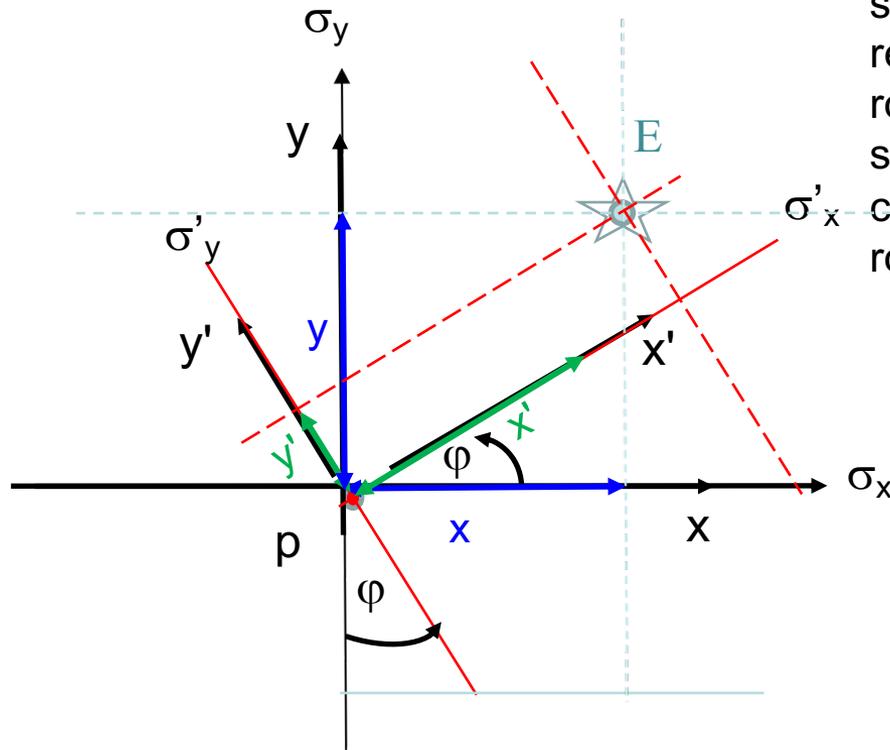
$$x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi$$

$$y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi$$



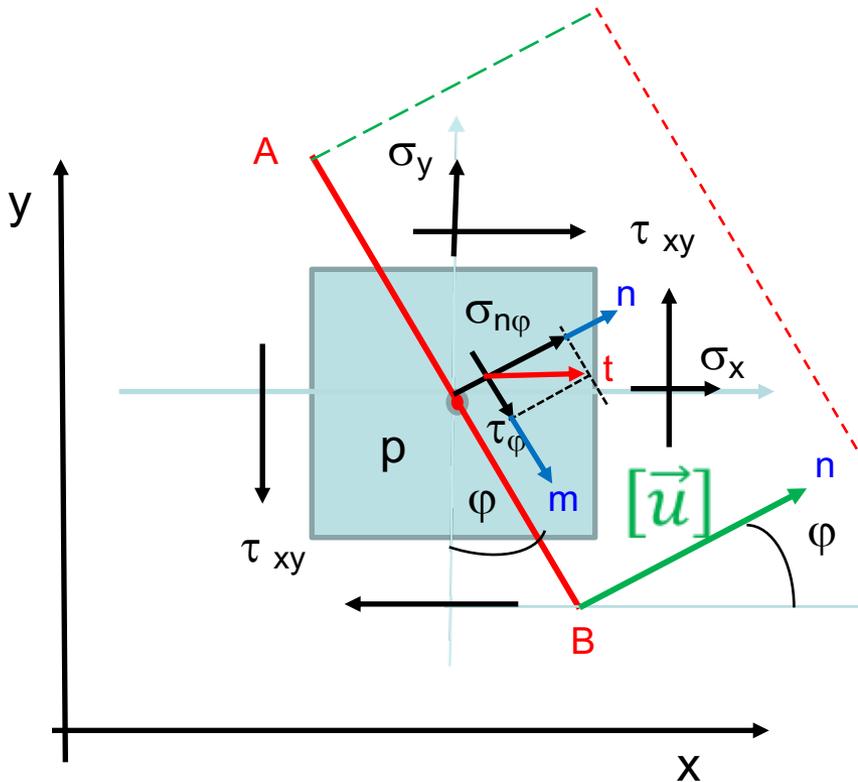
$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \end{pmatrix}$$

Cambio de sistema de referencia de esfuerzos



Sustituyendo los nombres del sistema de coordenadas rectangular (x,y) por (σ_x,σ_y) la rotación a otro sistema (x',y') que se llamará (σ'_x,σ'_y) se desarrollará con las mismas matrices de rotación.

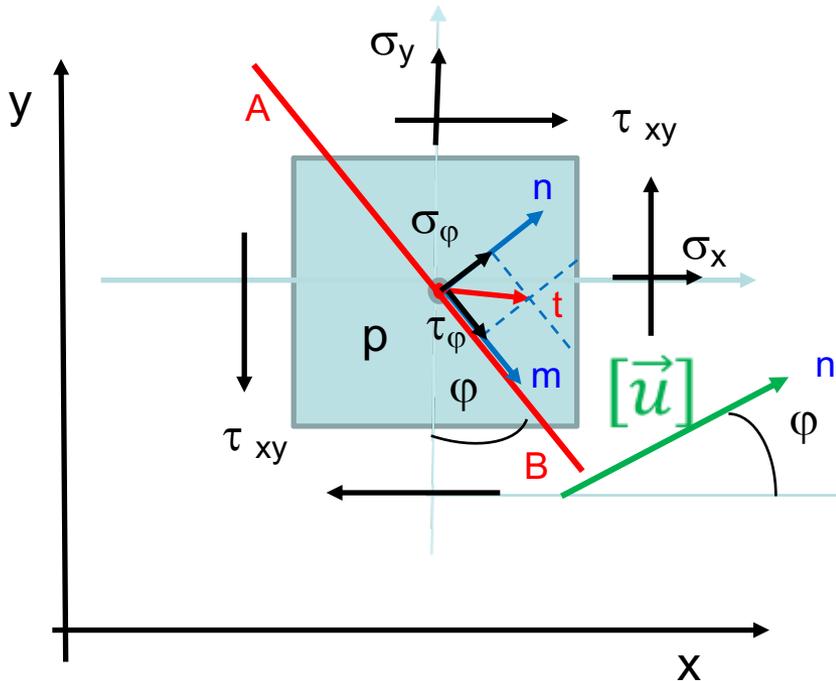
La cámara representa un giro del sistema de referencia del de las caras del sólido a otro formado por el plano AB



$$\sigma_{x'} \equiv \sigma_{n\phi}$$

$$\sigma_{y'} \equiv \tau_\phi$$

matemáticamente



Un Plano (AB) con normal unitaria (u , también denominada n) que forma un ángulo φ con el eje x , define un vector unitario (m) en la dirección paralela al plano (AB) y tangente, cuyo sentido viene dado por la regla de las manos anteriormente vista.

$$n = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}; m = \begin{bmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{bmatrix}$$

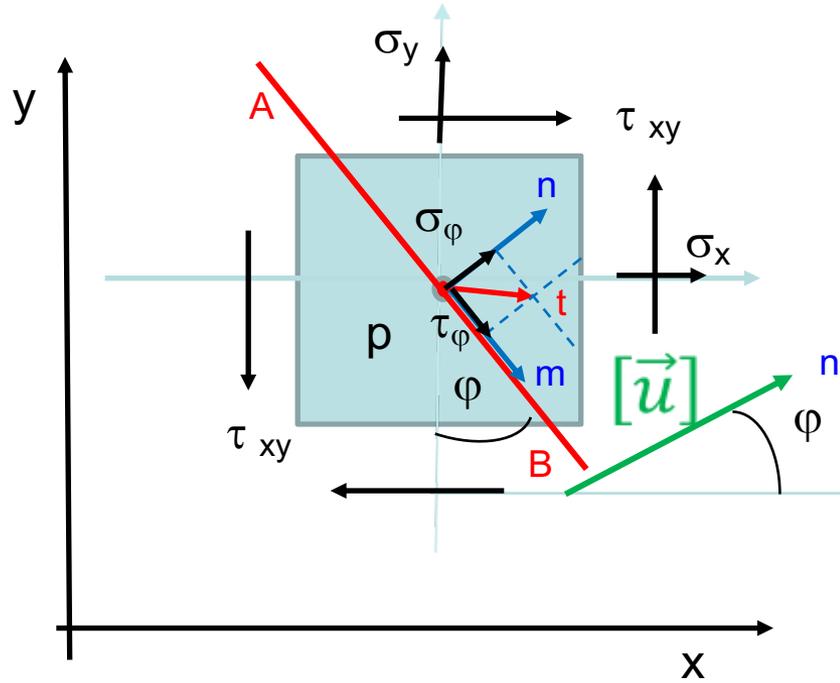
Supongamos un vector tracción t (rojo en la imagen), que actúa sobre el punto p , que está situado en un medio continuo e incide sobre el plano AB cuyo vector unitario es (u), aplicando el primer postulado de Cauchy ese vector depende únicamente del punto p y de la normal al plano

$$t = t(P, n) \rightarrow t = \sigma \cdot n$$

El tensor de ese vector de esfuerzos σ con componentes cartesianas

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

Seguimos desarrollando matemáticamente



El vector tracción en el punto considerado $t = \sigma \cdot n$

Entonces:

$$t = \sigma \cdot n = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \cos \varphi + \tau_{xy} \sin \varphi \\ \tau_{yx} \cos \varphi + \sigma_y \sin \varphi \end{bmatrix}$$

El esfuerzo normal σ_φ y el esfuerzo tangencial τ_φ sobre el plano AB inclinado un ángulo φ

$$\sigma_\varphi = t \cdot n = \begin{bmatrix} \sigma_x \cos \varphi + \tau_{xy} \sin \varphi; \tau_{yx} \cos \varphi + \sigma_y \sin \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_x \cos^2 \varphi + 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi$$

$$\tau_\varphi = t \cdot m = \begin{bmatrix} \sigma_x \cos \varphi + \tau_{xy} \sin \varphi; \tau_{yx} \cos \varphi + \sigma_y \sin \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$\tau_\varphi = \sigma_x \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{xy} \sin^2 \varphi - \tau_{yx} \cos^2 \varphi - \sigma_y \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\tau_\varphi = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_y \end{bmatrix} \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{xy} \begin{bmatrix} \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi \end{bmatrix}$$

La cámara permite ver el cambio de sistema de referencia

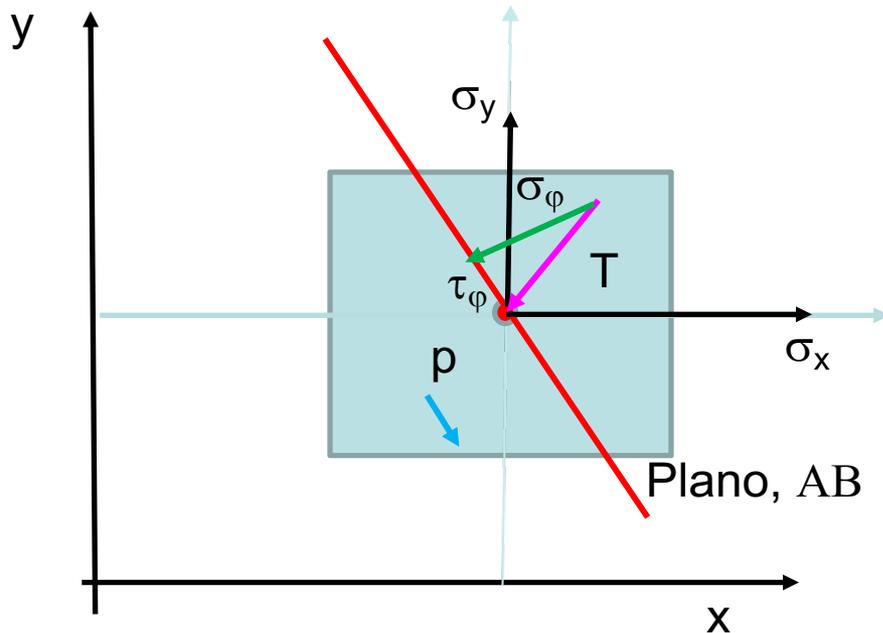
Las expresiones anteriores dan los valores de los esfuerzos normal (σ_φ) y tangencial (τ_φ) sobre cualquier plano AB que pase por P punto de aplicación de los esfuerzos σ_x , σ_y y τ_{xy} , cuya normal a ese plano P está inclinada un ángulo φ respecto al eje OX

$$[3a] \quad \sigma_\varphi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\varphi$$

$$[3b2] \quad \tau_\varphi = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \operatorname{sen} 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi$$

Y esto ocurre tanto para los esfuerzos (o tensiones) de tracción como los de compresión que actúan sobre el plano

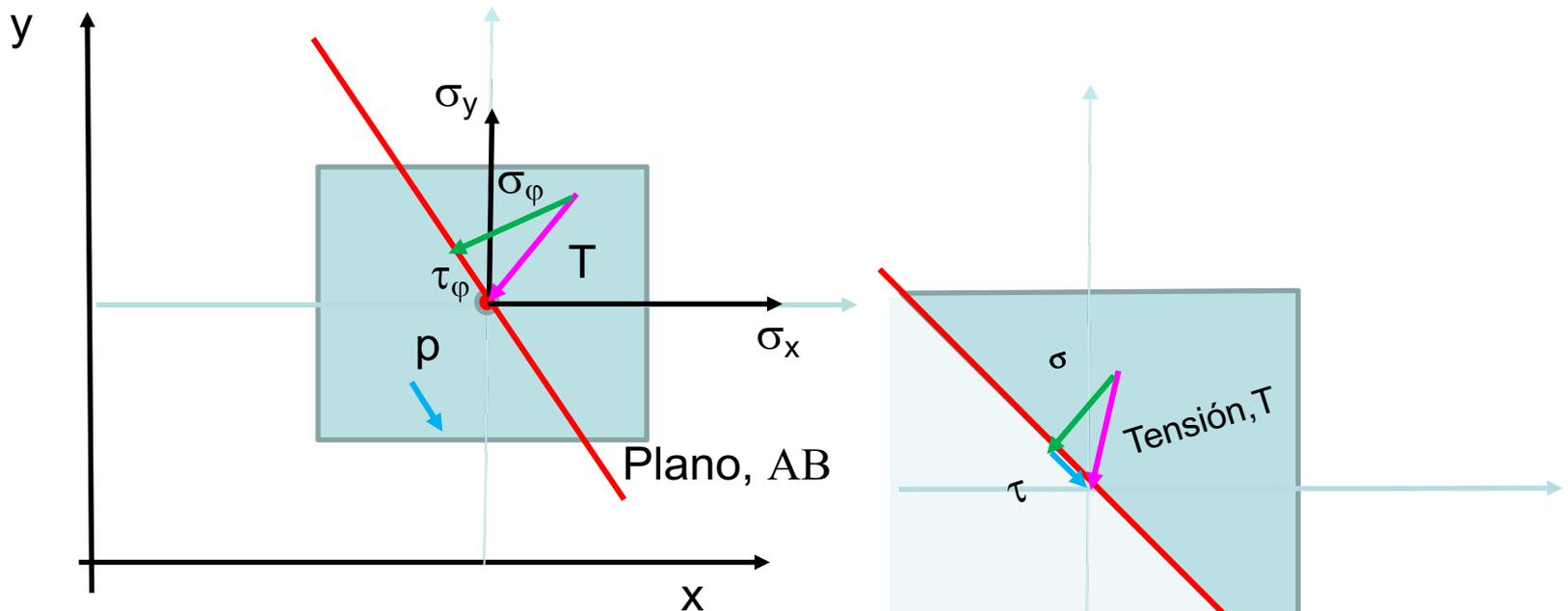
Pensemos en una tensión (T) que actúa a compresión, con una dirección determinada en el espacio. T tiene una componente en X y otra en Y



$$\begin{pmatrix} \sigma_\varphi \\ \tau_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

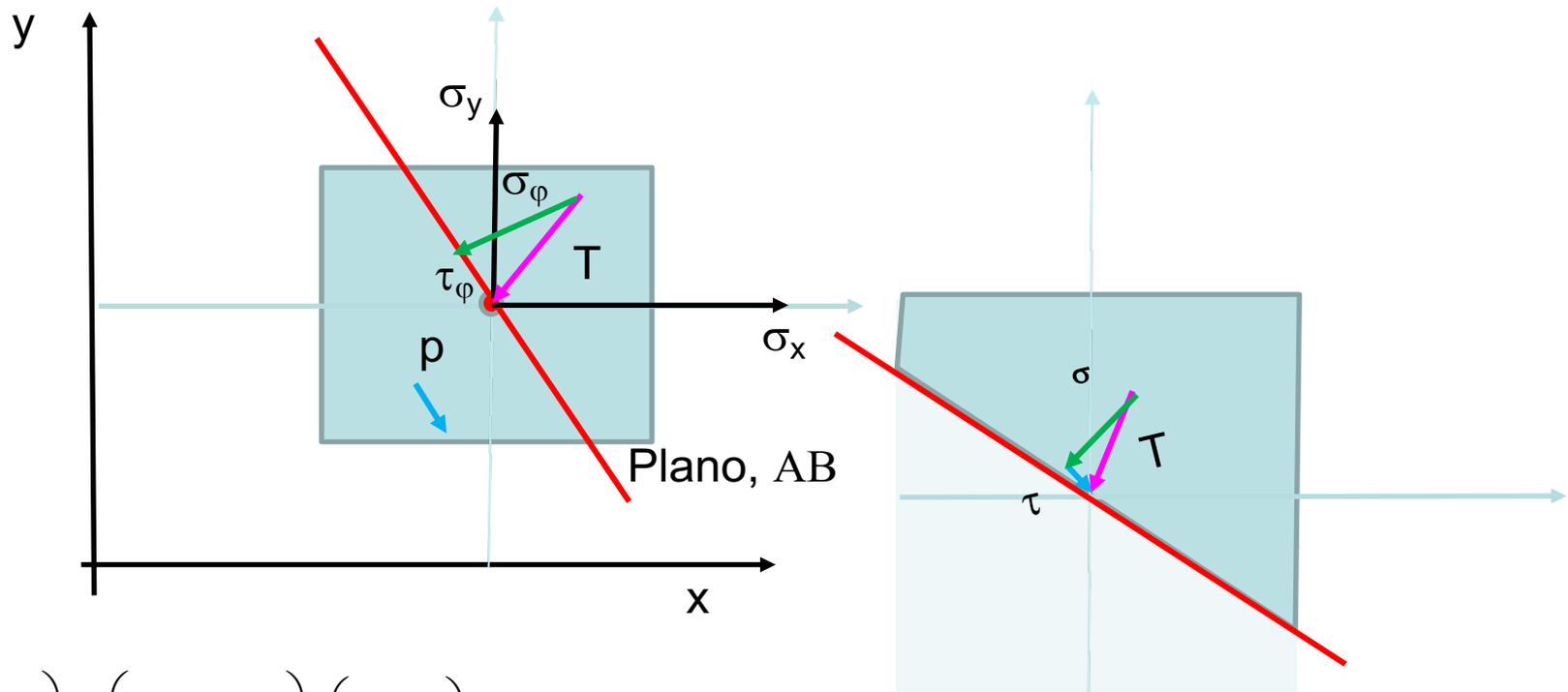
Y a su vez una tensión normal, σ_φ y tangencial τ_φ , al plano AB .

Veamos que ocurre si rota el plano AB un ángulo φ , antihorario



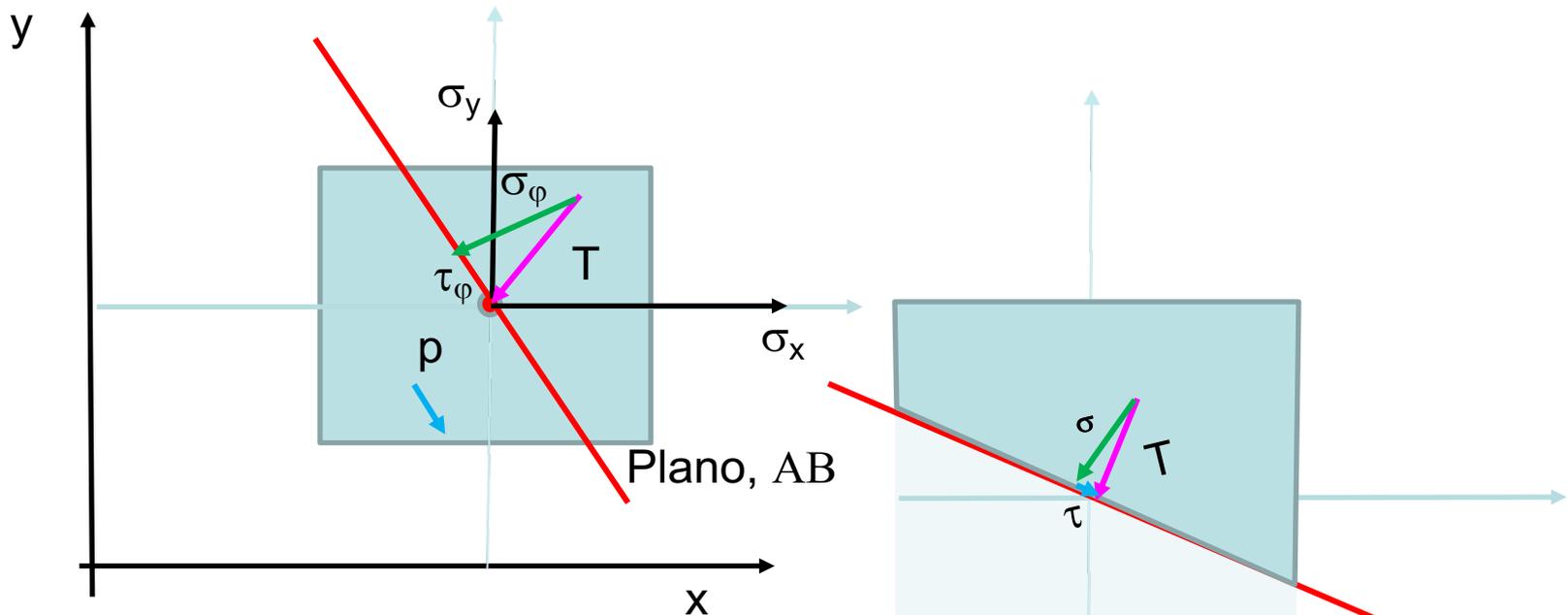
$$\begin{pmatrix} \sigma_\varphi \\ \tau_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

τ se reduce



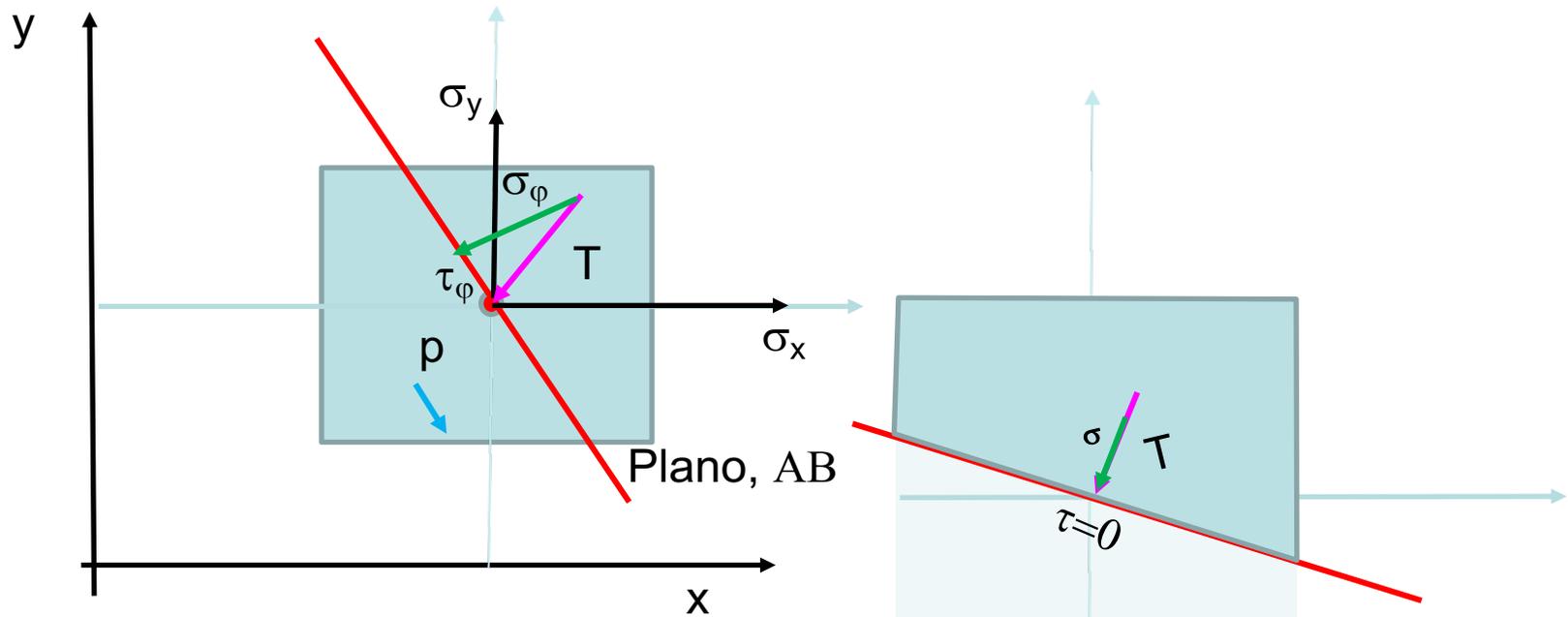
$$\begin{pmatrix} \sigma_{\varphi} \\ \tau_{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

τ disminuye y va tendiendo a 0
 $\tau \rightarrow 0$



$$\begin{pmatrix} \sigma_\varphi \\ \tau_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

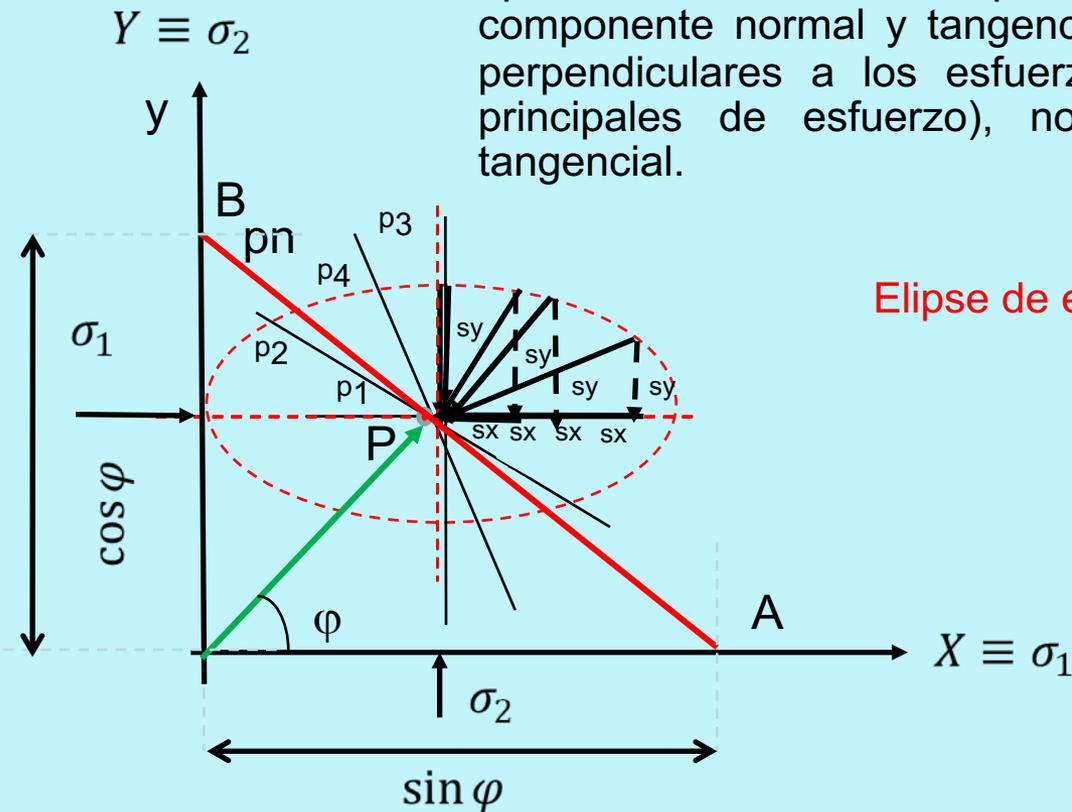
Existirá un plano donde $\tau=0$



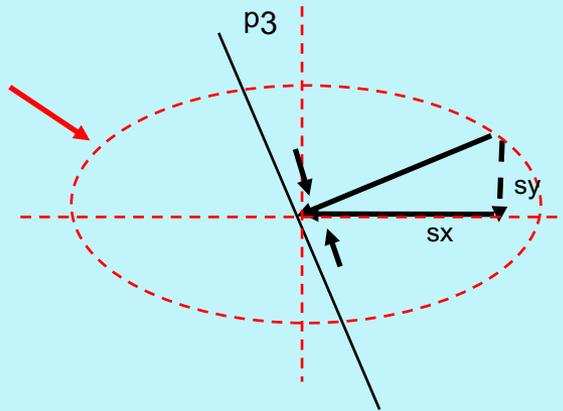
$$\begin{pmatrix} \sigma_\phi \\ \tau_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}$$

Todos los planos que pasan por ese punto P general una elipse de valores de σ y τ

Sobre cada uno de los infinitos planos perpendiculares a la elipse que pase por el punto central, actúan un par de esfuerzos paralelos y opuestos, oblicuamente al plano y que pueden ser descompuestos en componente normal y tangencial. Únicamente sobre los dos planos perpendiculares a los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 (los planos principales de esfuerzo), no actúan esfuerzos de componente tangencial.

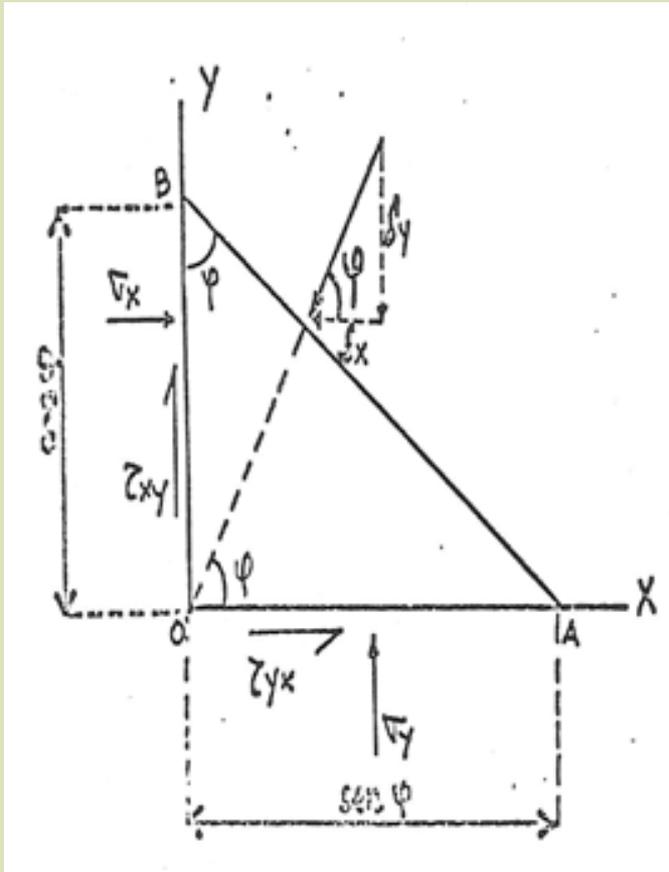


Elipse de esfuerzos



¿Y se puede conocer dónde se sitúan los valores máximos y mínimos de la elipse?

¿qué variaciones del ángulo φ anulan los esfuerzos normales σ y de cizalla τ ?



$$[1] \begin{cases} S_x = \sigma \cos \varphi \\ S_y = \sigma \sin \varphi \end{cases} \quad [1a] \begin{cases} S_x = \sigma_x \cos \varphi + \tau_{xy} \sin \varphi \\ S_y = \sigma_y \sin \varphi + \tau_{xy} \cos \varphi \end{cases}$$

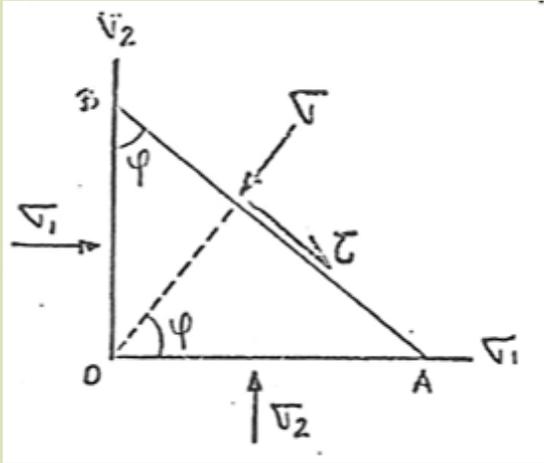
$$\text{si } [1] = [1a] \Rightarrow [4] \begin{cases} \sigma \cos \varphi = \sigma_x \cos \varphi + \tau_{xy} \sin \varphi \\ \sigma \sin \varphi = \sigma_y \sin \varphi + \tau_{xy} \cos \varphi \end{cases}$$

$$[3a] \quad \sigma_\varphi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi$$

$$[3b1] \quad \tau = -\frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi$$

Resolvamos las ecuaciones diferenciales de σ y τ respecto al ángulo φ

Primer caso σ/φ . Orientaciones de AB que hagan valores de cizallamiento=0



La ecuación [7] es muy importante, porque permite conocer el ángulo que hay entre el valor de σ_x y el valor del esfuerzo principal normal [7.1] y tangencial al plano [7.2].

$$[3a] \quad \sigma_{\varphi} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\varphi$$

$$[3b1] \quad \tau = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi$$

$$\text{si } \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = 0$$

$$[5] \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi + 2\tau_{xy} \cos 2\varphi = 0$$

$$[6] \quad (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi = 2\tau_{xy} \cos 2\varphi$$

dividiendo por $\cos 2\varphi$ y pasando $(\sigma_x - \sigma_y)$

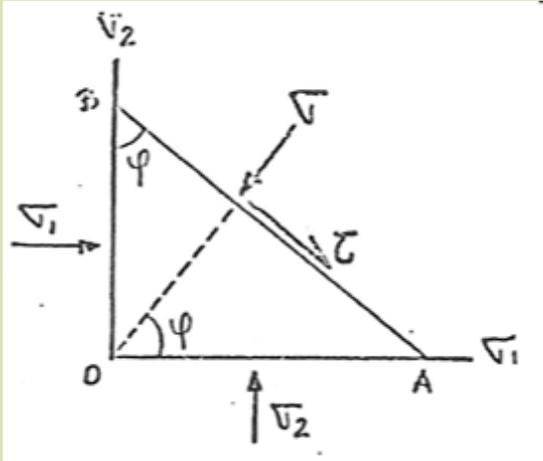
al otro lado de la igualdad

$$[7] \quad \tan 2\varphi = \frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)}$$

$$[7.1] \quad \varphi_1 = \frac{1}{2} * \tan^{-1} \left(\frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)} \right)$$

$$[7.2] \quad \varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$$

Continuando el razonamiento



Partiendo de la derivada primera

$$[5] \frac{\partial \sigma_n}{\partial \varphi} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi + 2\tau_{xy} \cos 2\varphi = 0$$

La derivada segunda

$$[8] \frac{\partial^2 \sigma_n}{\partial \varphi^2} = -(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi - 2\tau_{xy} \sin 2\varphi = 0$$

si

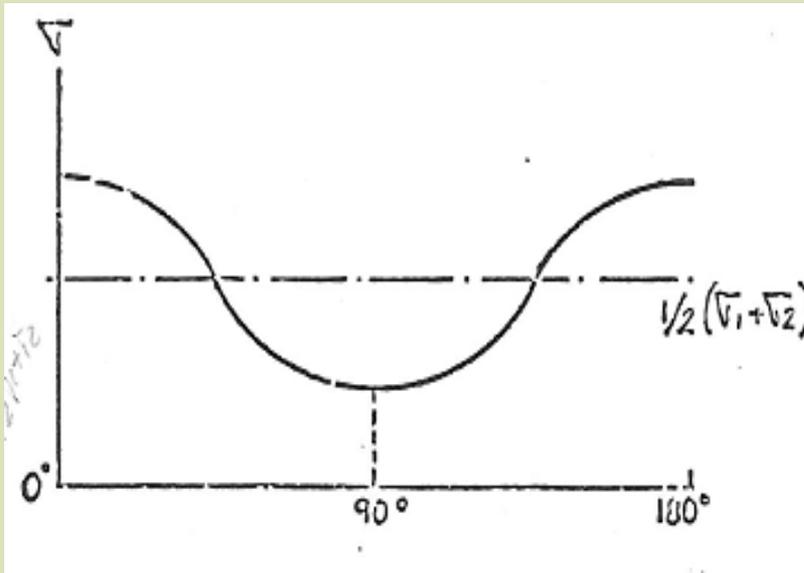
$$\frac{\partial^2 \sigma_n}{\partial \varphi^2} < 0 \text{ se obtiene el valor máximo y } \sigma_n \Rightarrow \varphi = \varphi_1$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_n}{\partial \varphi^2} > 0 \text{ se obtiene el valor mínimo y } \sigma_n \Rightarrow \varphi = \varphi_2$$

$$\sigma \text{ es máximo cuando } \varphi = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$
$$\varphi = \pi = 180^\circ$$

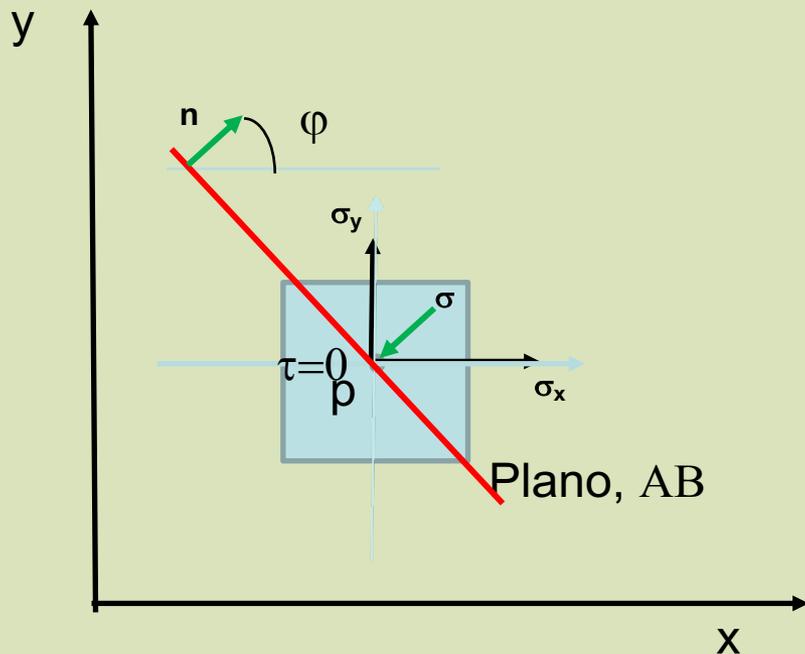
Cuando el esfuerzo de cizalla es cero hay dos esfuerzos normales uno máximo y otro mínimo

**Valores que hacen $\tau = 0$ y ϕ máximo,
Son: 0° y 180°**

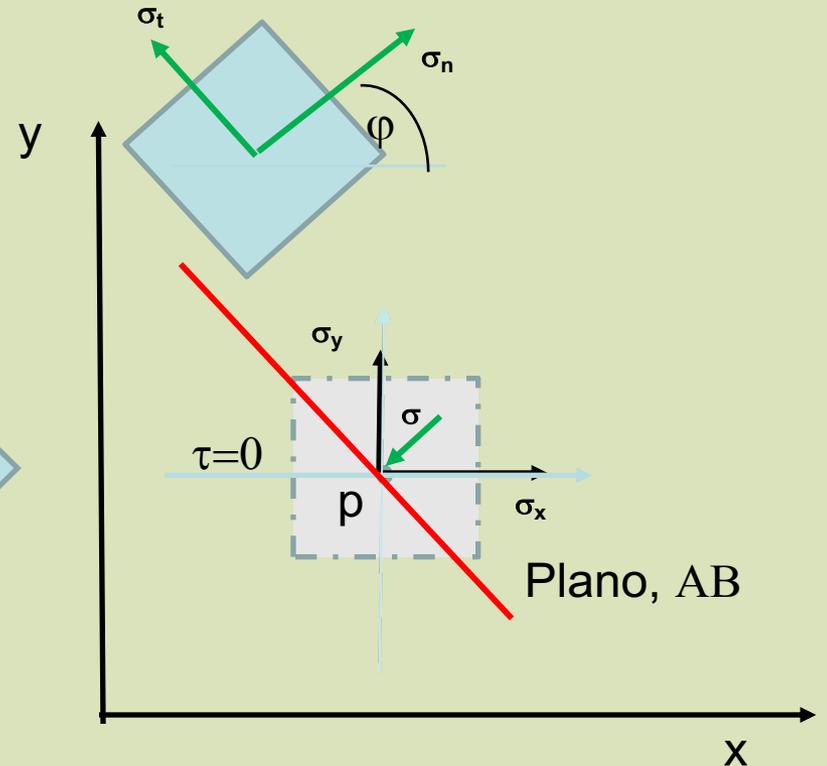


Considerando las propiedades anteriores podemos crear un nuevo sistema de referencia (σ_n, σ_t) que está referenciado respecto al sistema anterior (σ_x, σ_y). Los ejes σ_n, σ_t , de este nuevo sistema son aquellos en los que $\tau=0$ y además es posible conocer el ángulo φ de giro entre ambos sistemas

Sistema de referencia antiguo

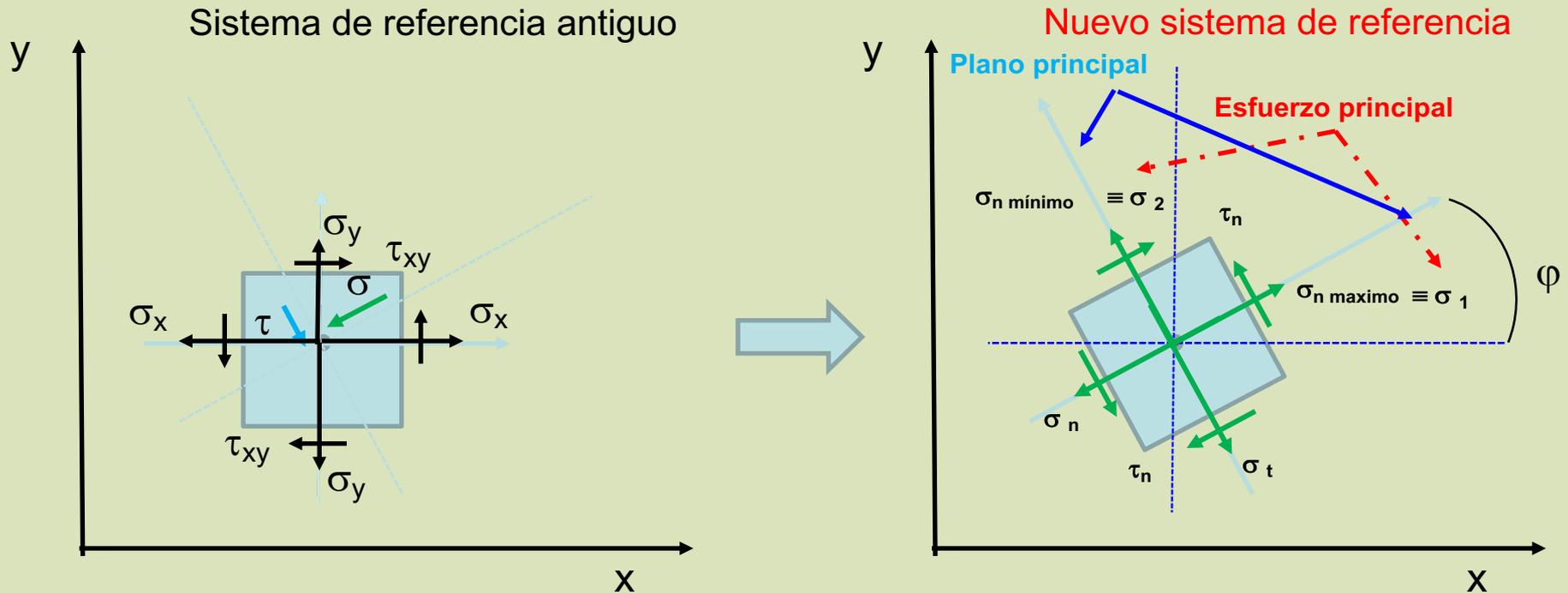


Nuevo sistema de referencia



Los esfuerzos normales máximo y mínimo reciben el nombre de esfuerzos principales y los planos donde ellos actúan se llaman planos principales

Al esfuerzo máximo normal se le llama σ_1 y al menor σ_2



Valor de los esfuerzos principales σ en el nuevo sistema (máximo, σ_1 y mínimo, σ_2)

Tomando en consideración las ecuaciones de esfuerzo normal y tangencial en un plano, ecuaciones [4.1 y [4.2]

$$[4.1] \quad \sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi$$

$$[4.2] \quad \tau = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi$$

$$[7] \quad \tan 2\varphi = \frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)}$$

$$[7.1] \quad \varphi_1 = \frac{1}{2} * \tan^{-1} \left(\frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)} \right)$$

$$[7.2] \quad \varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$$

Y las ecuaciones [7.1] y [7.2] que aportan los valores angulares a los que se encuentran los esfuerzos normales se obtienen los valores de los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 . esto se hace Sustituyendo en [4.1] los valores de [7] para φ_1 y φ_2

$$[9] \quad \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$[10] \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$[10.1] \quad \sigma_{average} = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2)$$

Valor de los esfuerzos principales τ en el nuevo sistema

$$\begin{aligned} [3a] \quad \sigma_{\varphi} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\varphi & [5] \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} &= -(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi + 2\tau_{xy} \cos 2\varphi = 0 \\ [3b1] \quad \tau &= -\frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi & \text{si } \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} &= 0 \end{aligned}$$

Para obtener los valores de los esfuerzos principales τ sustituimos en [3b1] los valores de [5]

$$[3b1] \quad \tau = -\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi$$

$$[11] \quad \tau = -\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} \quad \text{si } \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \tau = 0$$

¡ Moraleja, en los planos principales no hay esfuerzo cortante!

El nuevo sistema es invariante

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y$$

La suma de los esfuerzos normales es independiente de la orientación del esfuerzo

¿Cómo es el esfuerzo cortante máximo?

Resolvamos las ecuaciones diferenciales de σ y τ respecto al ángulo φ

Segundo caso τ/φ . Variaciones del ángulo φ para que los esfuerzos de cizallamiento sean nulos

$$[3a] \quad \sigma_{\varphi} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi$$

$$[3b1] \quad \tau = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi$$

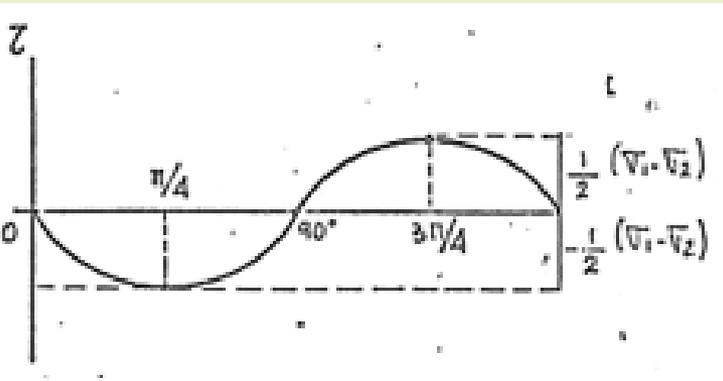
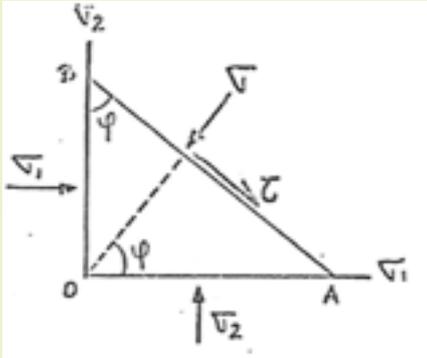
$$\frac{\partial \tau}{\partial \varphi} = 0$$

$$[12] \quad \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} = -\frac{2(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \cos 2\varphi - 2\tau_{xy} \sin 2\varphi = 0$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial \varphi} = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \cos 2\varphi = \tau_{xy} \sin 2\varphi$$

$$[13] \quad \tan 2\varphi = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2\tau_{xy}}$$

$$[13.1] \quad \varphi = -\frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \right)$$



Valores que hacen a $\tau = \text{máximo}$ 45° y 135°

$$\tau \text{ es máximo cuando } \begin{aligned} \varphi &= \frac{\pi}{4} = 45^\circ \\ \varphi &= \frac{3\pi}{4} = 135^\circ \end{aligned}$$

El esfuerzo cortante máximo

$$[3a] \quad \sigma_{\varphi} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\varphi$$

$$[3b1] \quad \tau = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi$$

$$[13] \quad \tan 2\varphi = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2\tau_{xy}}$$

$$[13.1] \quad \varphi = -\frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \right)$$

$$[15] \quad \operatorname{Max.} \varphi_{\tau} = \operatorname{Max.} \varphi_{\sigma} + \frac{\pi}{4}$$

Para obtener los valores de los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 sustituimos en [4.1] los valores de [15]

$$[16] \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$[4.2] \quad \tau_{\max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Representación gráfica del estado de esfuerzos normales y cortantes

$$[7] \tan 2\varphi = \frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)}$$

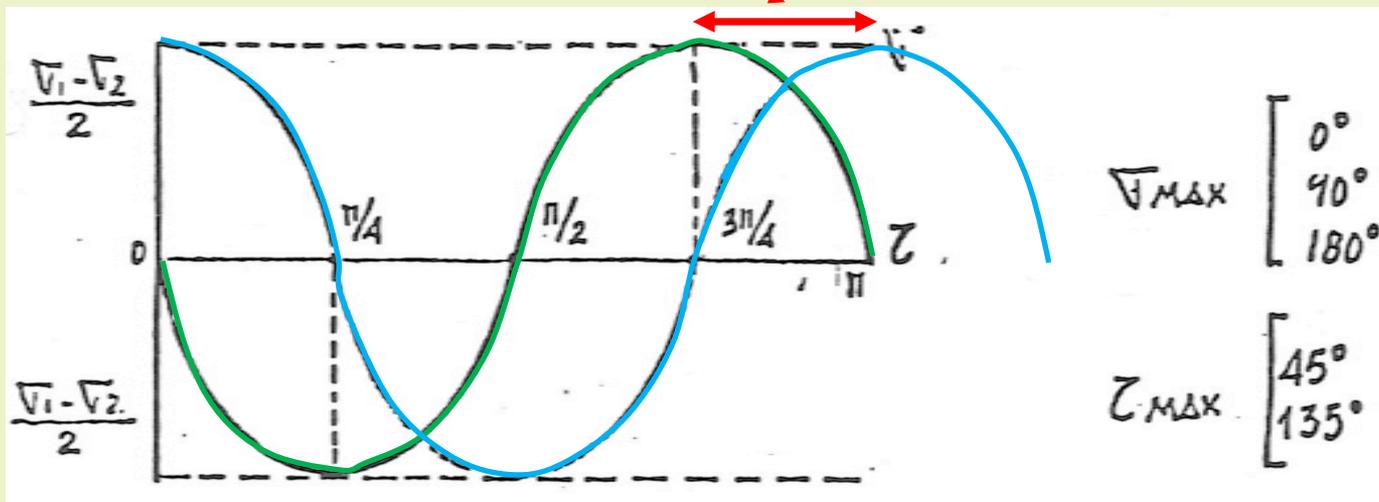
Ángulos $2\varphi_\sigma$ para los esfuerzos normales máximos

$$[13] \tan 2\varphi = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2\tau_{xy}}$$

Ángulos $2\varphi_\tau$ para los esfuerzos tangenciales máximos

$$[14] \tan 2\varphi^* \tan 2\varphi = \frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)} + -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2\tau_{xy}} = -1$$

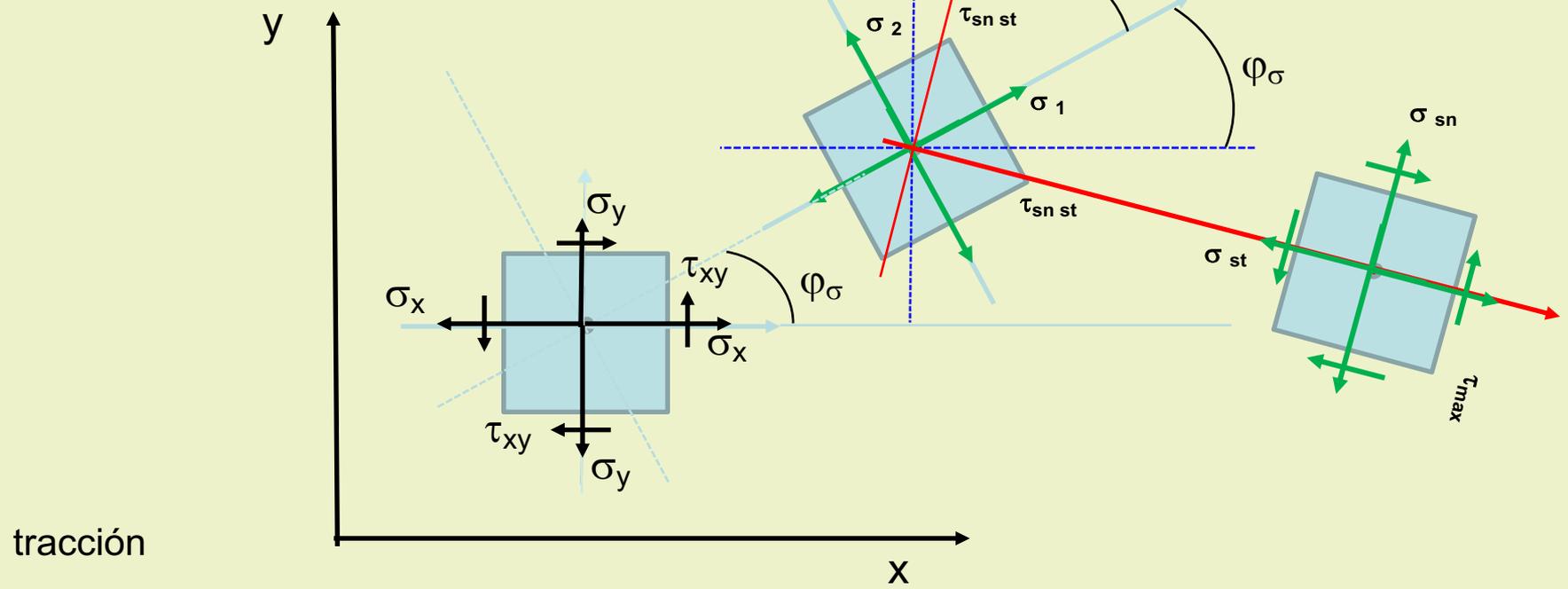
$$[15] \text{Max.}\varphi_\tau = \text{Max.}\varphi_\sigma + \frac{\pi}{4}$$



Gráficamente es

Sistema de referencia antiguo

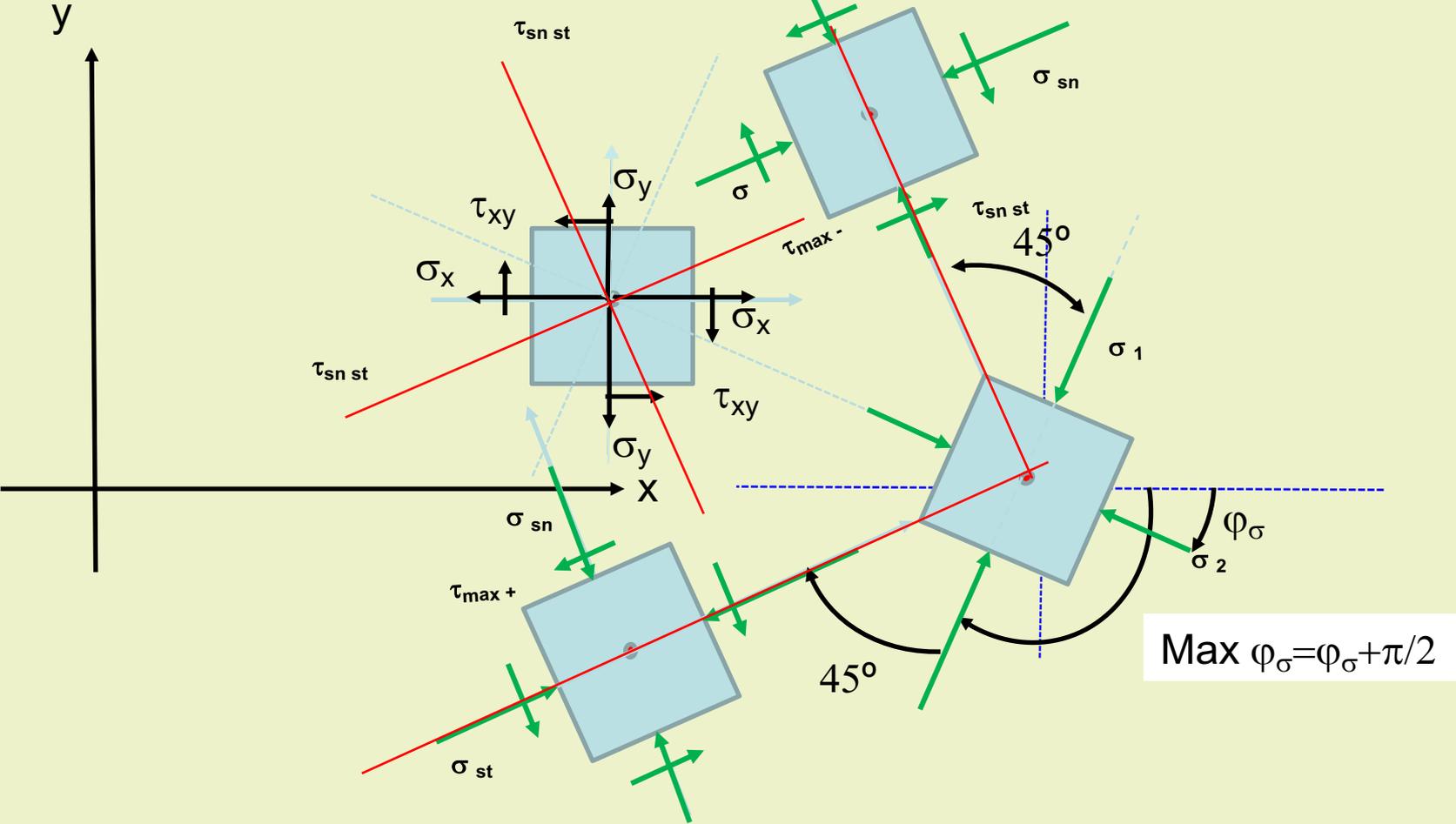
$$[15] \text{Max.}\varphi_\tau = \text{Max.}\varphi_\sigma + \frac{\pi}{4}$$



tracción

Gráficamente es

$$[15] \text{Max.}\varphi_{\tau} = \text{Max.}\varphi_{\sigma} + \frac{\pi}{4}$$



compresión