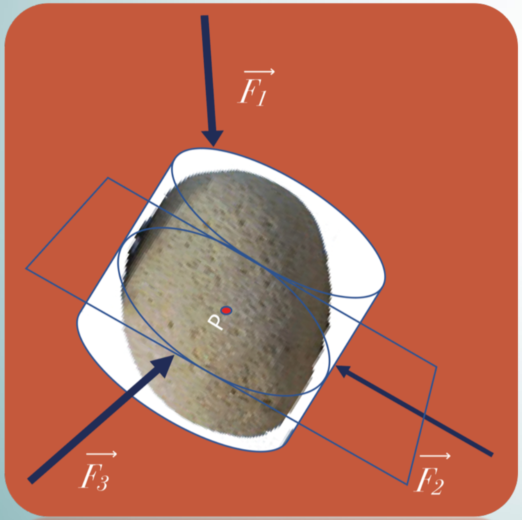
Caracterización geomecánica de suelos y rocas

Tema 3.2.2 El estado de esfuerzos en 3D

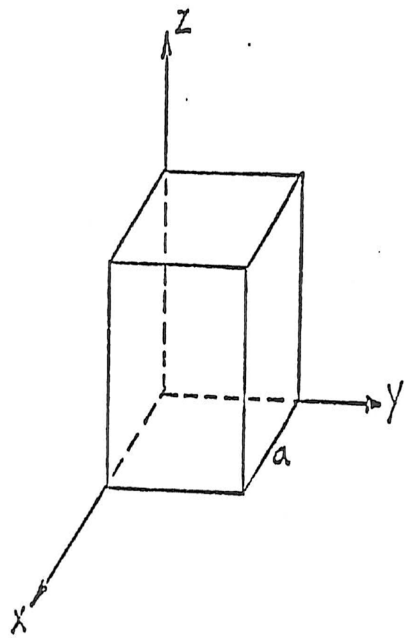


Alberto González Díez

Patricio Martínez Cedrún

DPTO. DE CIENCIAS DE LA TIERRA Y FÍSICA DE LA MATERIA CONDENSADA (CITIMAC)

Estado de esfuerzos en 3-D

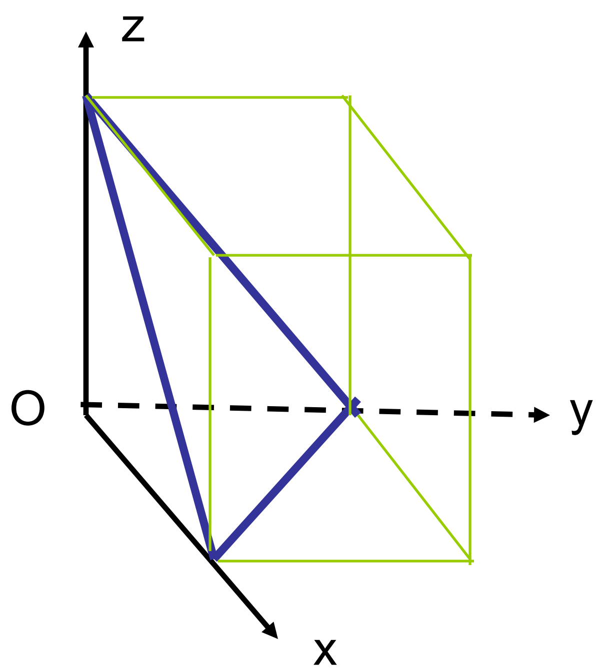


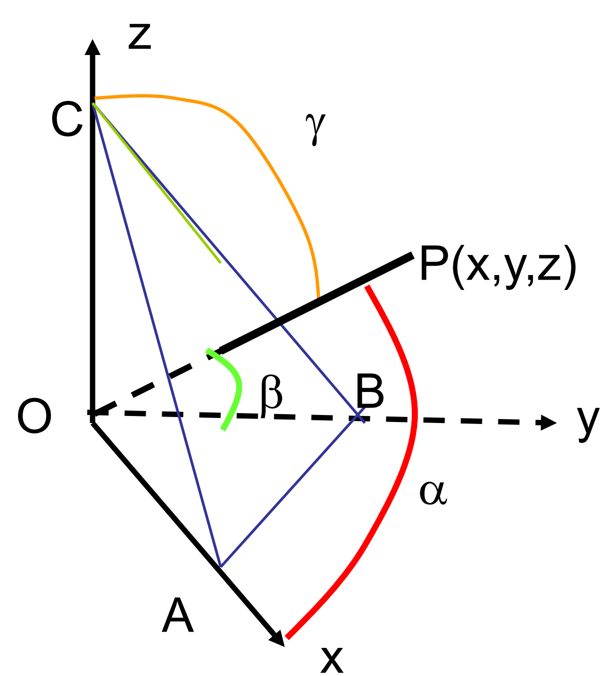
Estado de esfuerzo en un sólido homogéneo e isótropo

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \text{tensor de esfuerzos}$$

Estado de esfuerzo en un plano 3-D

En el caso del esfuerzo registrado sobre un punto en el interior de un macizo rocoso, por dicho punto pasan infinitos planos de diferente orientación. Si se determinan los vectores esfuerzo para cada uno de los planos quedará definido el estado de esfuerzos o <u>estado tensional en el punto</u>. Este estado tensional queda definido por las fuerzas por unidad de área que actúan sobre tres planos ortogonales que pasan por el punto. El estado de esfuerzos no se ve alterado por la elección del sistema de ejes de referencia, pero si sus componentes. Supongamos que el punto es O. El plano azul es combinación de los tres ejes ortogonales. Y ese plano esta definido por el vector OP





$$\text{Orientación } \overbrace{\text{ABC}}^{\wedge}$$

$$\overbrace{OPX}^{\wedge} = \alpha$$

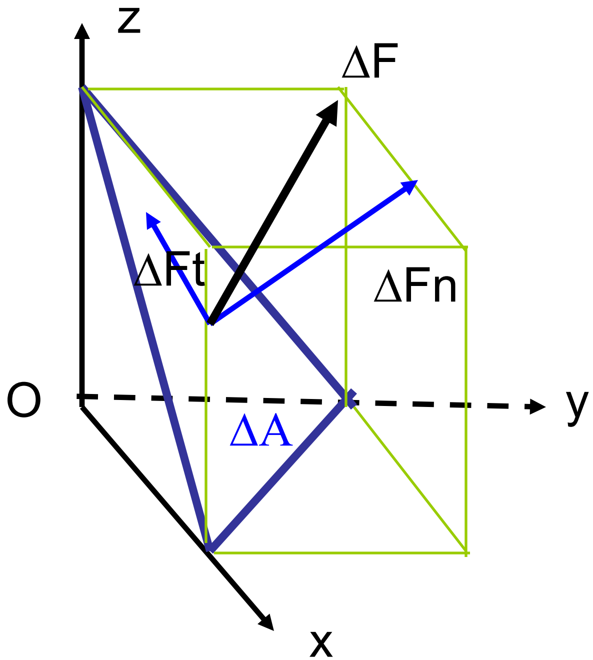
$$\overbrace{OPY}^{\wedge} = \beta$$

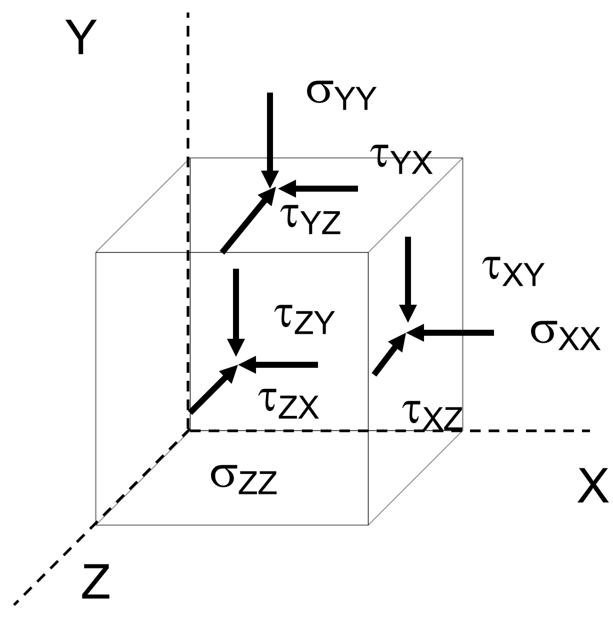
$$\overbrace{OPZ}^{\wedge} = \gamma$$

Estado de esfuerzo en un plano 3-D

Si se considera un área infinitesimal DA alrrededor del punto O, en el interior del macizo rocoso en equilibrio. AF es la fuerza resultante que actúa sobre el plano. La magnitud del esfuerzo resultante sobre el punto O, o del vector esfuerzo se define de la siguiente manera.

Si la normal a la superficie está orientada paralela a uno de los ejes, por ejemplo el X, se observa como los esfuerzos normales quedan bien definidos por el eje, mientras que los tangenciales no. El esfuerzo sobre un plano viene dado por tres componentes σ_{XX}, τ_{XY}, τ_{XZ}.





$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

$$\sigma_n = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta Fn}{\Delta A}$$

$$\tau = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta Ft}{\Delta A}$$

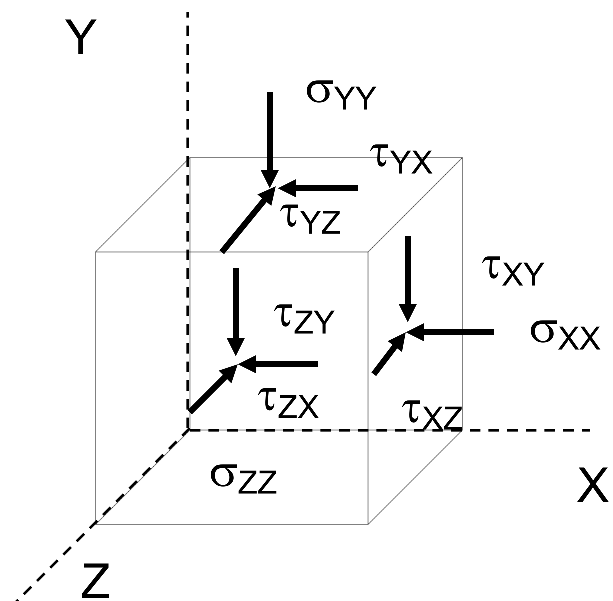
Estado de esfuerzo en un plano 3-D

La matriz de esfuerzo con nueve componentes viene definida por:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{XX} & \tau_{XY} & \tau_{XZ} \\ \tau_{YX} & \sigma_{YY} & \tau_{YZ} \\ \tau_{ZX} & \tau_{ZY} & \sigma_{ZZ} \end{bmatrix}$$

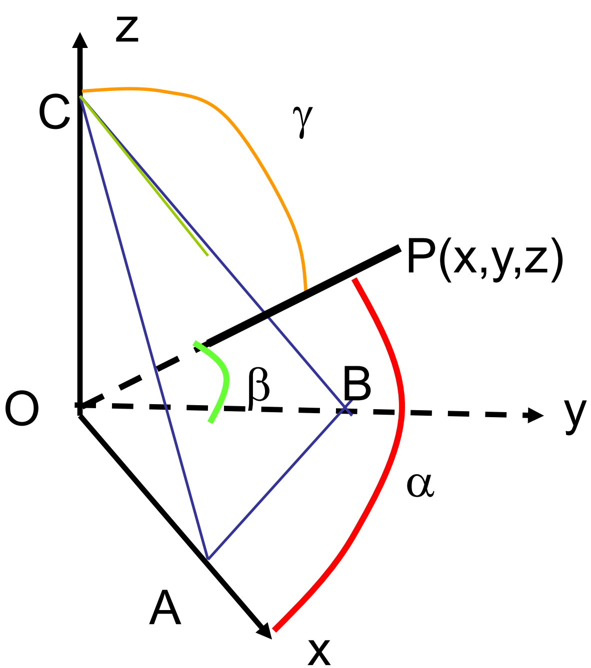
$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{XX} & \tau_{XY} & \tau_{XZ} \\ \tau_{YX} & \sigma_{YY} & \tau_{YZ} \\ \tau_{ZX} & \tau_{ZY} & \sigma_{ZZ} \end{bmatrix}$$

El estado de esfuerzo en un punto queda definido por 9 componentes. Tres normales y seis tangenciales. Si se considera que el cubo está en equilibrio debe cumplirse que: $\tau_{XY}=\tau_{YX}$; $\tau_{XZ}=\tau_{ZX}$; $\tau_{YZ}=\tau_{ZY}$ por lo que únicamente son necesarias seis componentes de esfuerzo



Cosenos directores

Supongamos ahora que el plano no es paralelo a ninguno de los tres ejes entonces para definir las componentes de esfuerzo tenemos que descomponer ese plano en los tres que constituyen el sistema de referencia a través de los cosenos directores



Orientación $\overbrace{\mathrm{ABC}}^{\wedge}$

$$\overbrace{OPX}^{\wedge} = \alpha$$

$$\overbrace{OPY}^{\wedge} = \beta$$

$$\overbrace{OPZ}^{\wedge} = \gamma$$

Coordenadas de OP siendo :

$$\mathrm{X} = \overline{OP}\cos\alpha$$

$$Y = \overline{OP}\cos\beta$$

$$Z = \overline{OP}\cos\gamma$$

Cosenos directores

$$1 = \cos\alpha$$

$$m = \cos\beta$$

$$n = \cos\gamma$$

Coordenadas OP

$$\mathrm{X} = \overline{\mathrm{OP}}\mathrm{l}$$

$$\mathrm{Y} = \overline{\mathrm{OP}}\mathrm{m}$$

$$\mathrm{Z} = \overline{\mathrm{OP}}\mathrm{n}$$

Repaso propiedades de cosenos directores

$(1)\ l^2+m^2+n^2=1 \rightarrow OP^2 = X^2+Y^2+Z^2$

$OP^2 = OP^2(l^2+m^2+n^2)$ ecuación de un elipsoide

es el elipsoide de esfuerzos

(2) Condición de dos rectas perpendiculares

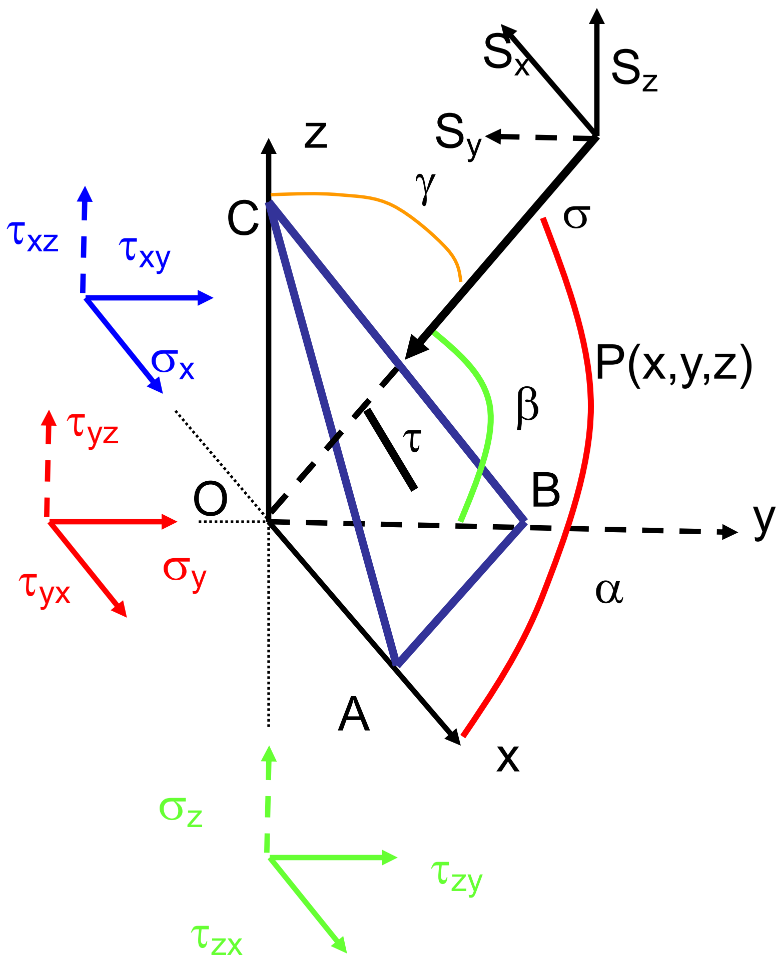
$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$

si son perpendiculares no hay ángulo entre estas dos rectas

Dada dos líneas $\begin{matrix} OP_1 \rightarrow l_1 & m_1 & n_1 \\ OP_2 \rightarrow l_2 & m_2 & n_2 \end{matrix}$

$\cos w = l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2$

Estado de esfuerzos sobre un plano en 3-D



$$S_x = \sigma l$$
$$[1]\, S_y = \sigma m$$
$$S_z = \sigma n$$

Cosenos directores

$$l = \cos\alpha$$
$$m = \cos\beta$$
$$n = \cos\gamma$$

Resolución de fuerzas que actúan en el plano ABC

$$\text{Superficie de ABC} = 1$$

$$S_x = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n$$
$$[2]\, S_y = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n$$
$$S_z = \tau_{xz} l + \tau_y zm + \sigma_y n$$
$$[3.1]\; \sigma l = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n$$
$$[3.2]\; \sigma m = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n$$
$$[3.3]\; \sigma n = \tau_{xz} l + \tau_y zm + \sigma_z n$$

$$[3.1]\ 0 = (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n$$

$$[3.2]\ 0 = \tau_{xy} l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{zy} n$$

$$[3.3]\ 0 = \tau_{xz} l + \tau_y zm + (\sigma_z - \sigma)n$$

VALOR DE LOS PRINCIPALES ESFUERZOS $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

PARA ELIMINAR (l, m, n)

$\tau_{xy} = \tau_{yx}$

$\tau_{xz} = \tau_{zx}$

$\tau_{yz} = \tau_{zy}$

Ec. [3.1] $\times\ \tau_{zy}$ (RESTAMOS)
Ec. [3.2] $\times\ \tau_{zx}$ (= [4.1] = 0)

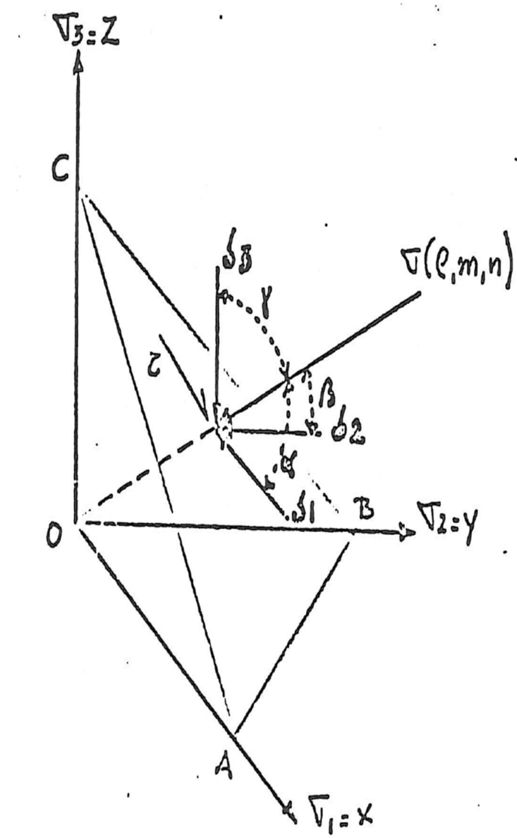
Ec. [3.2] $\times\ (\sigma_z - \sigma)$ (RESTAMOS)
Ec. [3.3] $\times\ \tau_{zy}$ (= [4.2] = 0)

IGUALANDO [4.1] = [4.2] OBTENEMOS:

$$\sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 + (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2)\sigma -$$

$$- (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2) = 0$$

ESTADO DE ESFUERZO ACTUANDO SOBRE CUALQUIER SUPERFICIE PLANA EN 3D. (σ, τ)



$\widehat{ABC} = \text{AREA} = 1$

$\cos\alpha = l$
$\cos\beta = m$
$\cos\gamma = n$

[1] COMPONENTES DE ESFUERZO σ $\begin{cases} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{cases}$

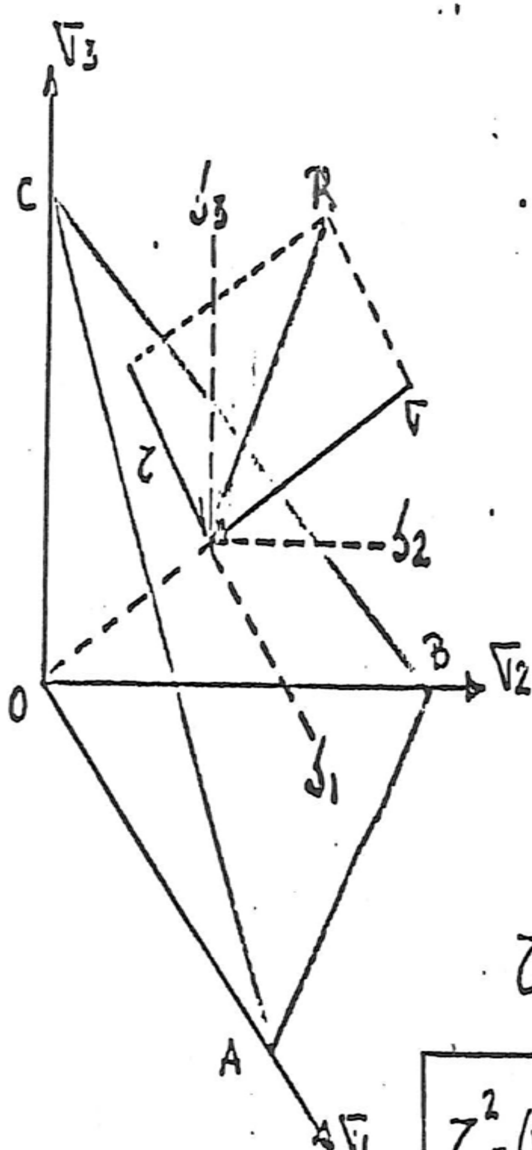
$$\sigma = S_1 l + S_2 m + S_3 n$$

[2] RESOLUCION DE ESFUERZOS:

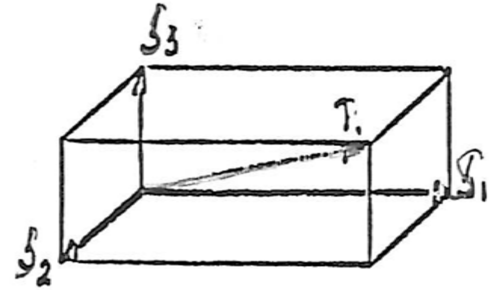
$$S_1 = \sigma_1 l$$
$$S_2 = \sigma_2 m$$
$$S_3 = \sigma_3 n$$

[2] $\longrightarrow$ [1] $\boxed{\sigma = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2}$

CALCULO DE ESFUERZO τ SOBRE EL PLANO $\overset{\triangle}{ABC}$



$$R^2 = \sigma^2 + \tau^2$$



$$R^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$$

$$R^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2$$

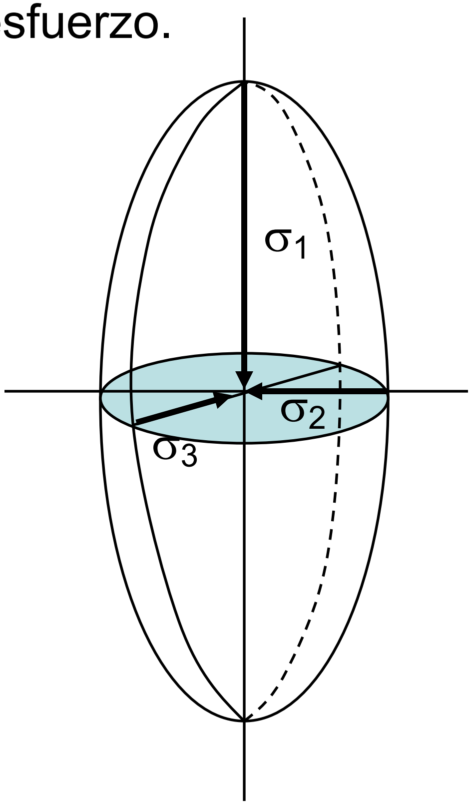
$$\tau^2 = R^2 - \sigma^2$$

$$\tau^2 = \left(\sigma_1^2 l^2 + m^2\sigma_2^2 + n^2\sigma_3^2\right)^2 - \left(\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2\right)^2$$

$$\boxed{\tau^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 l^2 m^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 m^2 n^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 n^2 l^2}$$

Elipsoide de esfuerzos

El estado tensional de un punto en tres dimensiones queda representado por un elipsoide. Los tres planos que aparecen retratados en el elipsoide y que contienen los tres esfuerzos principales son los planos principales de esfuerzo.



<u>Forma del elipsoide</u>

Uniaxial: $\sigma_1 \neq 0; \sigma_2 = 0; \sigma 3 = 0$

Biaxial: $\sigma_1 \neq 0; \sigma_2 = 0; \sigma 3 \neq 0$

Triaxial: $\sigma_1 \neq 0; \sigma_2 \neq 0; \sigma 3 \neq 0$

<u>Valor relativo de los esfuerzos</u>

Axial: $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma 3$

Poliaxial: $\sigma_1 \neq 0; \sigma_2 \neq 0; \sigma 3 \neq 0$

Hidrostático: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma 3 \neq 0$

Tensor de esfuerzos

Esfuerzo de cizallamiento (τ). (Ramsay)