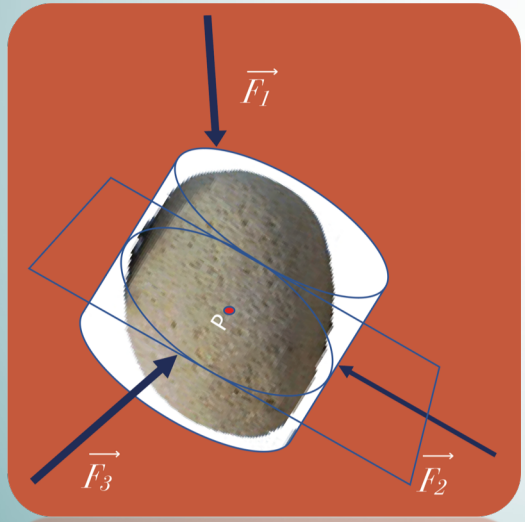
Caracterización geomecánica de suelos y rocas

Tema 3.3 El círculo de Mohr y para qué sirve



Alberto González Díez

Patricio Martínez Cedrún

DPTO. DE CIENCIAS DE LA TIERRA Y FÍSICA DE LA MATERIA CONDENSADA (CITIMAC)

Este tema se publica bajo Licencia:

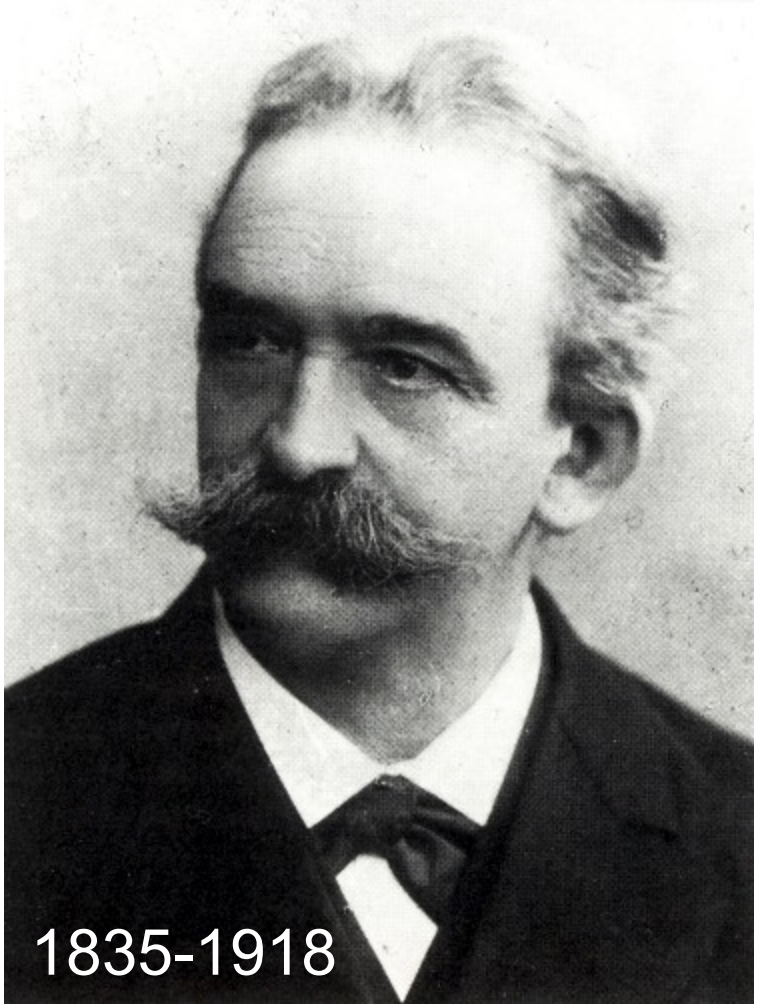
Creative Commons BY-NC-SA 4.0

El Círculo de Mohr
y
Para qué sirve

Finalidad del Círculo de Mohr

El tensor de Cauchy es una herramienta importante para conocer las tensiones.
Sin embargo, cambiar el sistema de referencia requiere de operaciones algebraicas complejas.
El método de Mohr es una herramienta muy intuitiva para resolver el cambio de sistema de referencia, pues permite tener una representación gráfica del estado de esfuerzos.

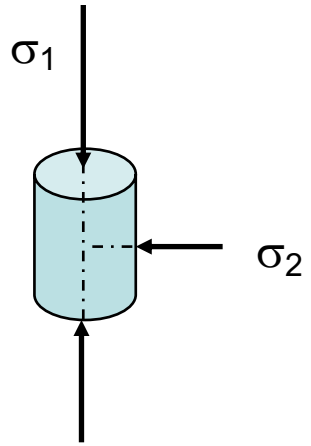
Ese mago llamado Otto Mohr

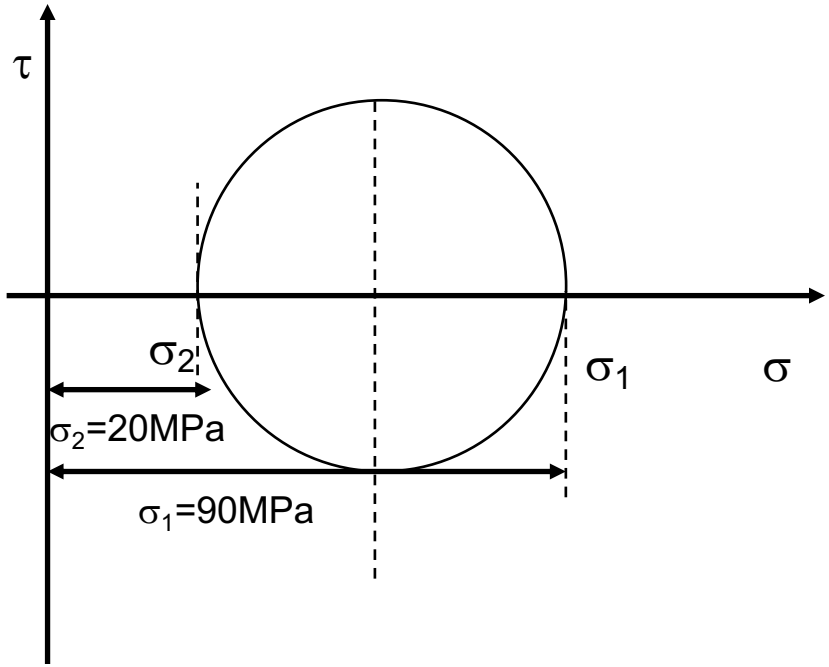


https://es.wikipedia.org/wiki/Christian_Otto_Mohr

¡A ver si sabes más que “Wikipedia”!

- El **círculo de Mohr** es una técnica gráfica usada en ciencia y tecnología que permite representar gráficamente los esfuerzos que actúan sobre un plano, y a partir de dicha representación calcular: tensiones, deformaciones, momentos de inercia, etc.





Qué hace falta para entender cómo funciona el Círculo de Mohr

- Cómo actúan las tensiones sobre un objeto
- Cómo se construye dicha representación gráfica

¿Cómo se construye su representación gráfica?

$$[3.1]\ \sigma\cos\varphi = \sigma_x\cos\varphi + \tau_{yx}\sin\varphi$$

$$[3.2]\ \sigma\sin\varphi = \sigma_y\sin\varphi + \tau_{xy}\cos\varphi$$

Si jugamos con las ecuaciones

$$[17.1]\ (\sigma-\sigma_x)\cos\varphi = \tau_{yx}\sin\varphi$$

$$[17.2]\ (\sigma-\sigma_y)\sin\varphi = \tau_{xy}\cos\varphi$$

$$[18.1]\ (\sigma-\sigma_x) = \tau_{yx}\sin\varphi/\cos\varphi;\quad [19.1]\ (\sigma_x-\sigma)+\tau_{yx}\tan\varphi = 0$$

$$[18.2]\ (\sigma-\sigma_y) = \tau_{xy}\cos\varphi/sen\varphi;\quad [19.2]\ (\sigma_y-\sigma)+\tau_{xy}\frac{1}{\tan\varphi} = 0$$

$$(\sigma_x-\sigma)\frac{\tan\varphi}{\tau_{xy}} + \tau_{yx}\tan\varphi\frac{\tan\varphi}{\tau_{xy}} = (\sigma_y-\sigma)\frac{\tan\varphi}{\tau_{xy}} + \tau_{xy}\frac{1}{\tan\varphi}\frac{\tan\varphi}{\tau_{xy}}$$

$$(\sigma_x-\sigma)\frac{\tan\varphi}{\tau_{xy}} + \tan^2\varphi = (\sigma_y-\sigma)\frac{\tan\varphi}{\tau_{xy}};\quad (\sigma_x-\sigma)\frac{\tan\varphi}{\tau_{xy}} + \tan^2\varphi - (\sigma_y-\sigma)\frac{\tan\varphi}{\tau_{xy}} = 0$$

$$(\sigma_x-\sigma)\frac{\tan\varphi}{\tau_{xy}} - (\sigma_y-\sigma)\frac{\tan\varphi}{\tau_{xy}} + \tan^2\varphi = 0;\quad \boxed{[20]\ \tan^2\varphi + \tan\varphi\frac{(\sigma_x-\sigma_y)}{\tau_{xy}} - 1 = 0}$$

Otra forma de decir lo mismo

$$[17.1](\sigma-\sigma_x)=\tau_{yx}\sin\varphi/\cos\varphi;\ \text{dividimos por}\ \cos\varphi\ \Rightarrow[18.1](\sigma_x-\sigma)+\tau_{yx}\tan\varphi=0$$

$$[17.2](\sigma-\sigma_y)=\tau_{xy}\cos\varphi/sen\varphi;\ \text{dividimos por}\ \cos\varphi\ \Rightarrow[18.2](\sigma_y-\sigma)+\tau_{xy}\frac{1}{\tan\varphi}=0$$

$$\tan\varphi=\frac{-(\sigma_x-\sigma)}{\tau_{yx}}\quad[19.1]$$

$$\tan\varphi=-\frac{\tau_{xy}}{(\sigma_y-\sigma)}\quad[19.2]$$

igualamos [19.1] y [19.2]

$$\frac{-\tau_{xy}}{(\sigma_y-\sigma)}=\frac{-(\sigma_x-\sigma)}{\tau_{yx}};\Rightarrow -(\tau_{yx})^2=(\sigma_y-\sigma)*(\sigma-\sigma_x)$$

¿EUREKA!

Es la ecuación de un círculo

$$\sigma_y\sigma-\sigma_y\sigma_x-\sigma^2+\sigma_x\sigma=-(\tau_{yx})^2$$

$$-\sigma^2+\sigma(\sigma_y+\sigma_x)-\sigma_y\sigma_x=-(\tau_{yx})^2$$

$$+\sigma^2-\sigma(\sigma_y+\sigma_x)+\sigma_y\sigma_x=+(\tau_{yx})^2$$

$$\boxed{\sigma^2-\sigma(\sigma_x+\sigma_y)+\sigma_y\sigma_x-(\tau_{yx})^2=0}\quad[21]$$

$$x^2+y^2=r^2$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0$$

$$\sigma^2=(x-a)^2$$

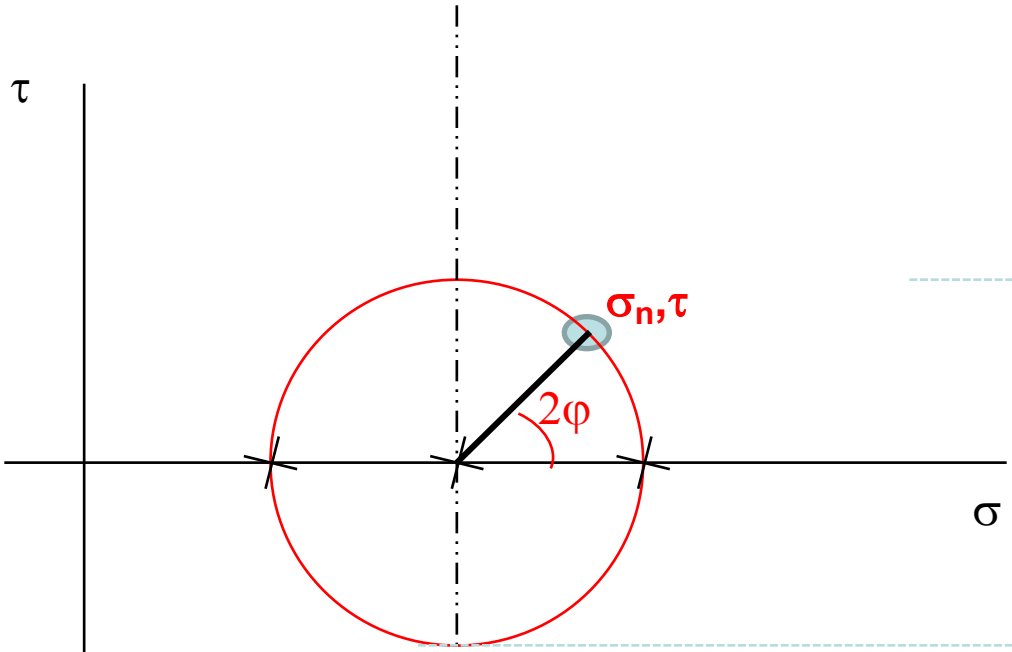
$$(\tau_{yx})^2=(y-b)^2$$

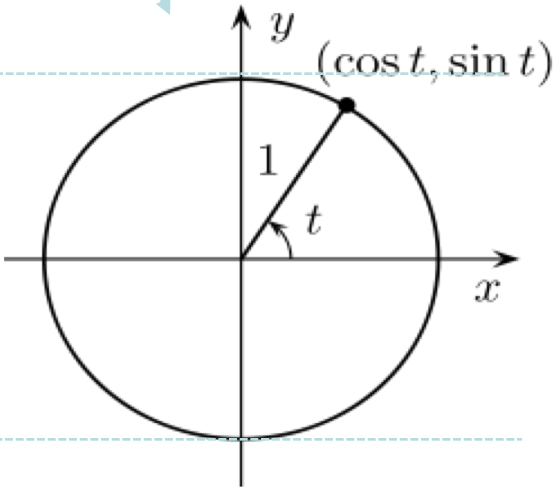
$$\sigma(\sigma_x+\sigma_y)+\sigma_y\sigma_x=r$$

Otra forma de mirar que se trata de un círculo es la siguiente

La ecuación de una circunferencia en coordenadas paramétricas, con centro en (*a*, *b*) y radio *c* se parametriza con funciones trigonométricas como:

$$x = a + c\cos t;\ y = b + c\sin t; \rightarrow t \in [0, 2\pi]$$



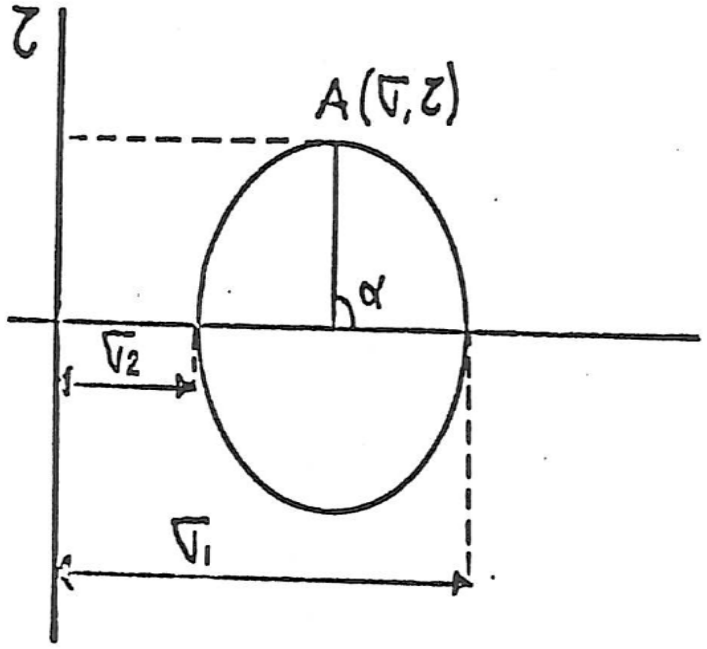


$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\varphi + \tau_{xy} sen2\varphi$$

$$\tau = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} sen2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi$$

Ecuaciones paramétricas del círculo de Mohr

Ángulo doble



$\alpha = 90°$

$\alpha = 2\varphi$

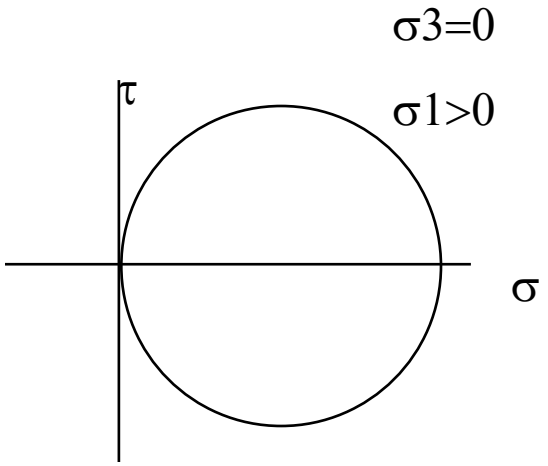
$\varphi = \frac{\alpha}{2} = 45°$

PARA UNA ORIENTACION DEL PLANO $\perp$ T. $\varphi = 45°$

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

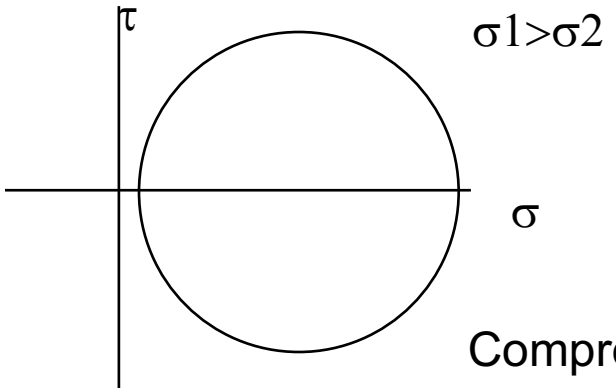
$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

Tipos de diagramas de esfuerzo



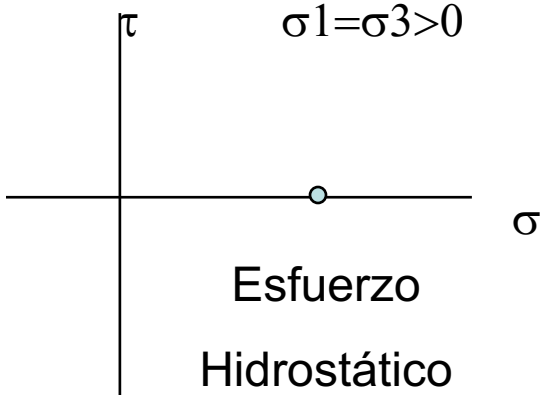
Compresión

Uniaxial



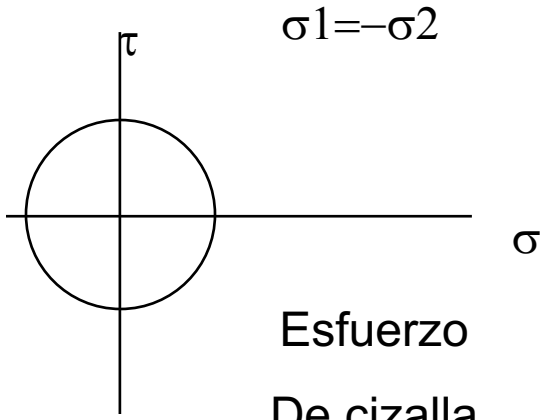
Compresión

general



Esfuerzo

Hidrostático

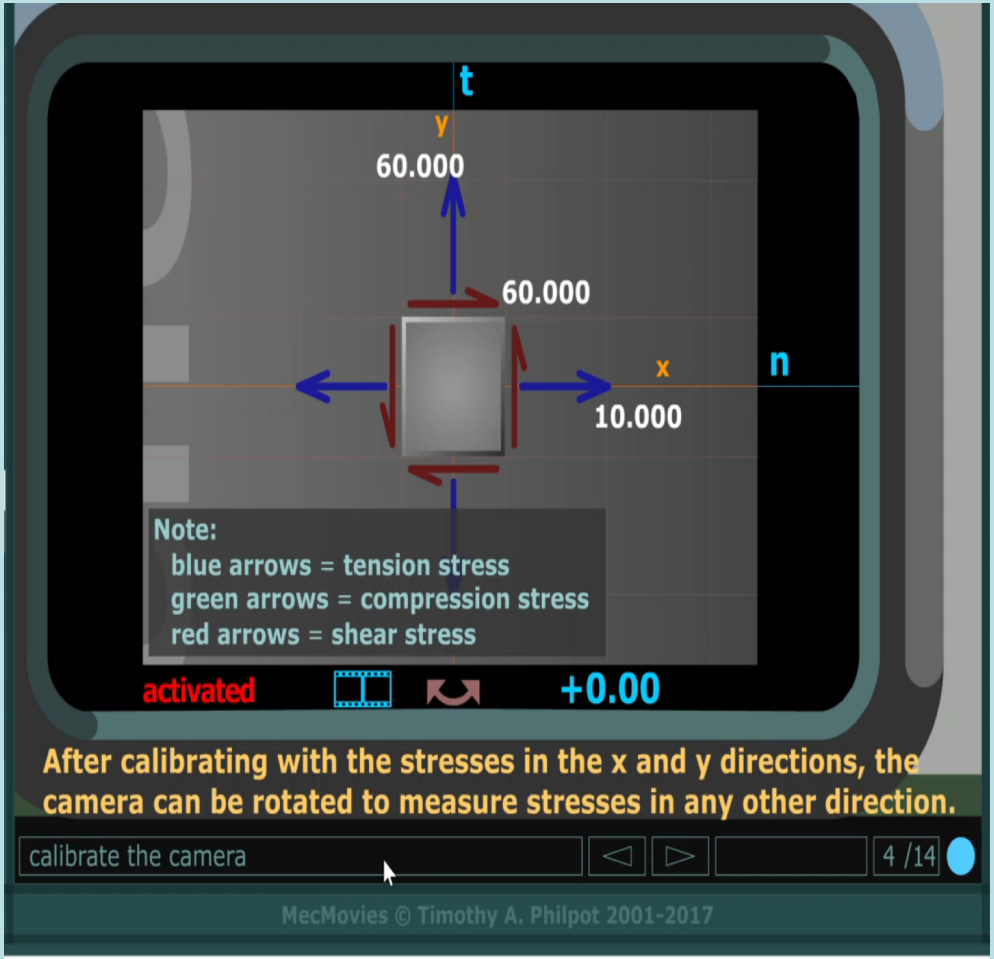


Esfuerzo

De cizalla

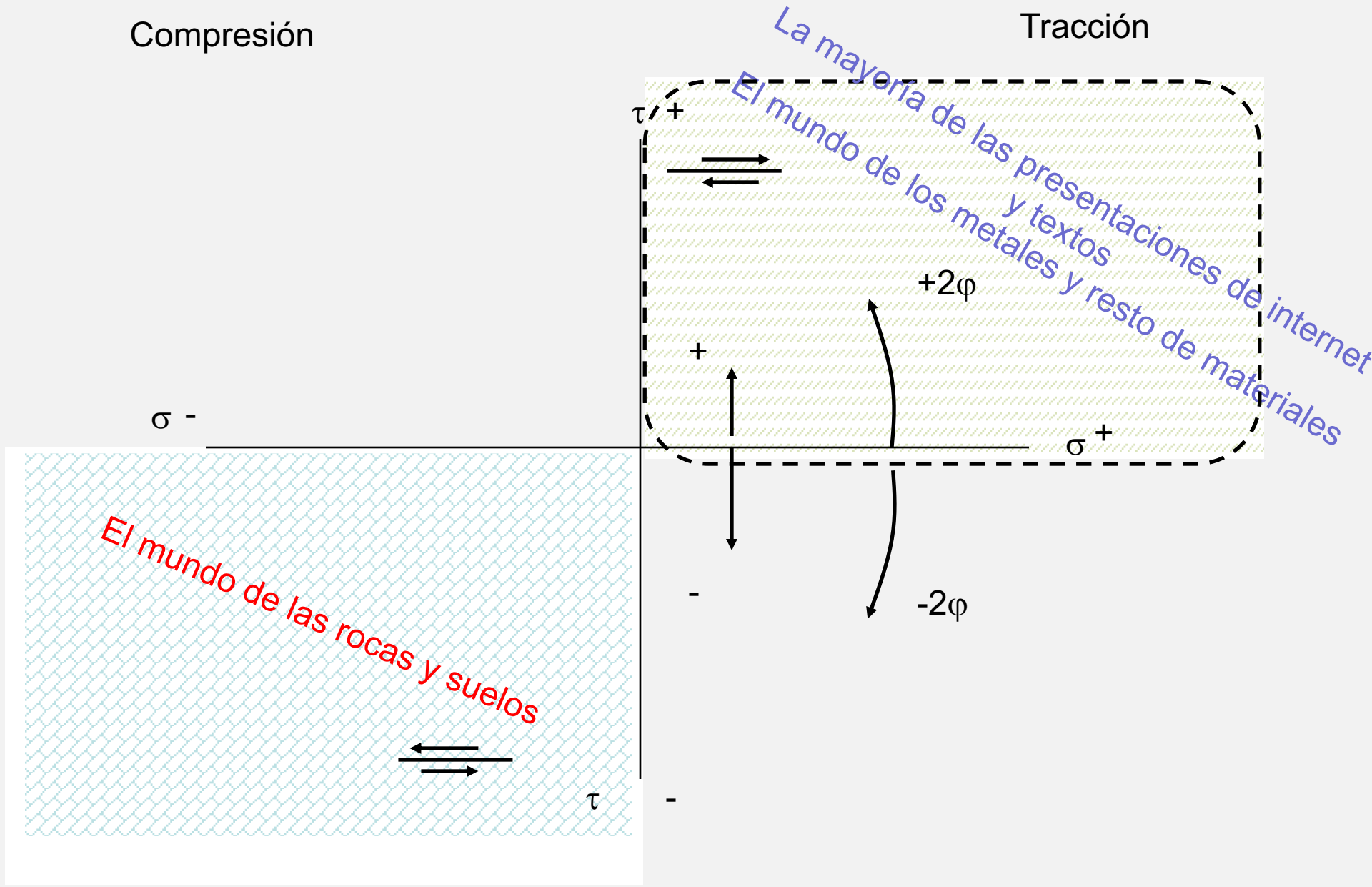
puro

Volvamos a la “cámara de esfuerzos” y fijémonos en los signos

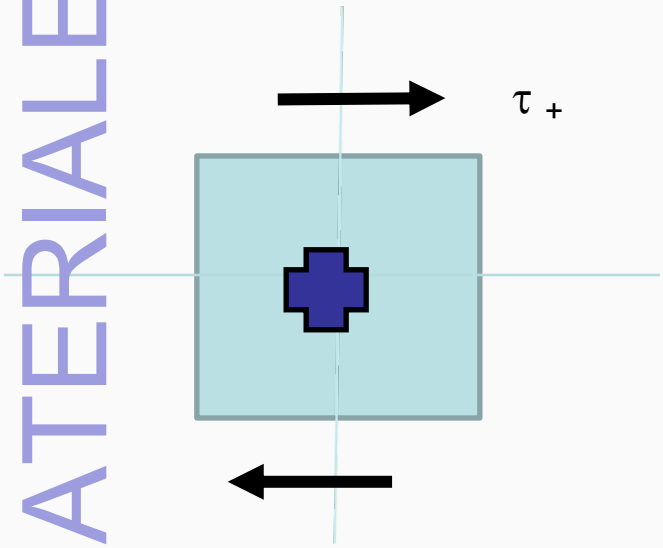


C. T.A. Philpot (Mec-Movies), 2017

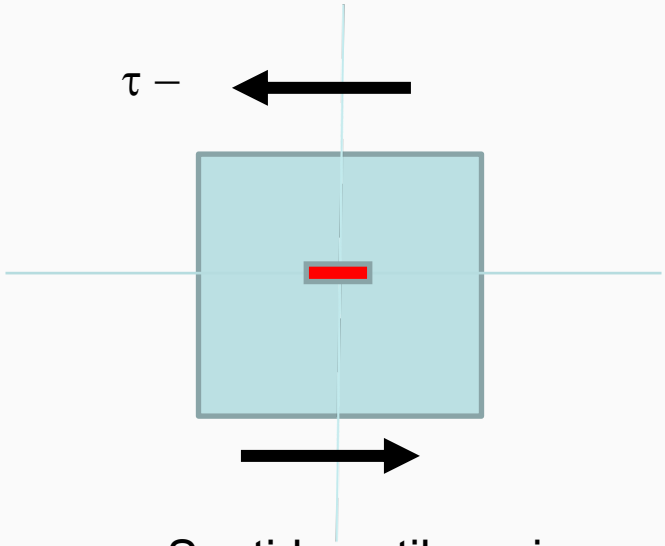
Signos del círculo de esfuerzos



Criterio de signos, tracción



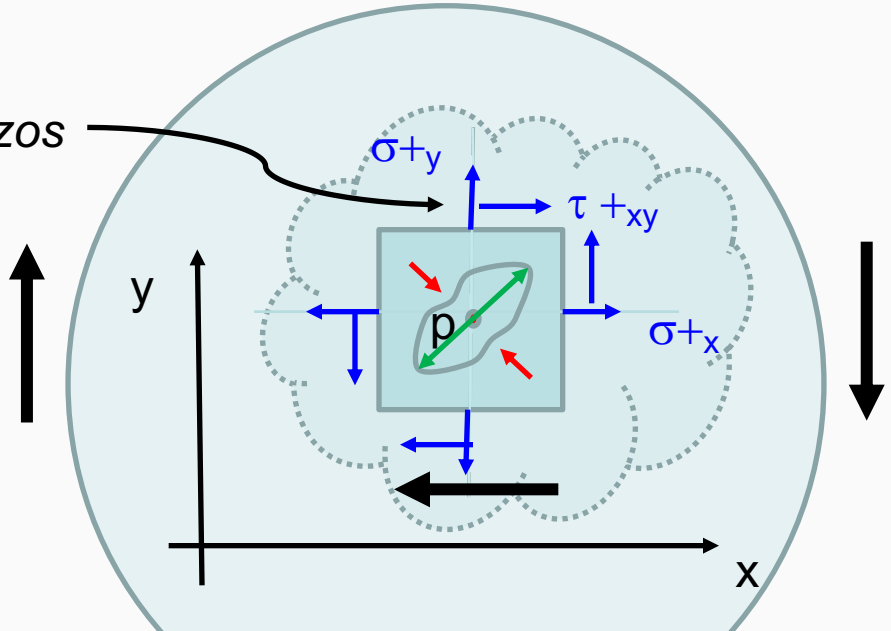
Sentido horario

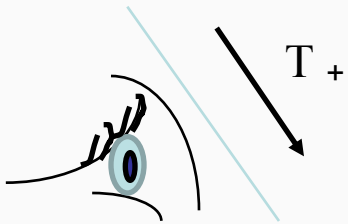


Sentido antihorario

Signo de las coordenadas dentro del círculo

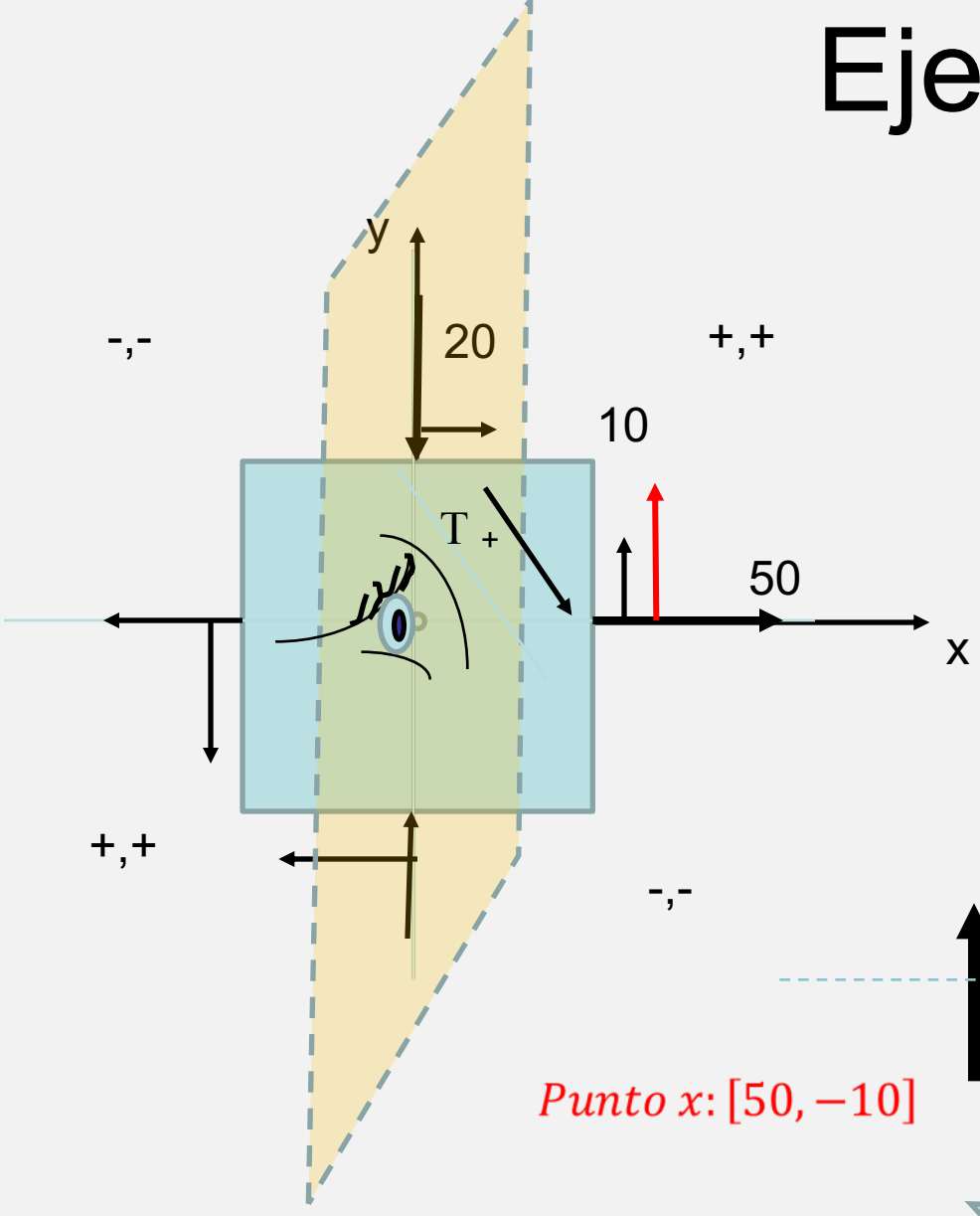
Signo esfuerzos



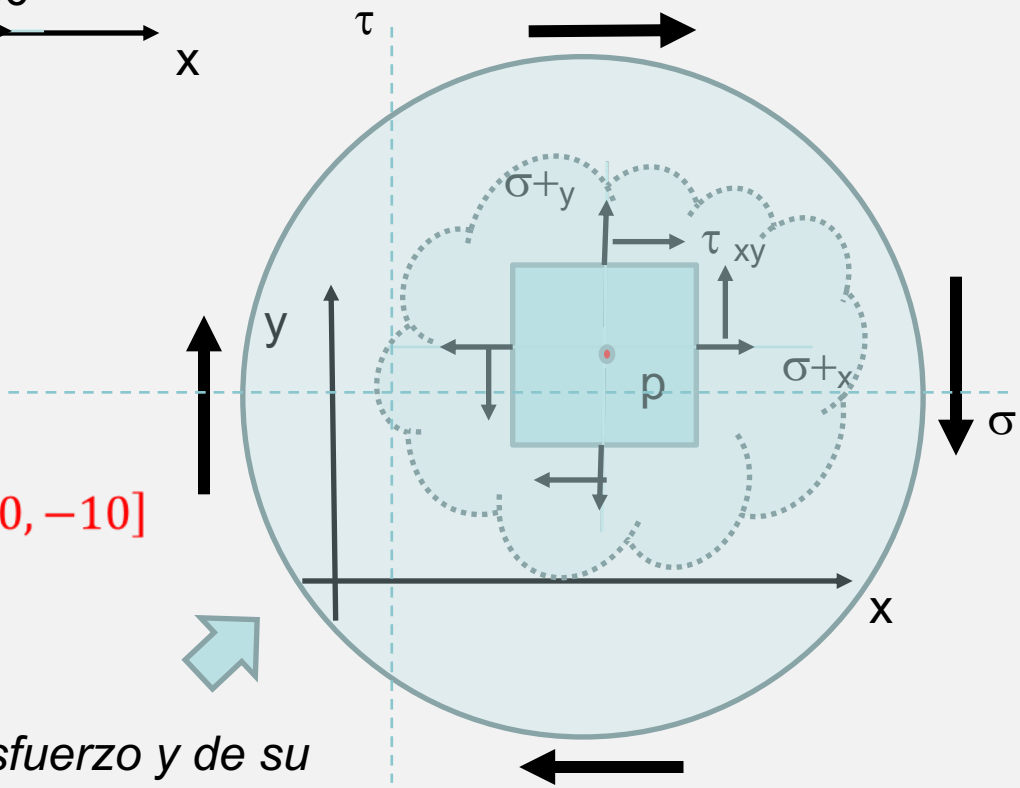


Porqué no miras desde dentro de punto

Ejemplo criterio tracción



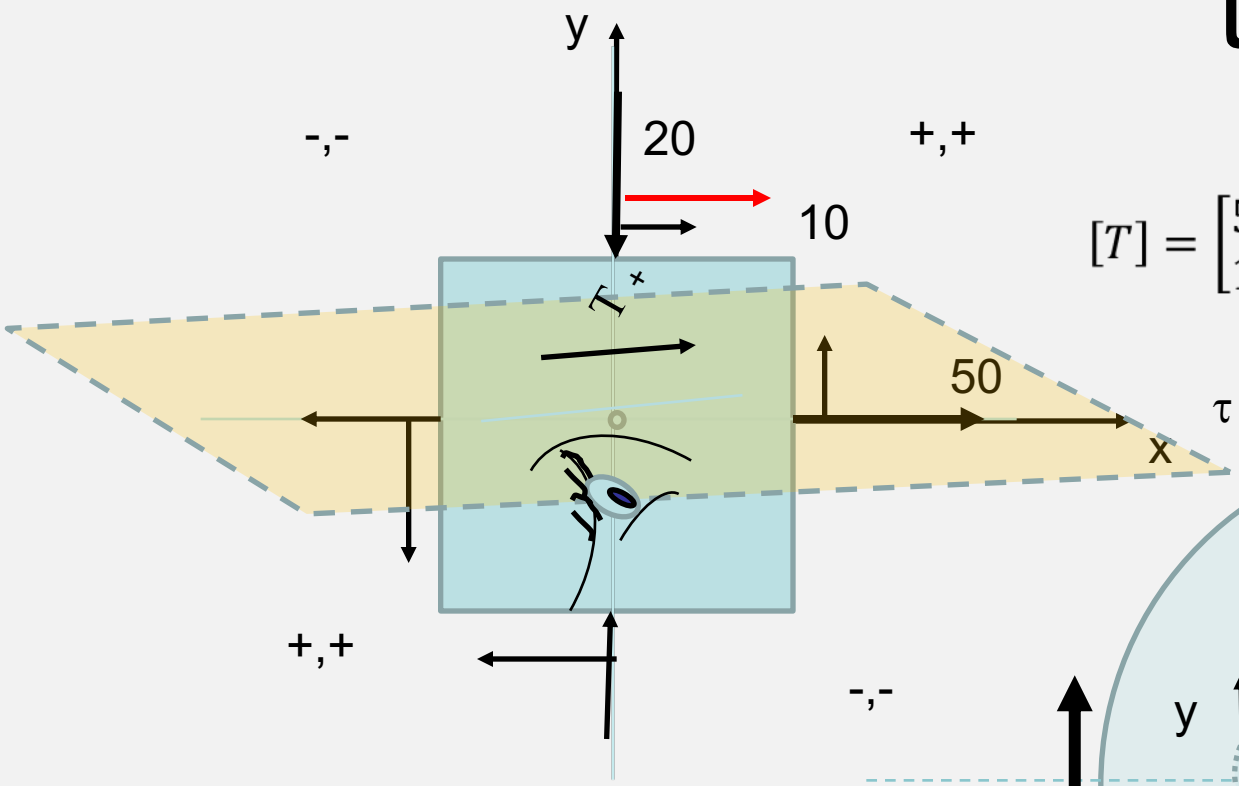
$$[T] = \begin{bmatrix} 50 & 10 \\ 10 & -20 \end{bmatrix}$$



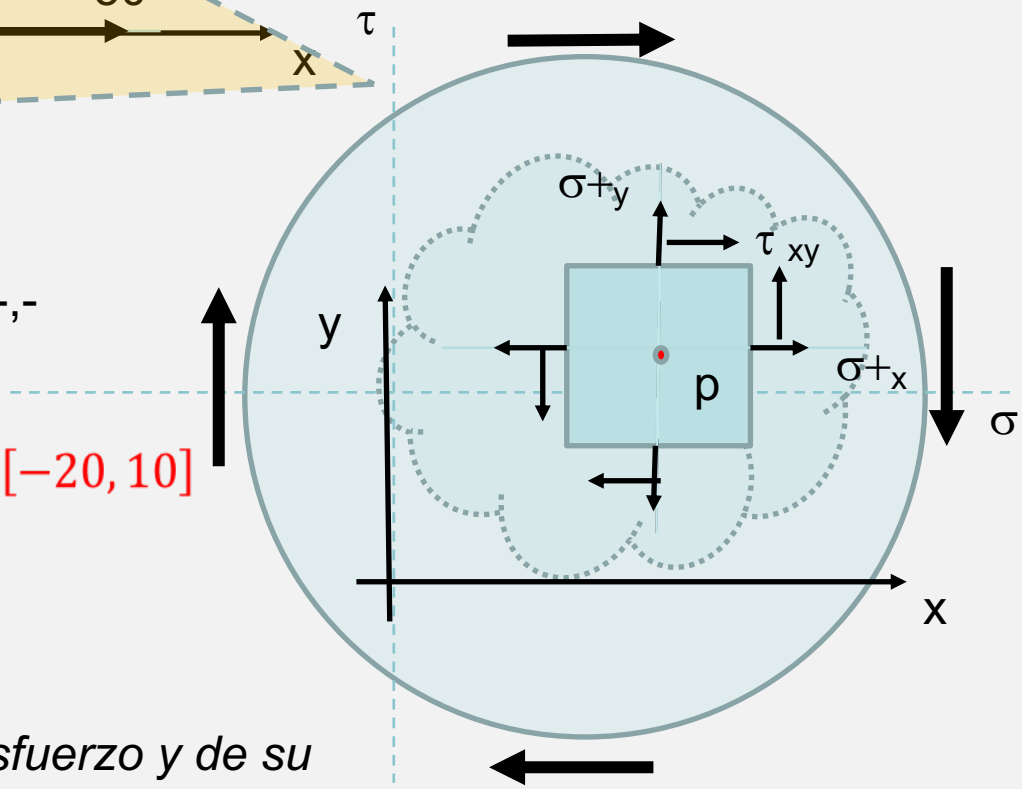
Punto x: [50, −10]

Criterio de signos de esfuerzo y de su representación en el círculo de Mohr

Ejemplo criterio tracción



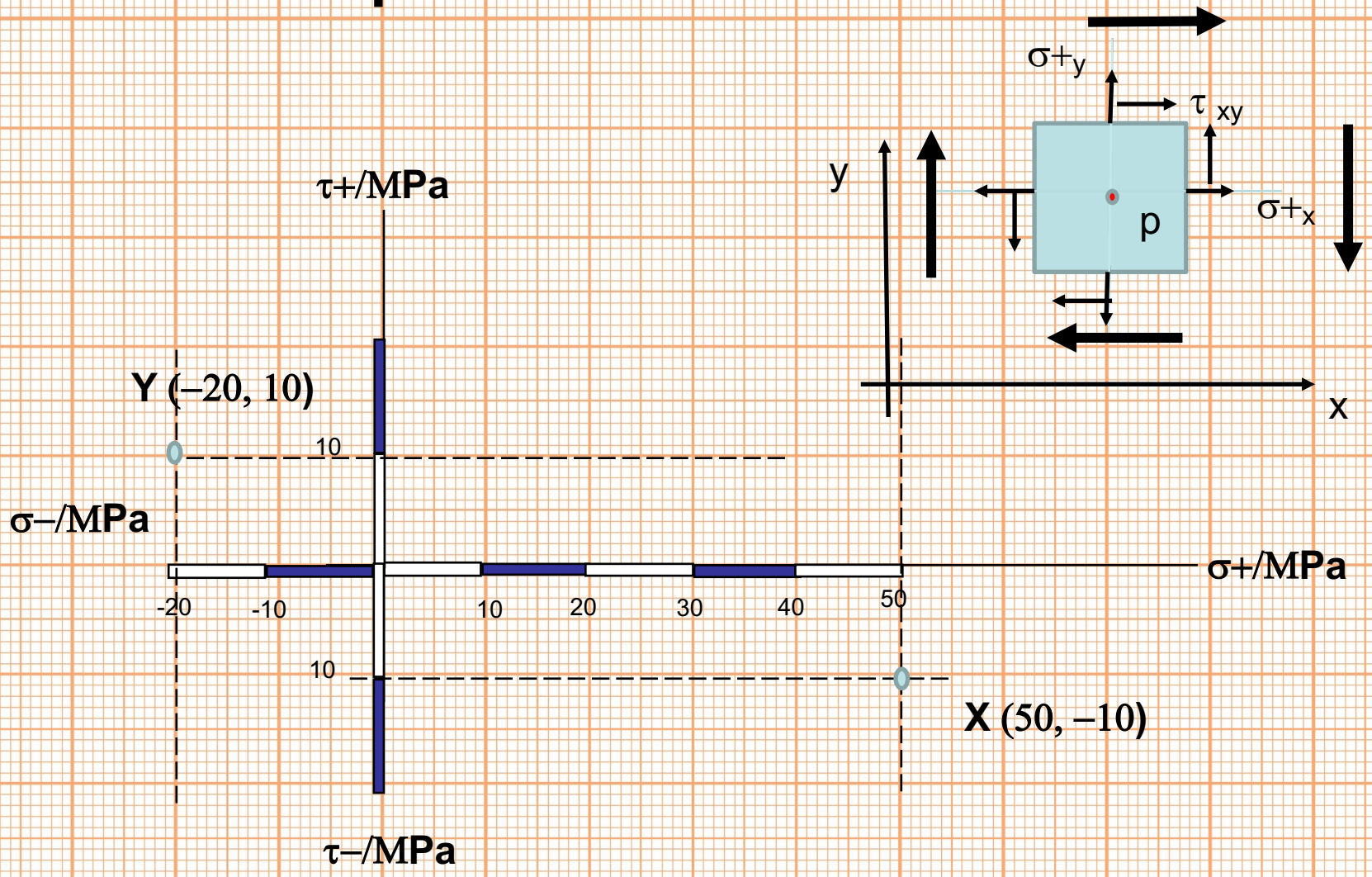
$$[T] = \begin{bmatrix} 50 & 10 \\ 10 & -20 \end{bmatrix}$$



Punto y: $[-20, 10]$

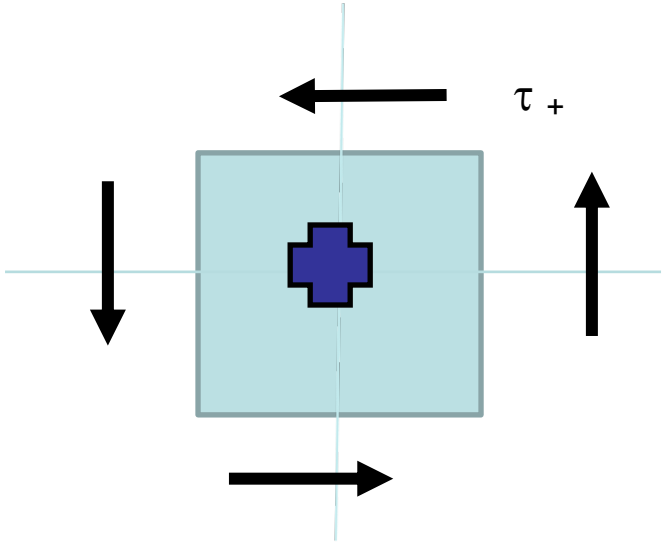
Criterio de signos de esfuerzo y de su representación en el círculo de Mohr

En la representación de Mohr

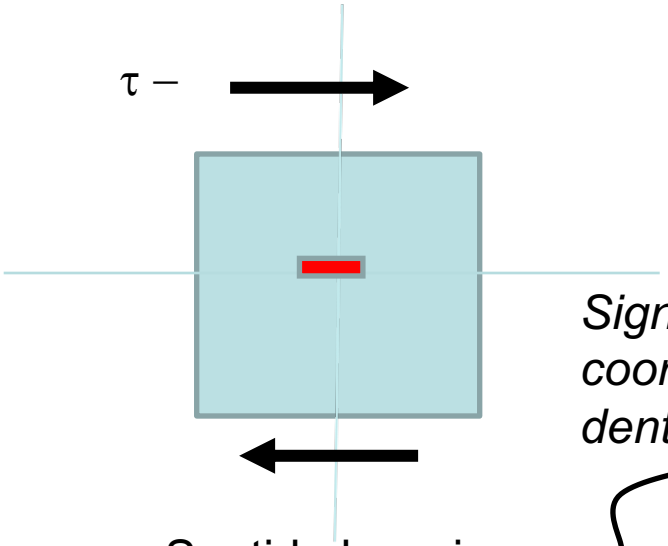


Criterio de signos, compresión

ROCAS Y SUELOS



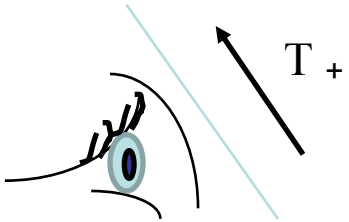
Sentido antihorario



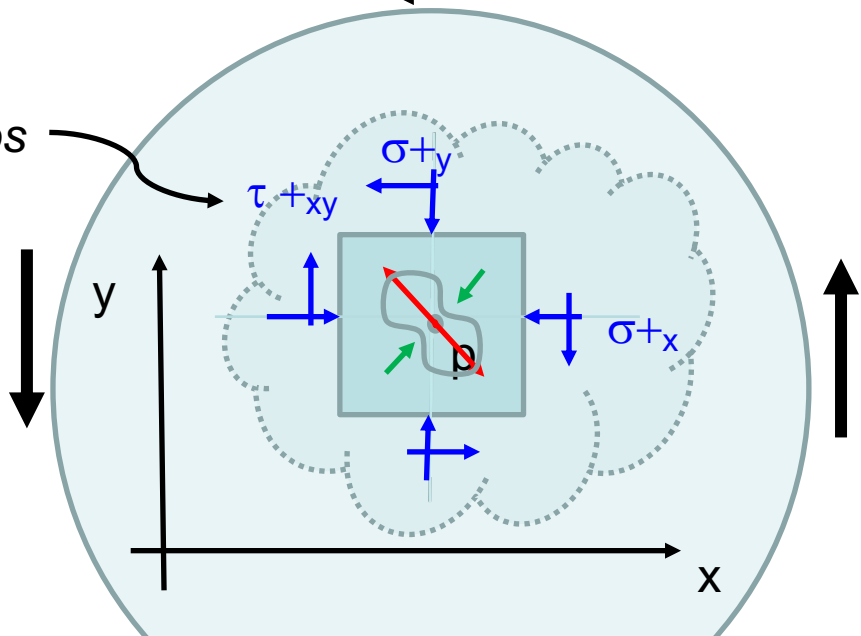
Sentido horario

Signo de las coordenadas dentro del círculo

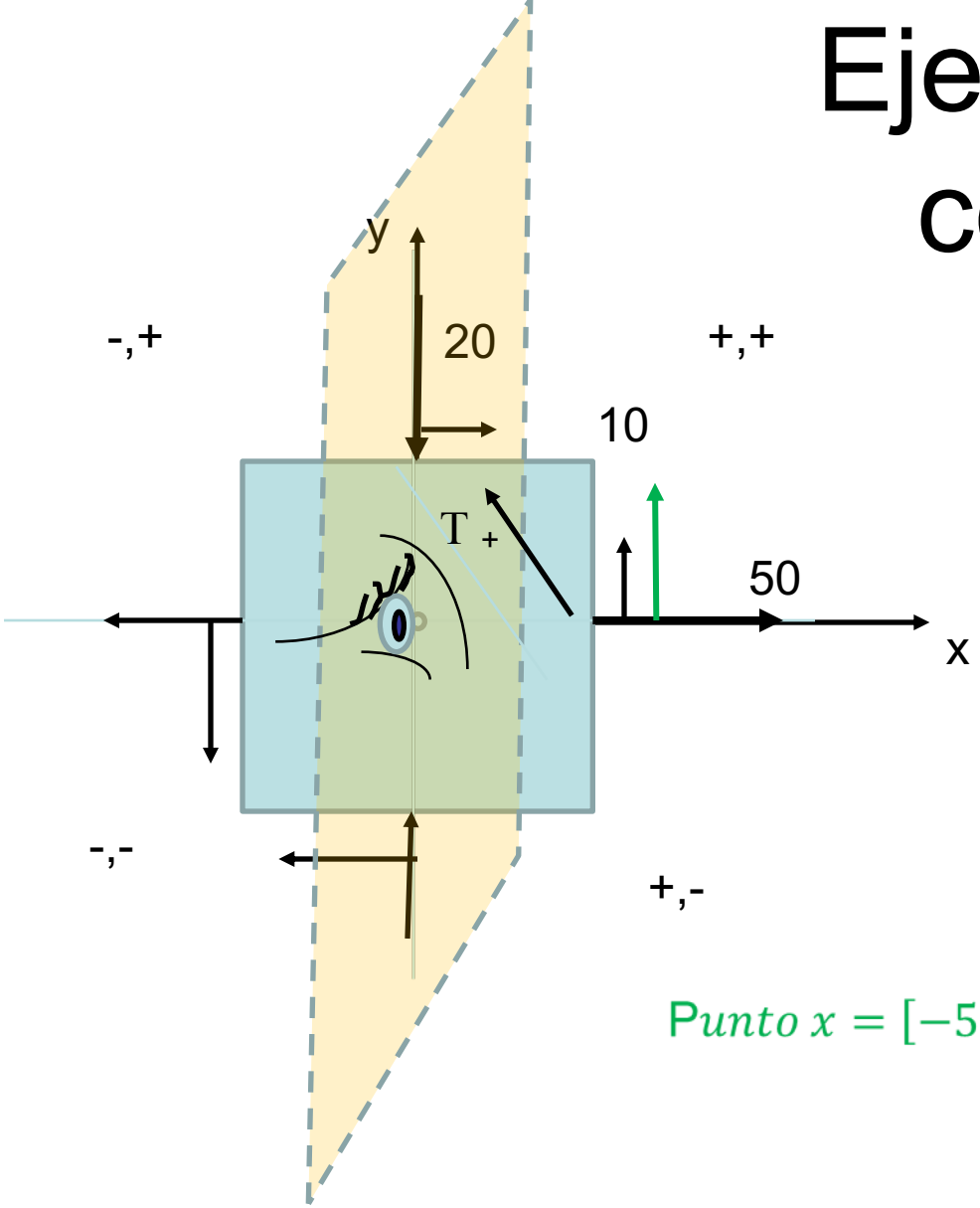
Signo esfuerzos



Porqué no miras desde dentro de punto



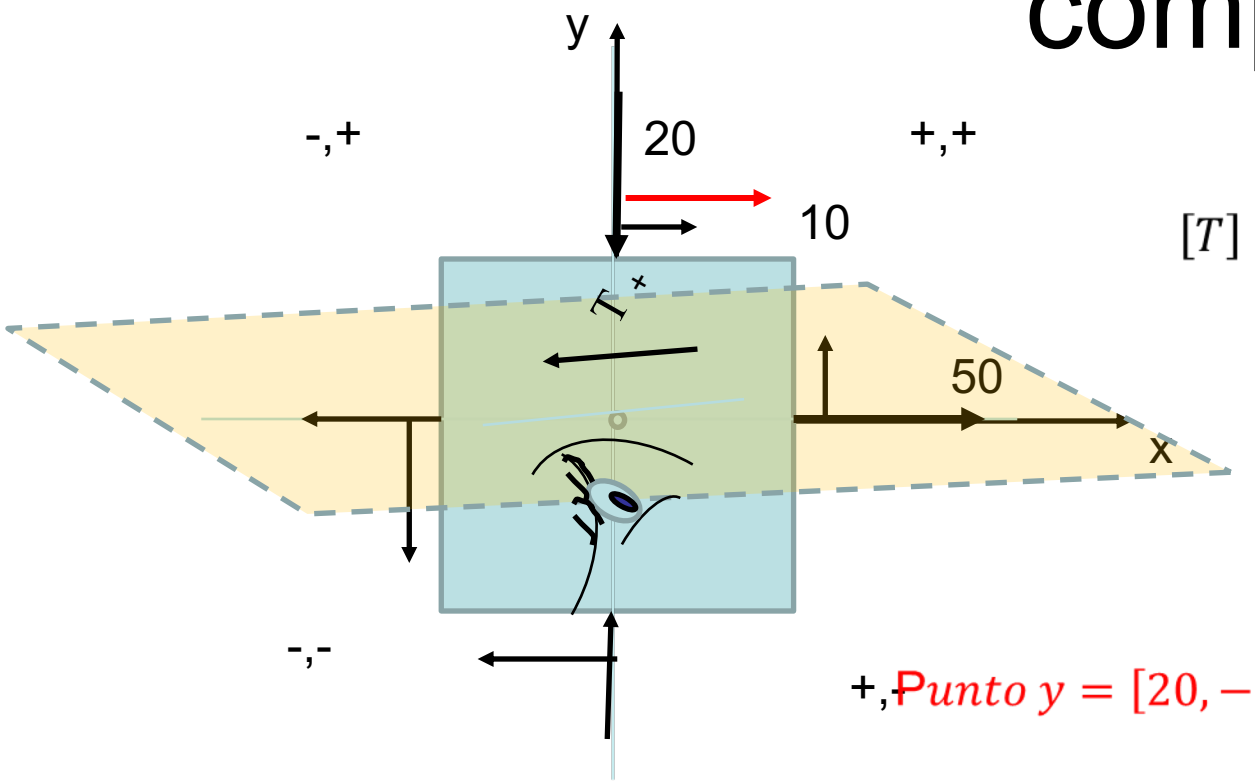
Ejemplo criterio compresión



$$[T] = \begin{bmatrix} -50 & 10 \\ 10 & 20 \end{bmatrix}$$

$$Punto\ x = [-50,10]$$

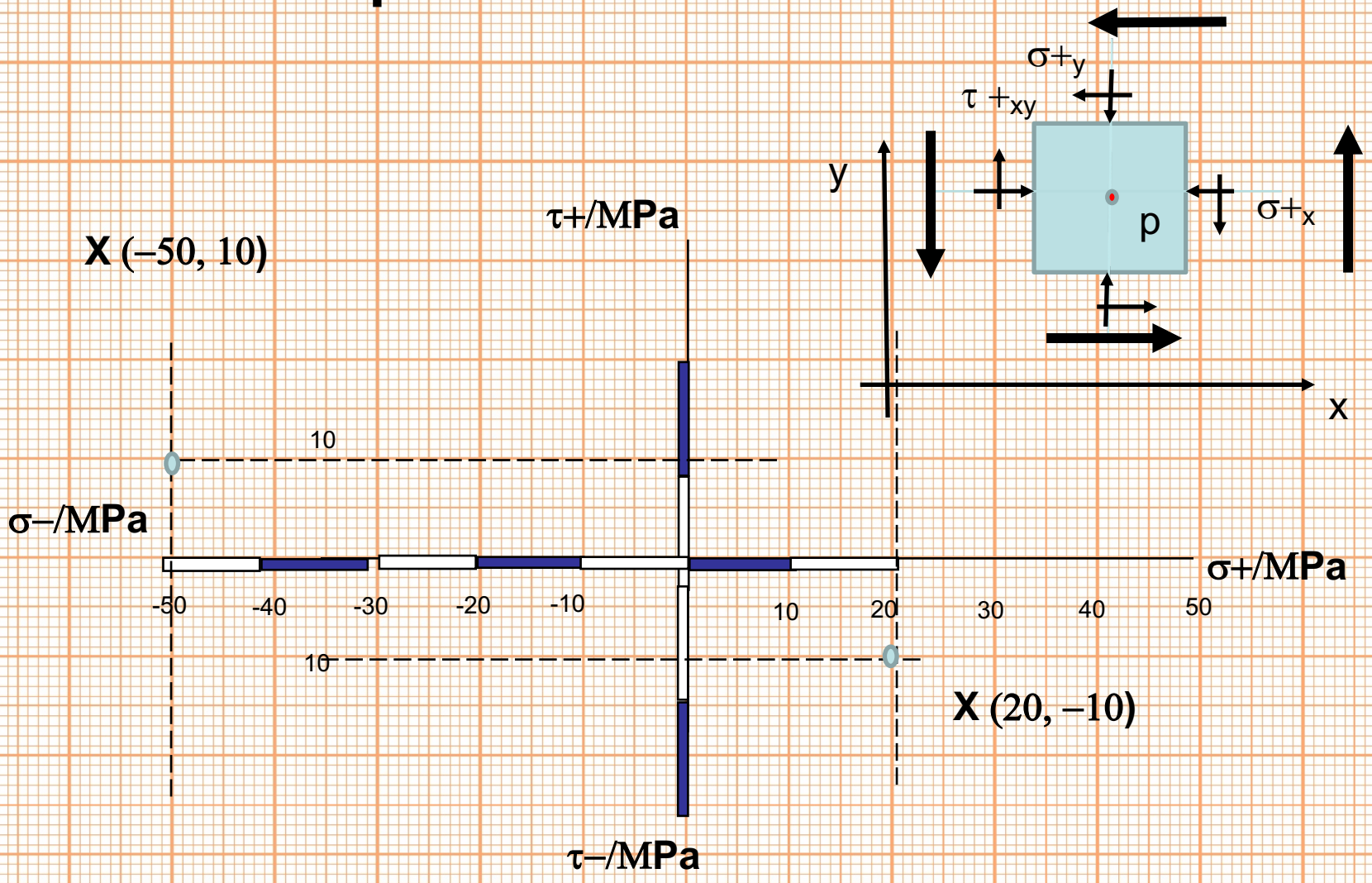
Ejemplo criterio compresión



$$[T] = \begin{bmatrix} -50 & 10 \\ 10 & 20 \end{bmatrix}$$

$Punto\ y = [20, -10]$

En la representación de Mohr

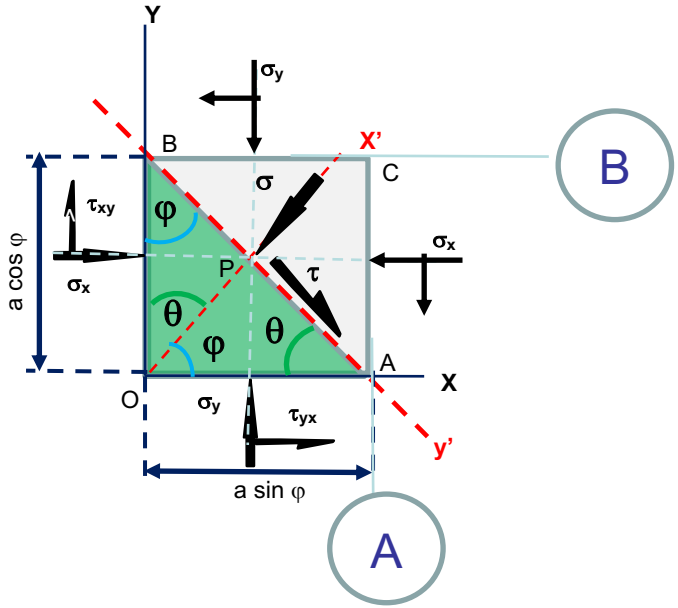


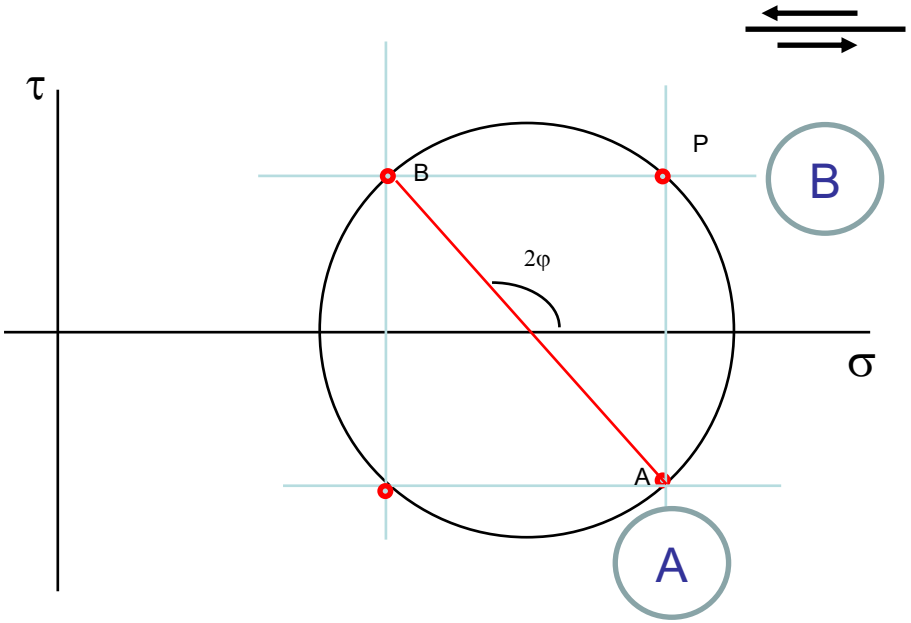
El Polo del círculo de Mohr

El polo (P) es un punto del círculo de Mohr, con la siguiente propiedad única:

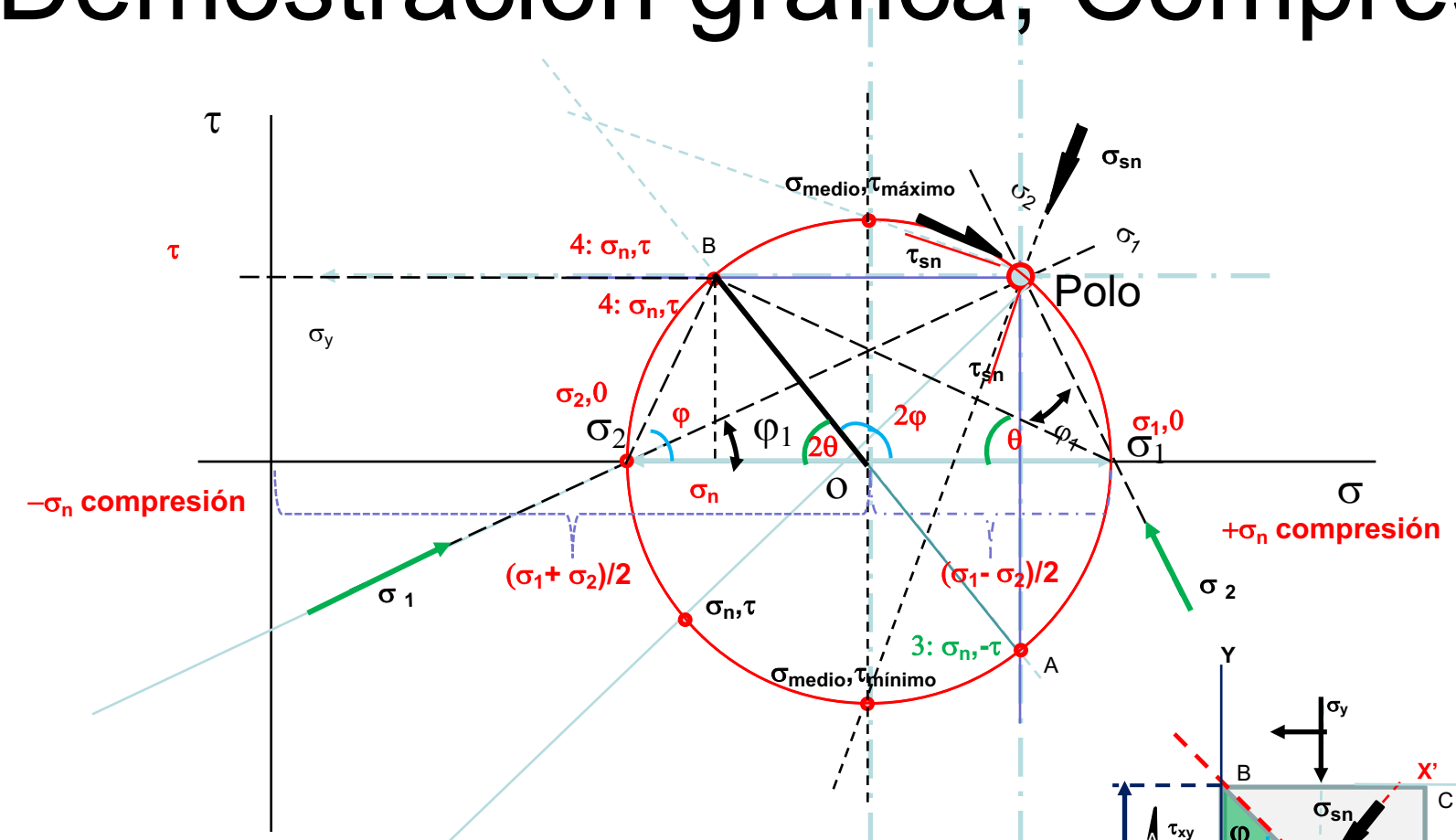
-una línea trazada a partir del polo **paralela a un plano dado en el sólido**, cortará el círculo de Mohr en un punto cuyas coordenadas corresponden a las componentes σ y τ del esfuerzo en ese plano.

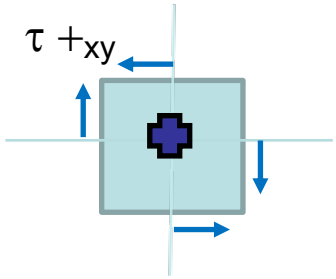
En consecuencia, existe una relación entre: 1. El estado de esfuerzos en cualquier plano. 2. La dirección de dicho plano en el sólido. 3. La posición del polo en el círculo de Mohr.



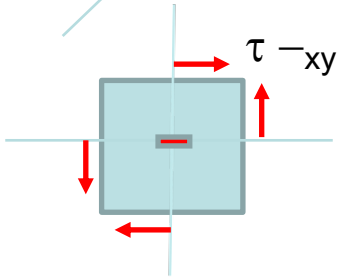


Demostración gráfica, Compresión

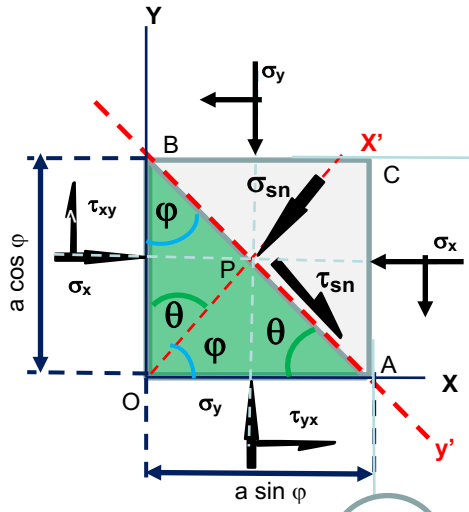




Sentido antihorario



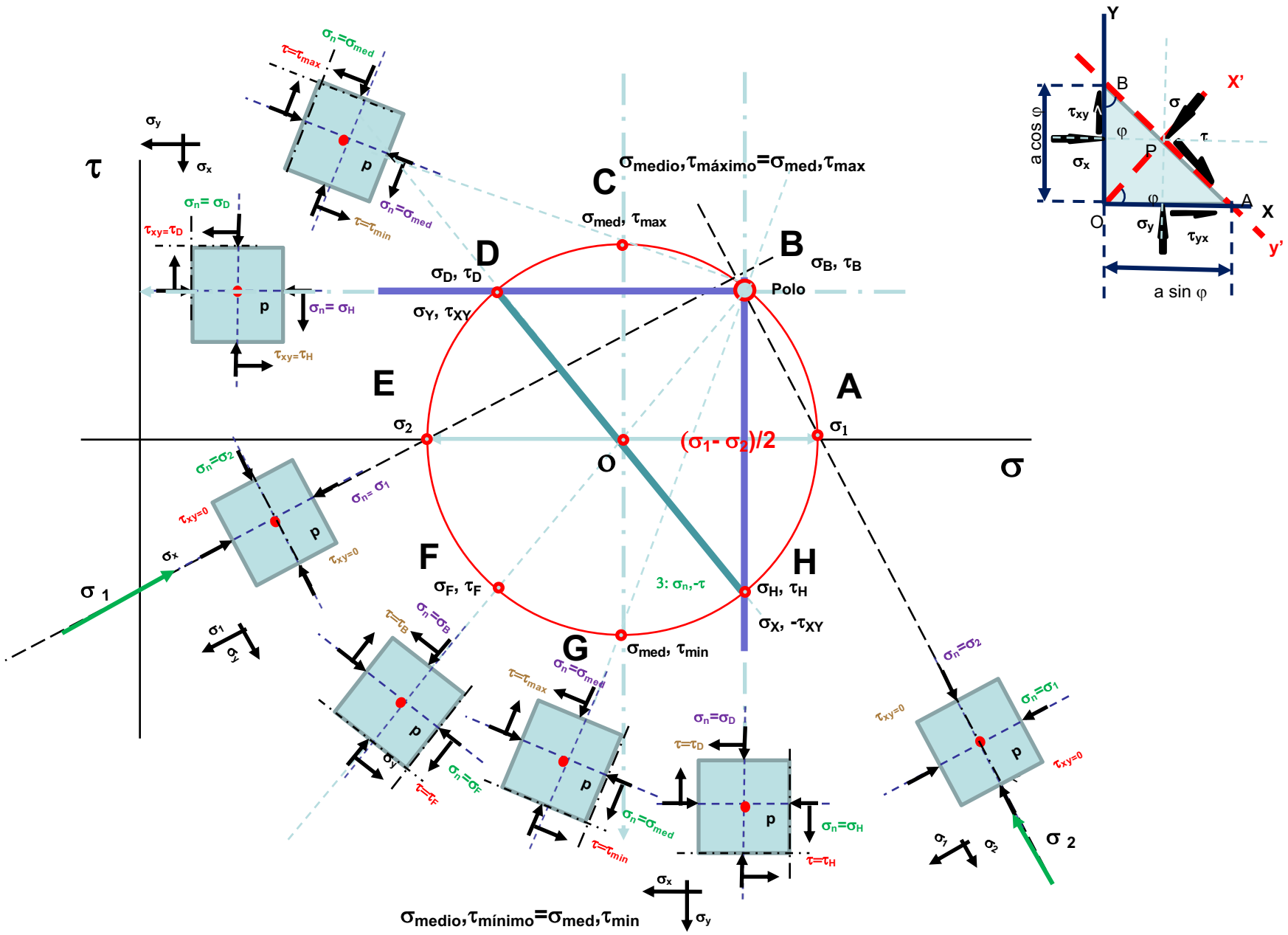
Sentido horario

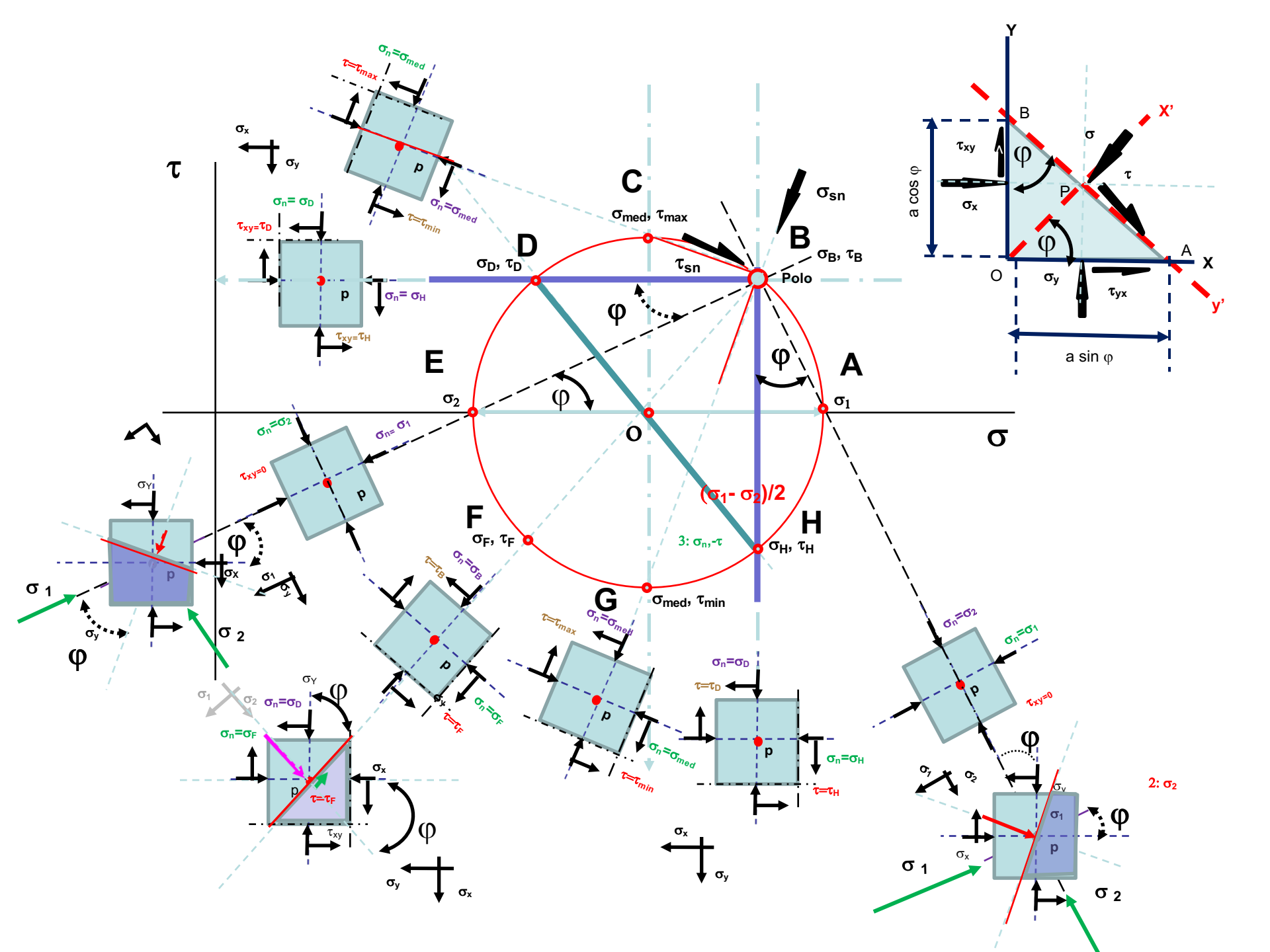


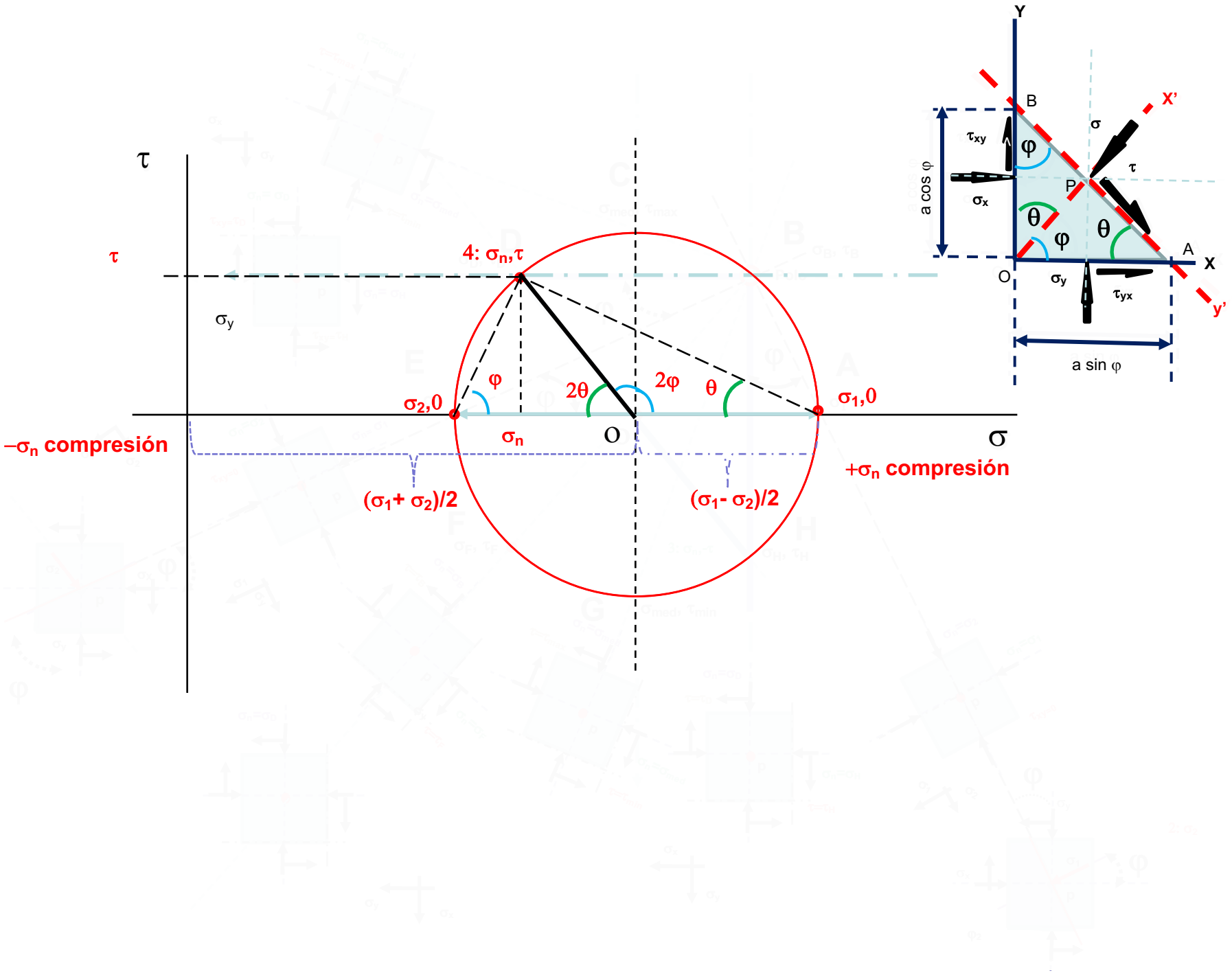
B

A

Posiciones relevantes




τ
σ
C
σmed, τmax
B
σB, τB
σsn
τsn
Polo
D
σD, τD
E
σ2
O
σ1
A
φ
(σ1- σ2)/2
F
σF, τF
H
σH, τH
3: σn,-τ
G
σmed, τmin
σn=σmed
τ=τmax
σn= σD
τxy=τD
σn= σH
τxy=τH
σn=σ2
σn= σ1
τxy=0
σn=σB
τ=τB
σn=σF
τ=τF
σn=σD
τ=τD
σn=σH
τ=τH
σ 1
σ 2
Y
X
X'
y'
B
A
P
O
τxy
σx
σy
τyx
σ
τ
a cos φ
a sin φ
2: σ2

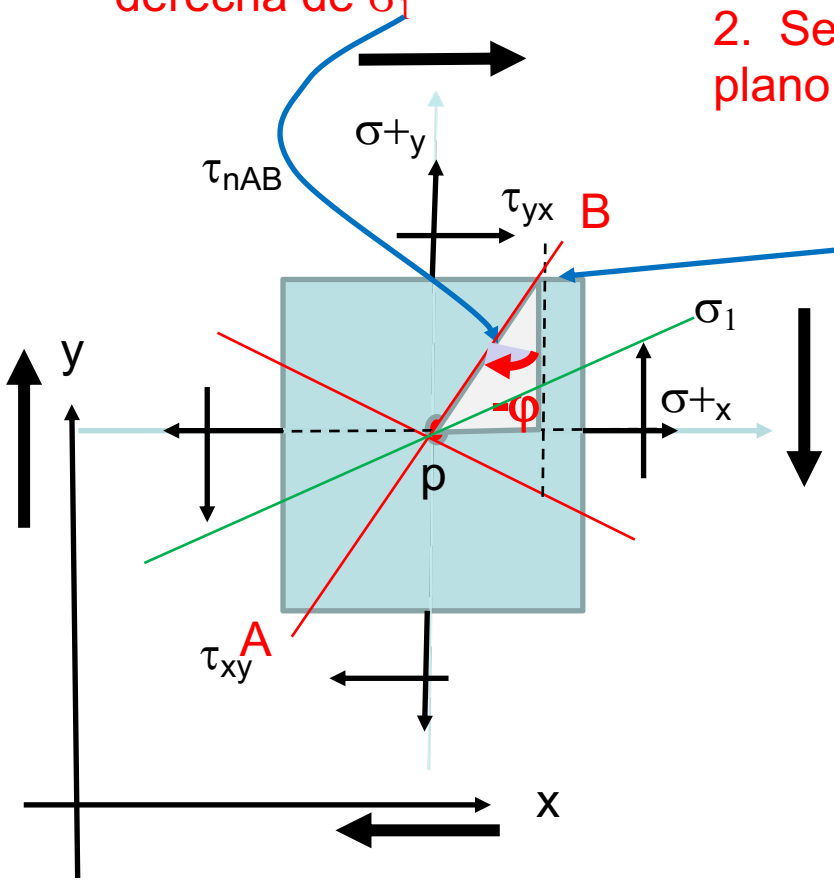

τ
τ
σy
4: σn,τ
φ
2θ
2φ
θ
σ2,0
σ1,0
σn
O
σ
−σn compresión
+σn compresión
(σ1+ σ2)/2
(σ1- σ2)/2
Y
X'
B
σ
τxy
φ
τ
a cos φ
σx
P
θ
φ
θ
A
X
O
σy
τyx
y'
a sin φ

El signo del ángulo φ también es importante

Para introducir el valor correcto del signo del ángulo φ se puede usar el siguiente criterio gráfico

1. Buscar el plano de rotura que aparece mas alto respecto al eje Y. Siempre a la derecha de σ_1

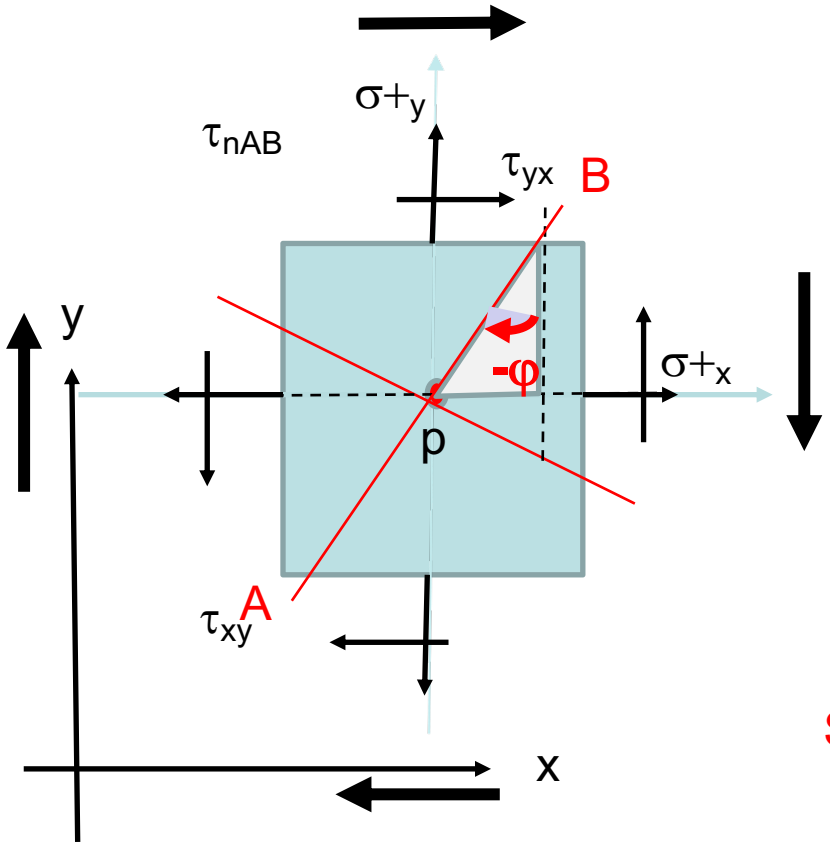
2. Se busca el punto de intersección de dicho plano de rotura con la cara del sólido ⊥ a Y.



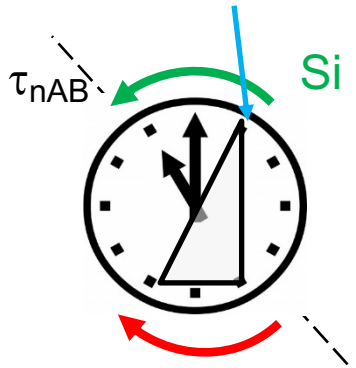
3. Se crea un plano paralelo al eje Y , que pasa por el punto de intersección anterior. Se construye un triángulo que se forma entre el eje X, y el plano anterior (⊥ al eje X). Se localiza el vértice superior del triángulo.

El signo del ángulo φ también es importante

Para introducir el valor correcto del signo del ángulo φ se puede usar el siguiente criterio gráfico

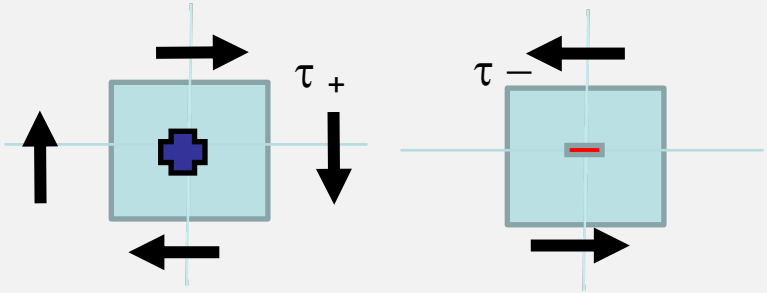


4. Se puede conocer el signo del ángulo φ, a través de un criterio que usa dicho triángulo. Partiendo del plano ⊥ al eje X hacia la hipotenusa del triángulo (plano de rotura), si se requiere hacer un giro el sentido de las agujas del reloj, entonces φ es negativo; y si es en contra, positivo

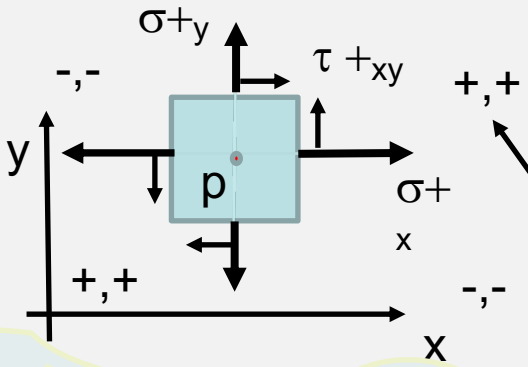


Si giro sh

Signo del ángulo φ 1. Tracción

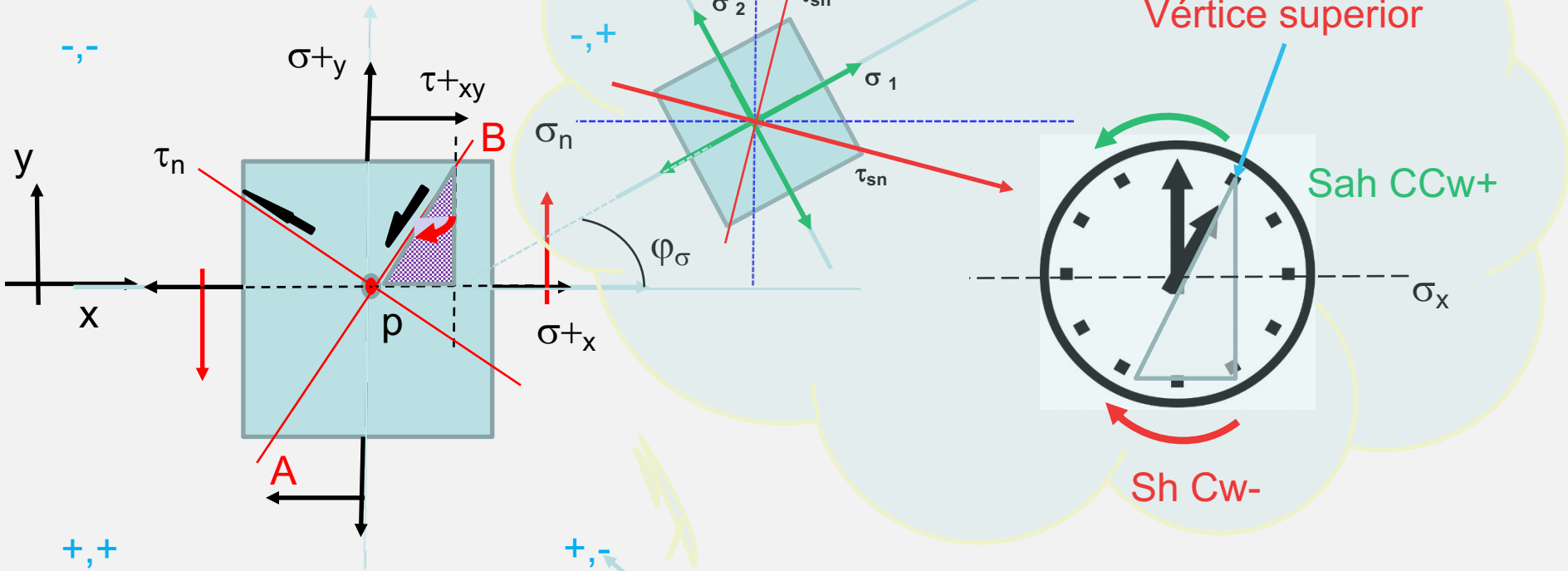


Sentido horario Sentido antihorario



Signo de las Coordenadas τ de esfuerzos

Solución: -φ



Para comprobarlo recordemos

Vértice superior

Sah CCw+

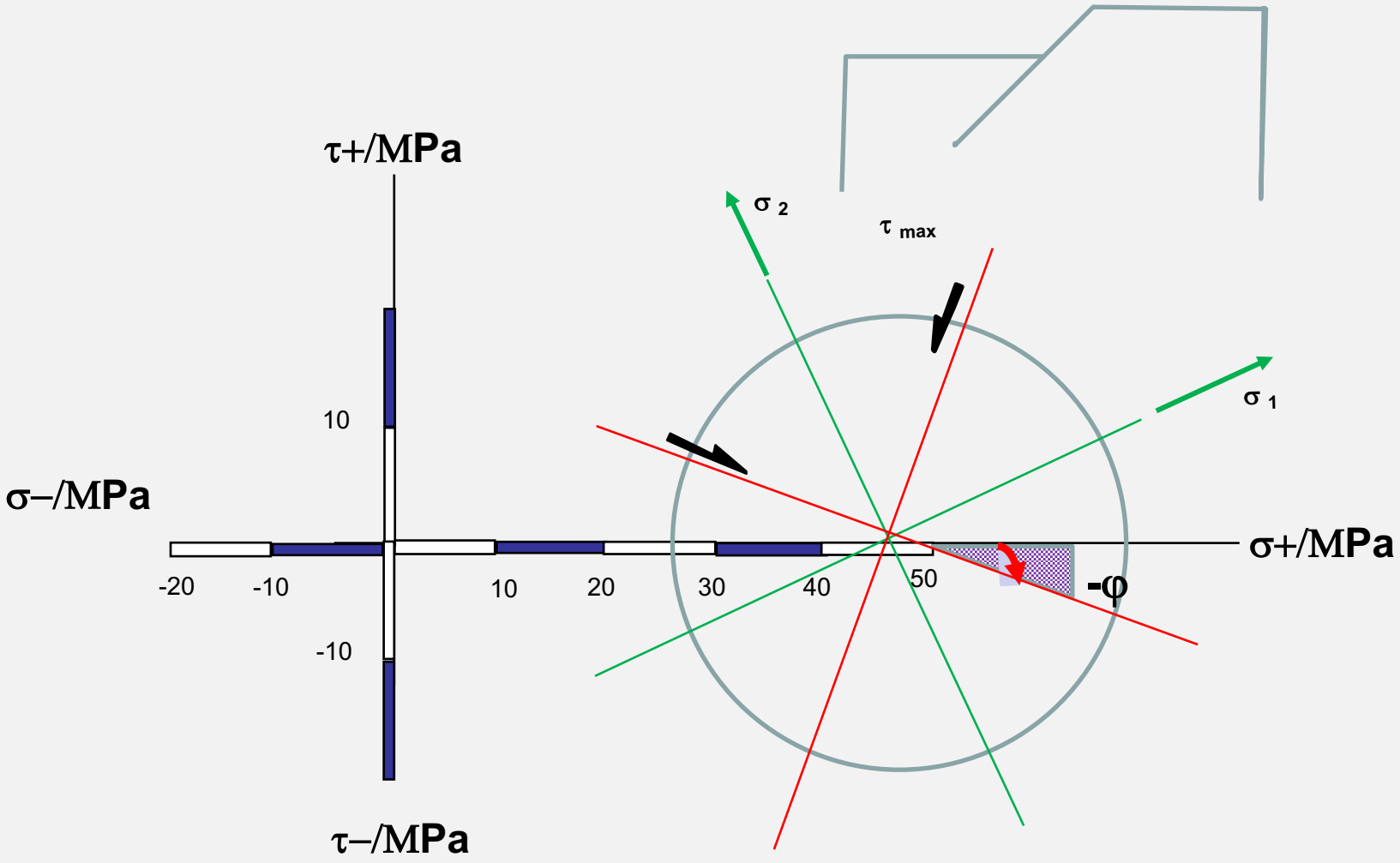
σx

Sh Cw-

Signo de las Coordenadas τ del círculo de mohr

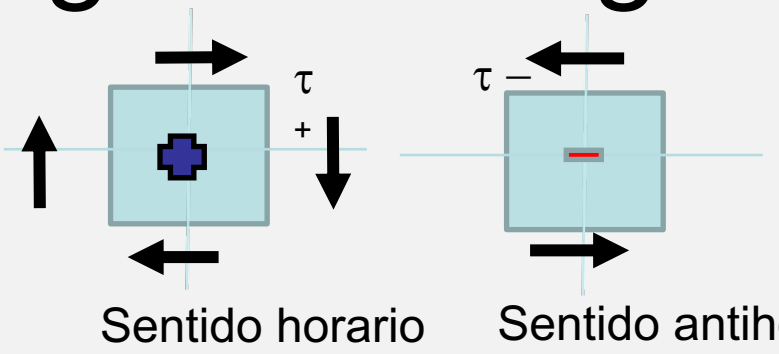
Resto materiales

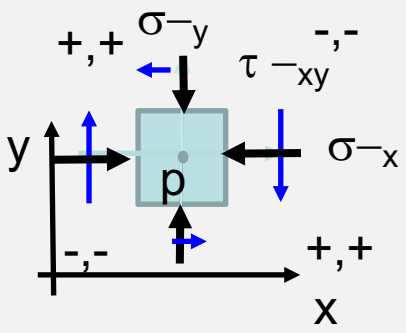
En la representación de Mohr



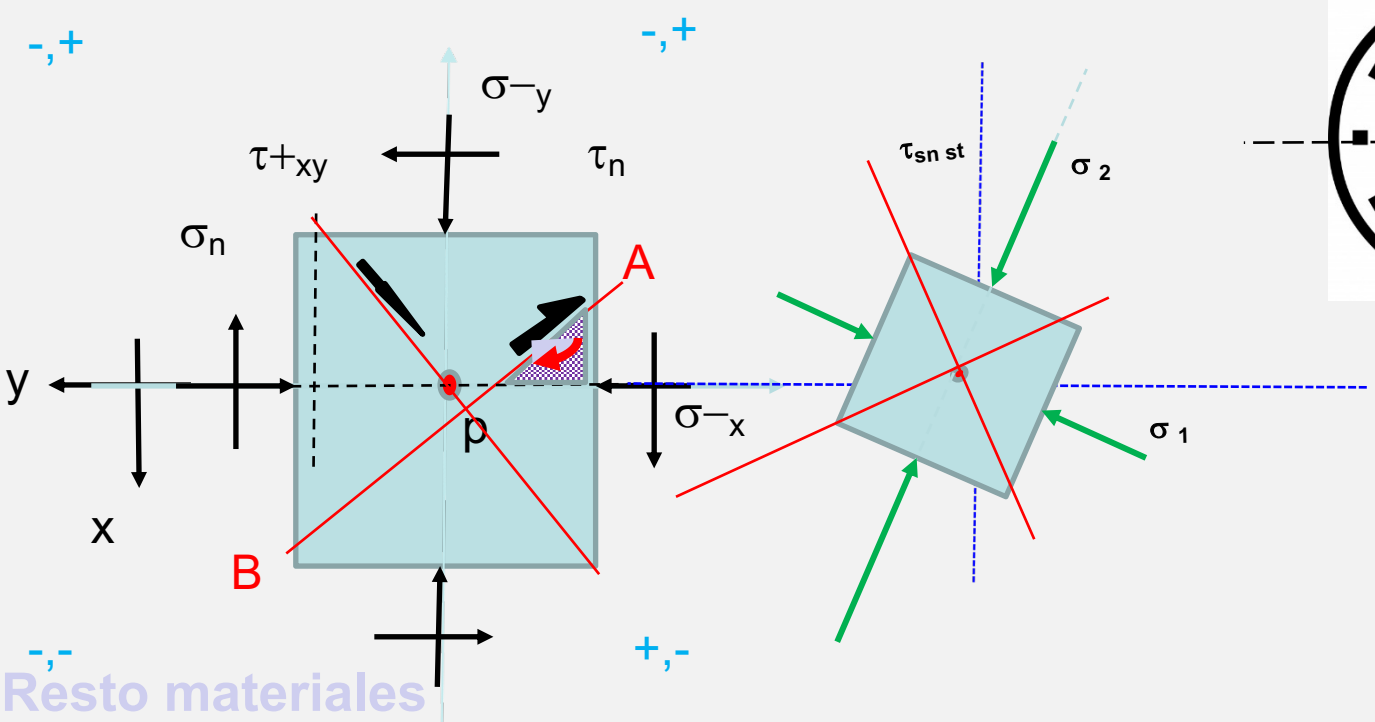
Resto materiales

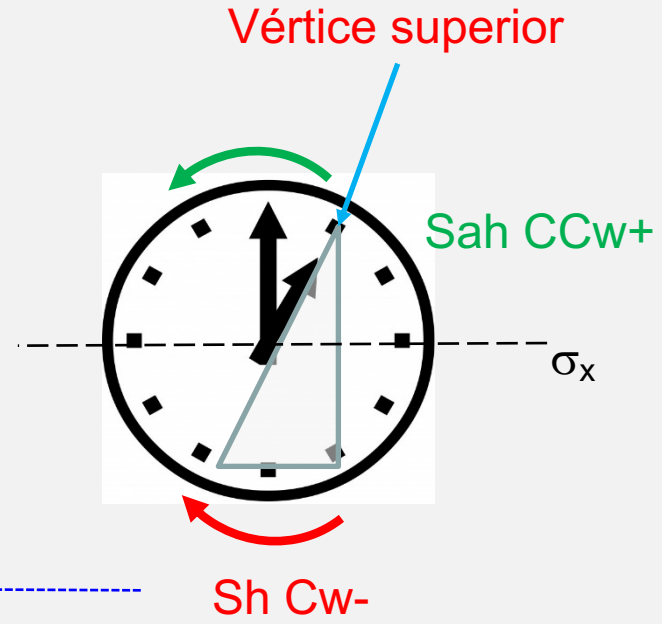
Signo del ángulo φ, 2. Compresión





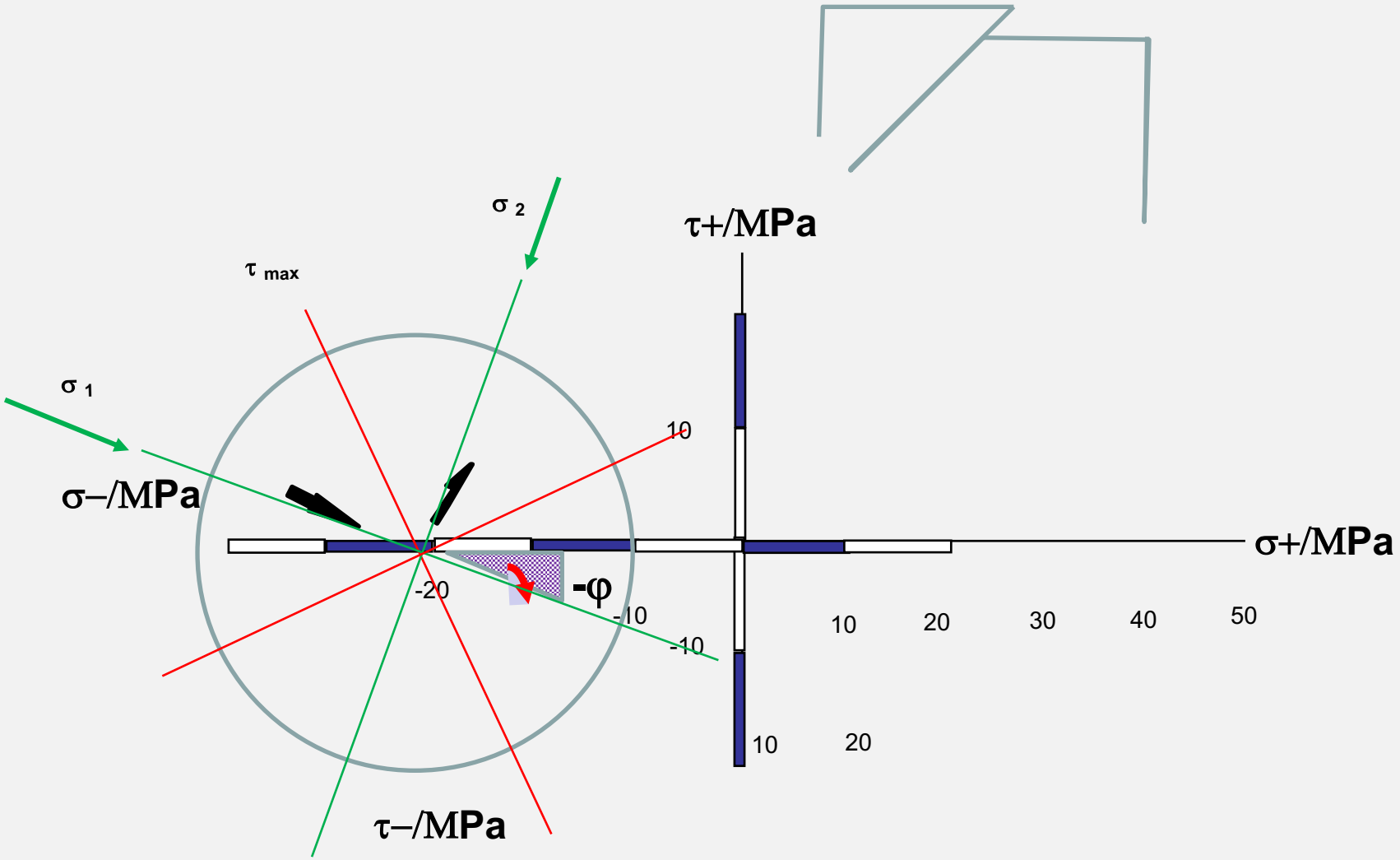
Resto de materiales





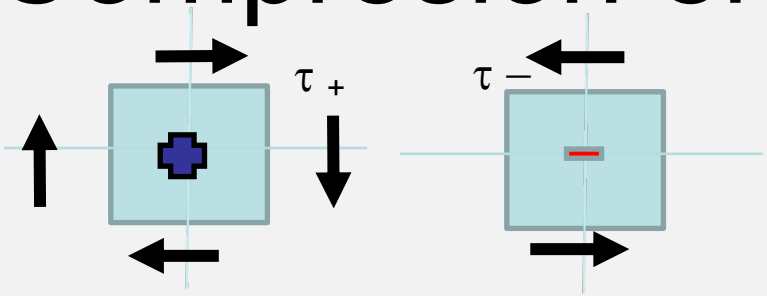
Solución: -φ

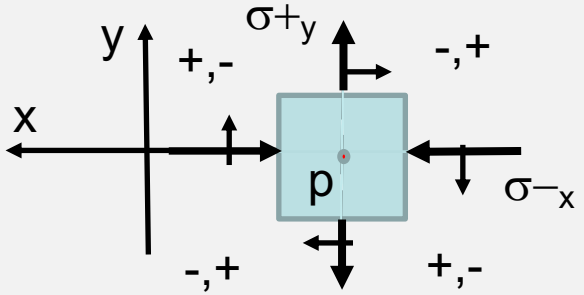
En la representación de Mohr

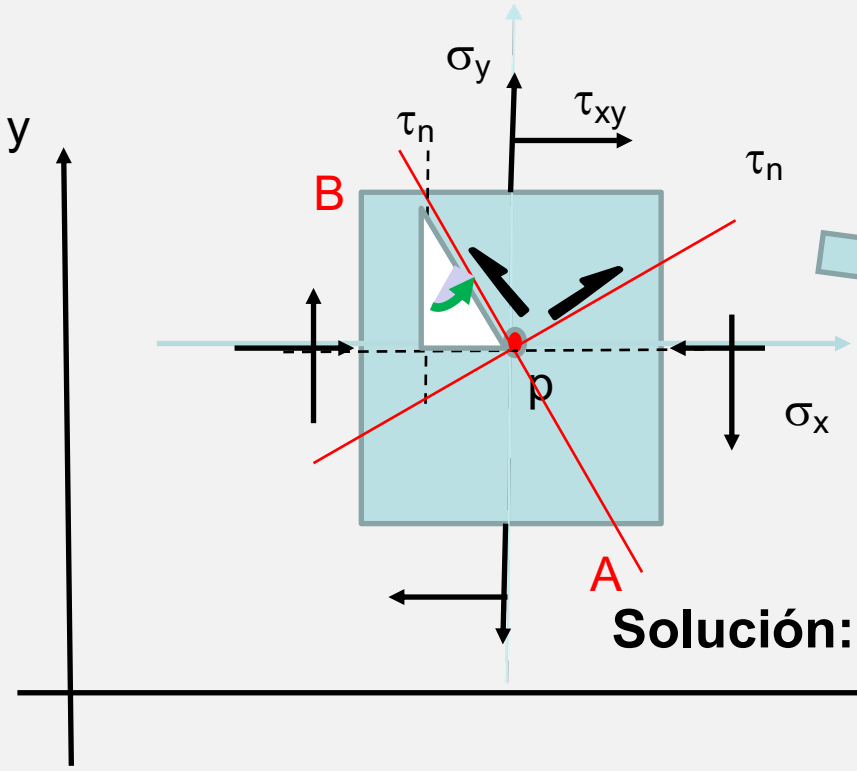


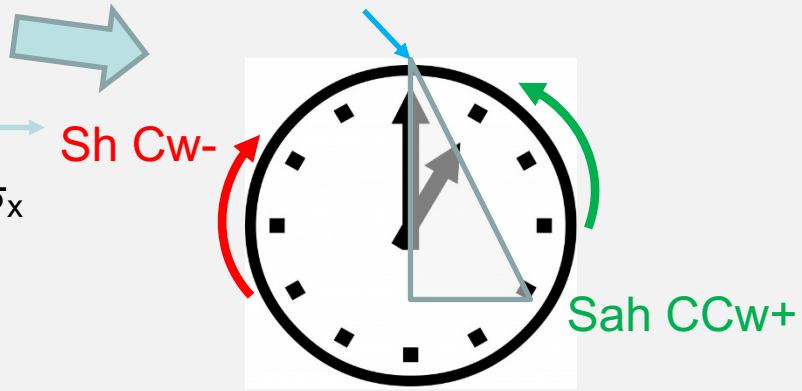
Resto materiales

Signo del ángulo φ 3. Compresión en x, y tracción en y



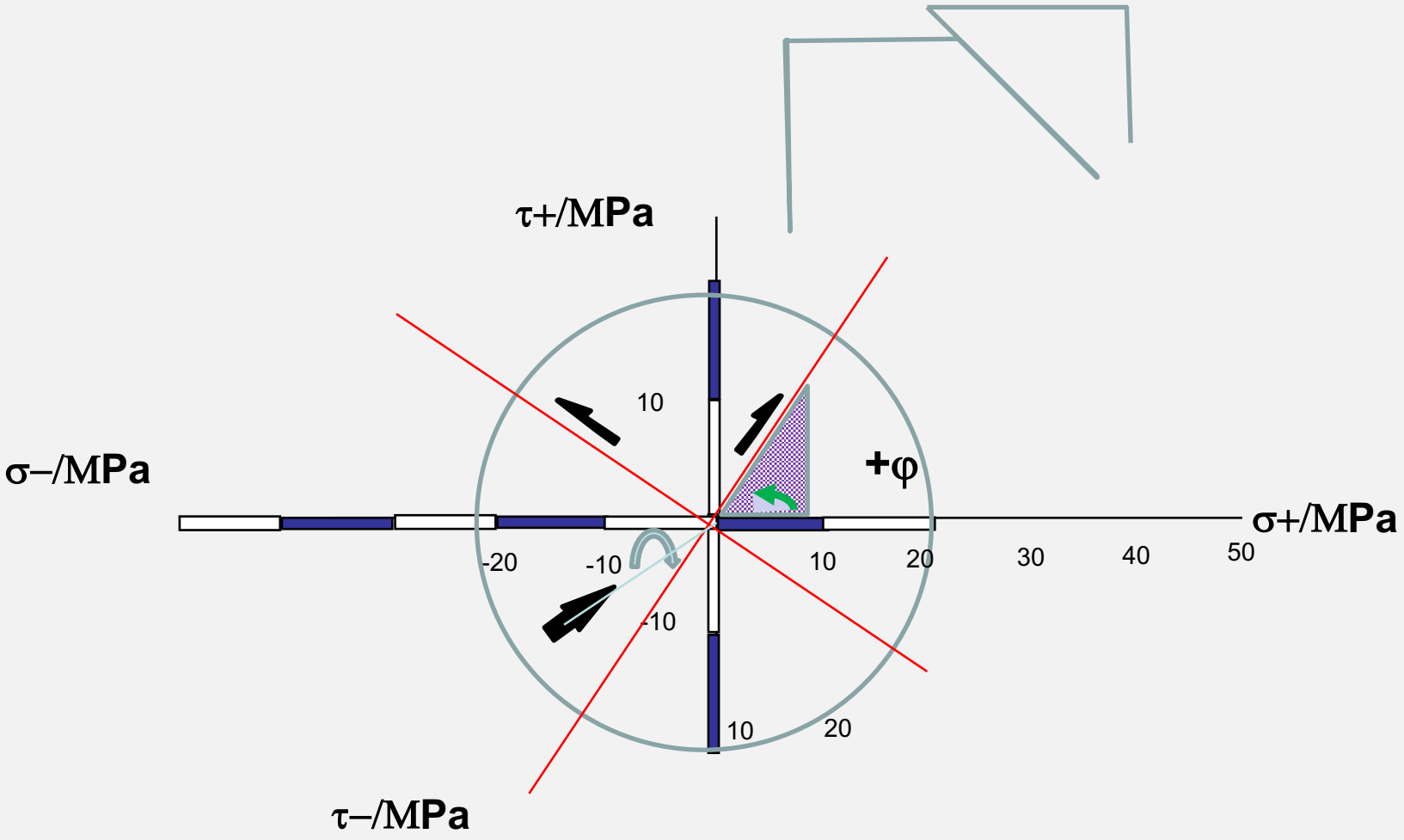






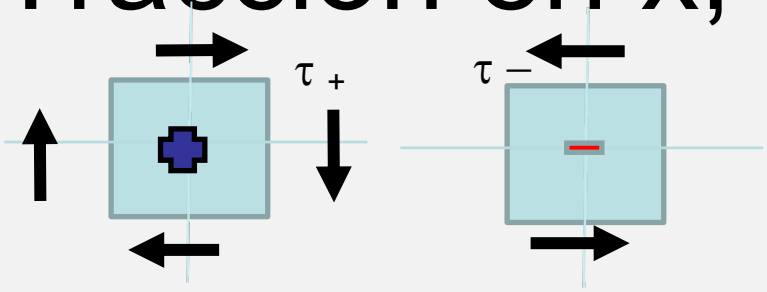
Resto materiales

En la representación de Mohr

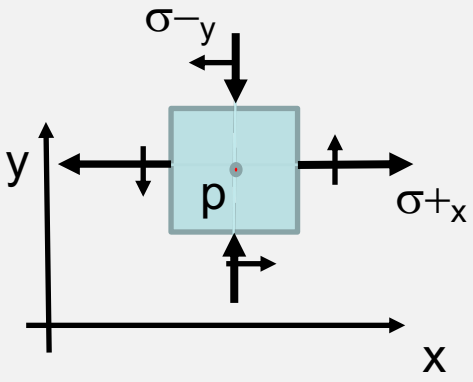


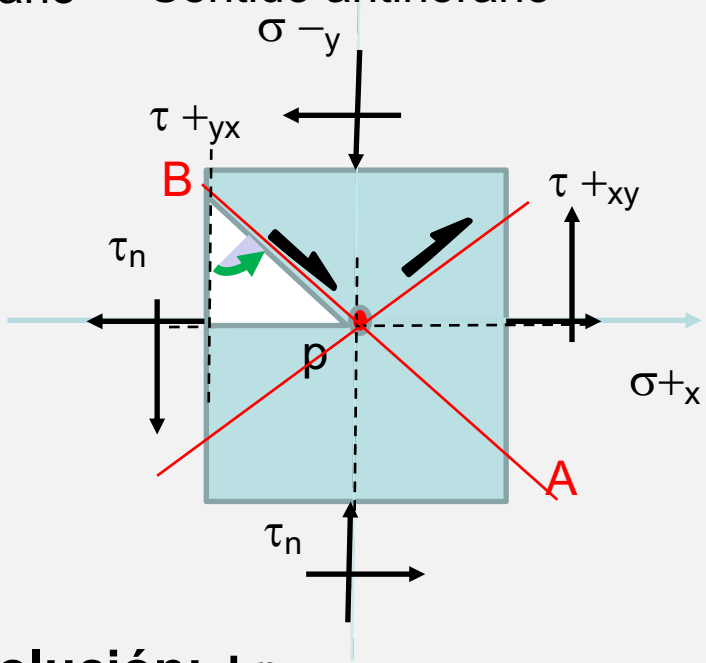
Resto materiales

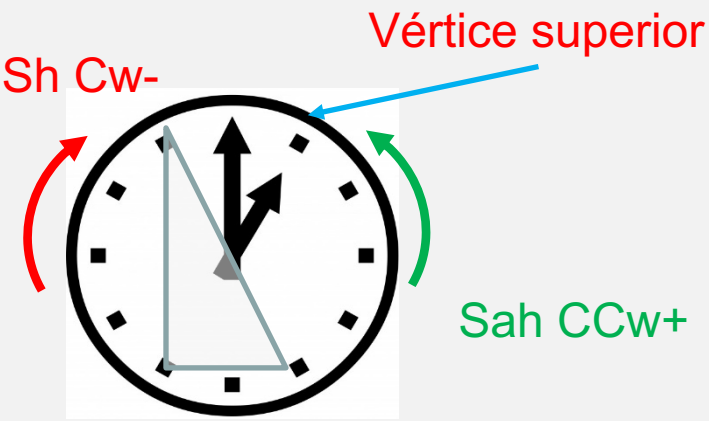
Signo ángulo φ 4.
Tracción en x, y compresión en y



Sentido horario Sentido antihorario



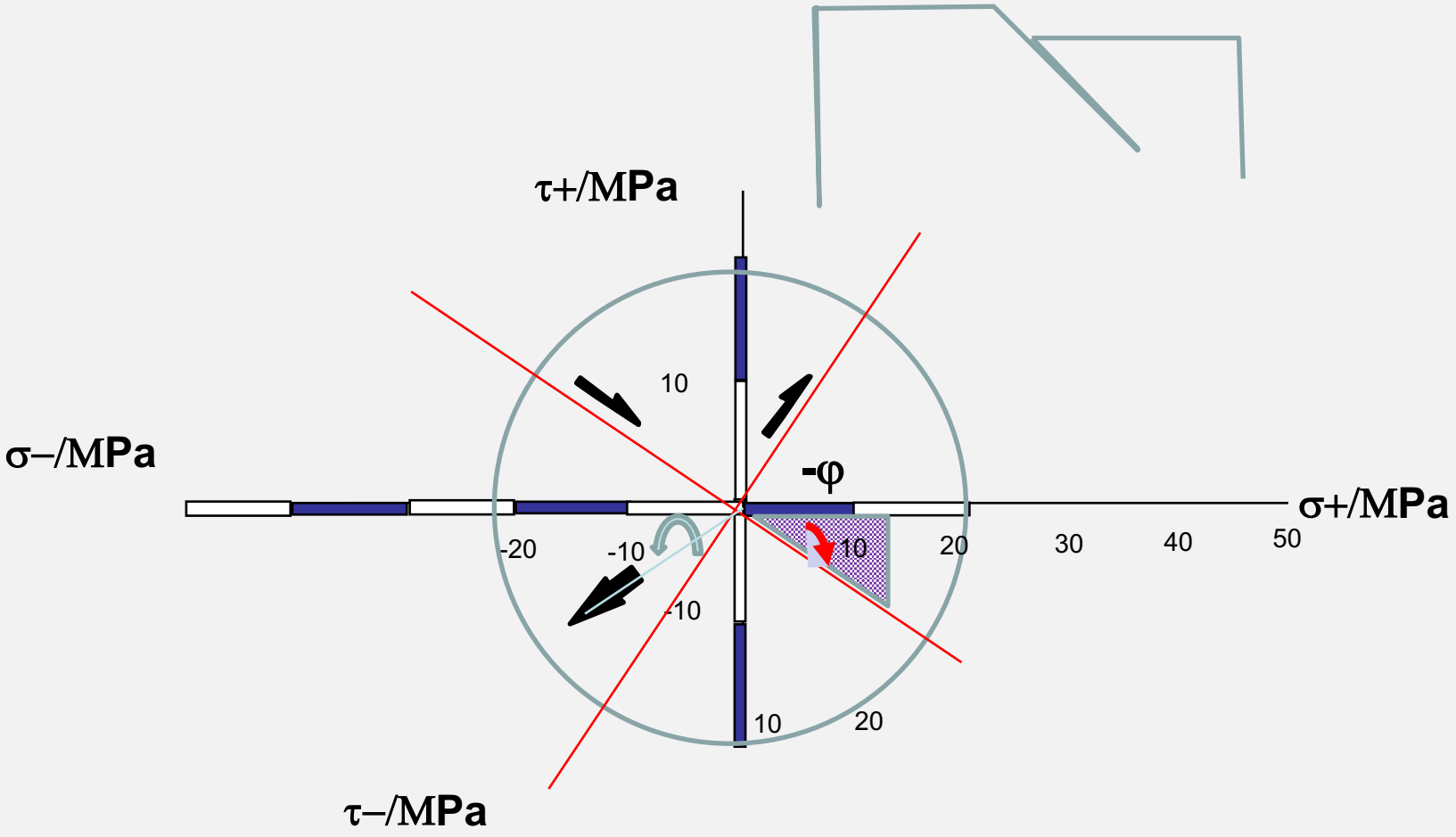




Solución: +φ

Resto materiales

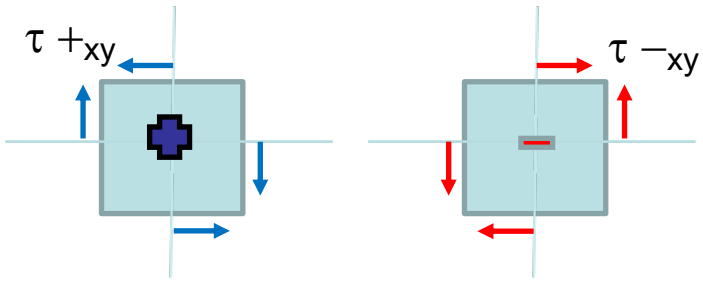
En la representación de Mohr

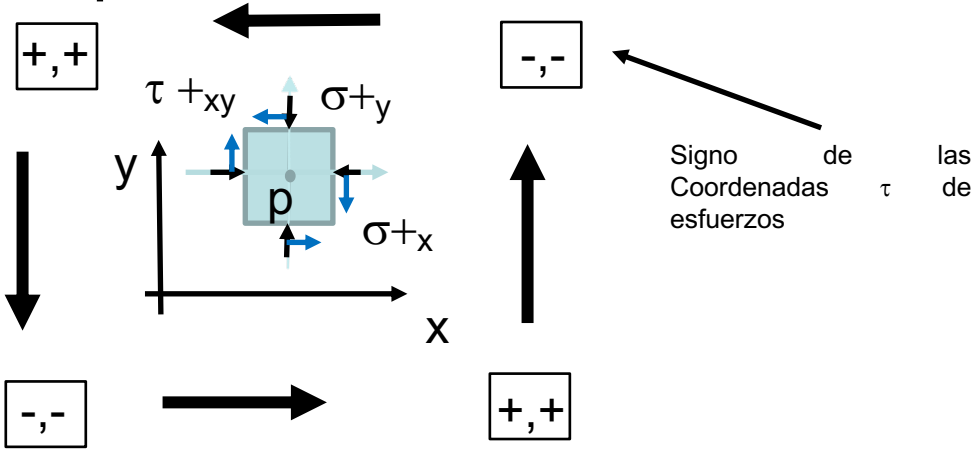


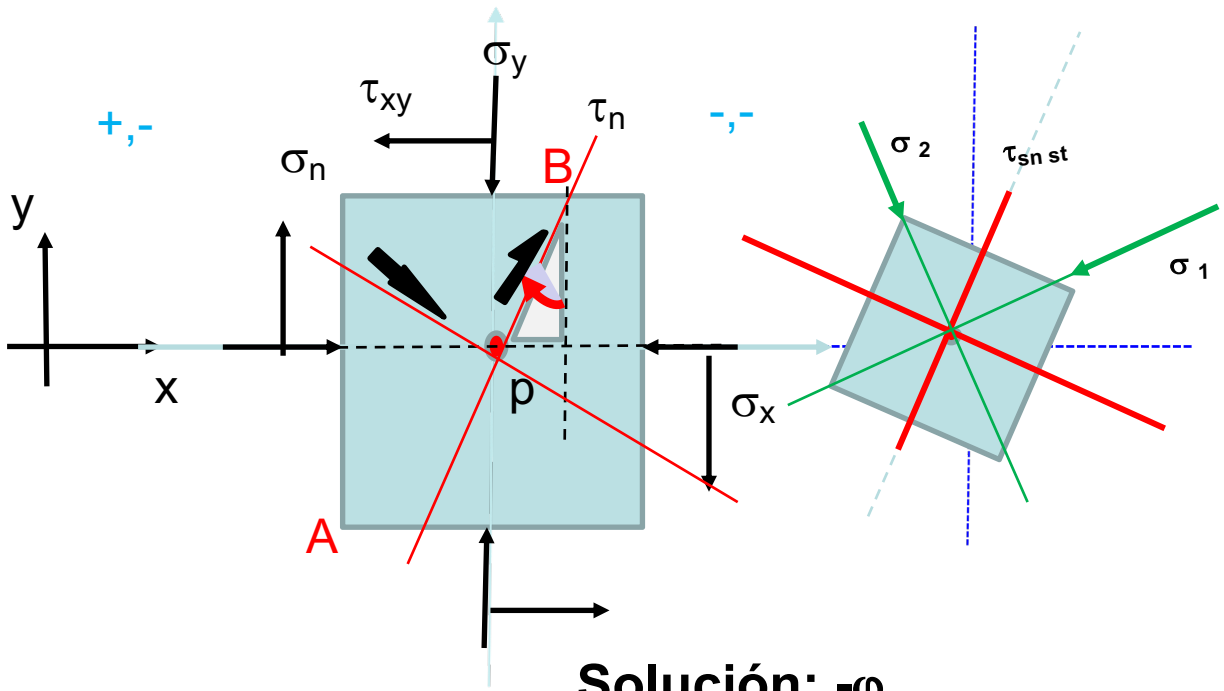
Resto materiales

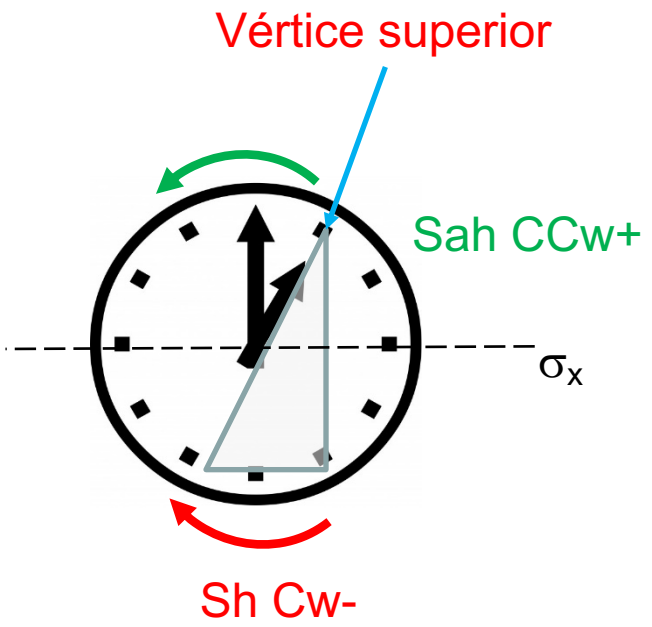
Situación ángulo φ, 1. Compresión

Signos para rocas y suelos









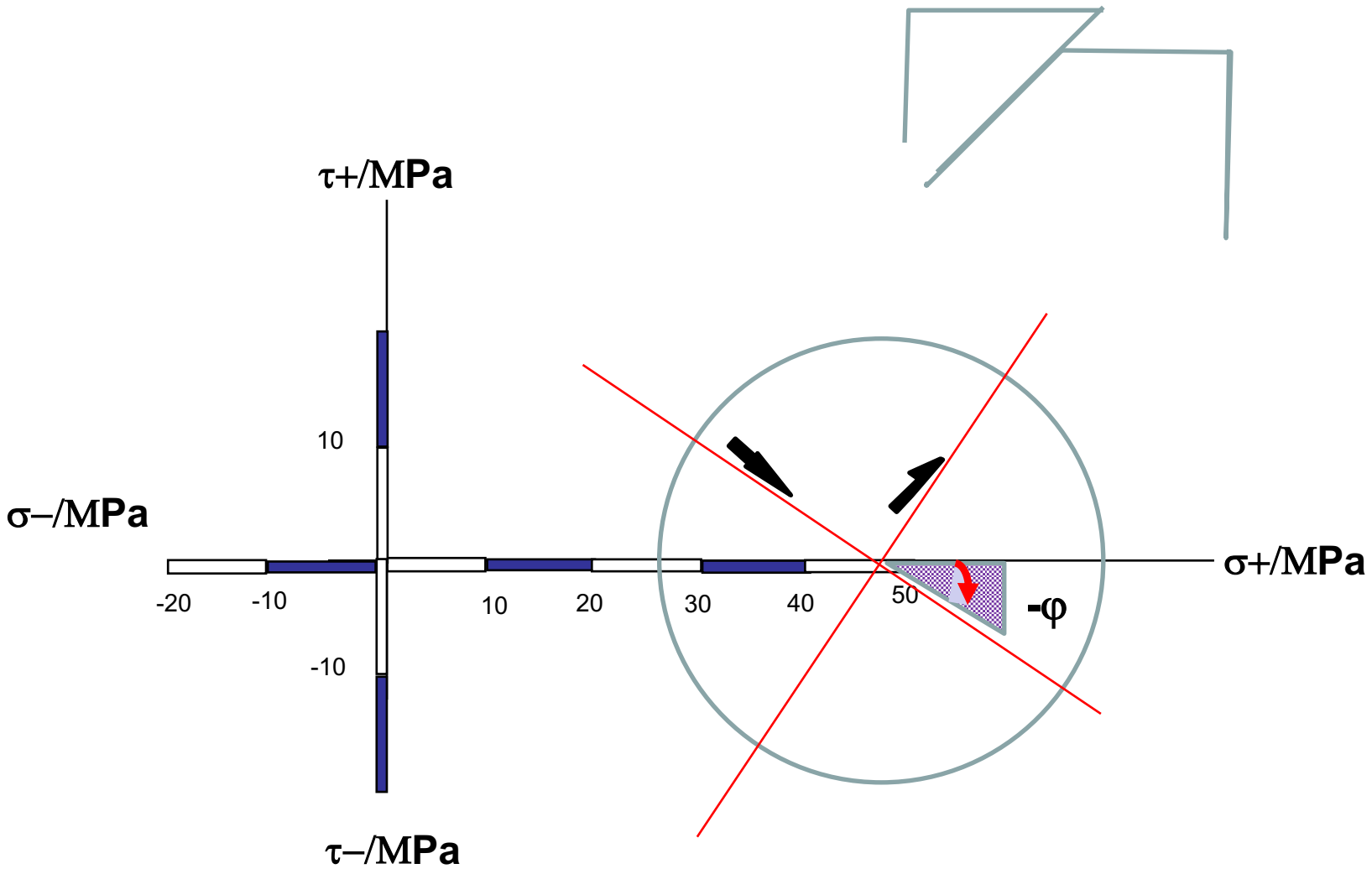
Solución: -φ

-,-

-,+

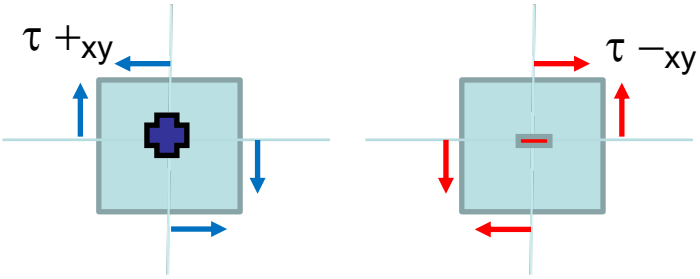
ROCAS Y SUELOS

En la representación de Mohr

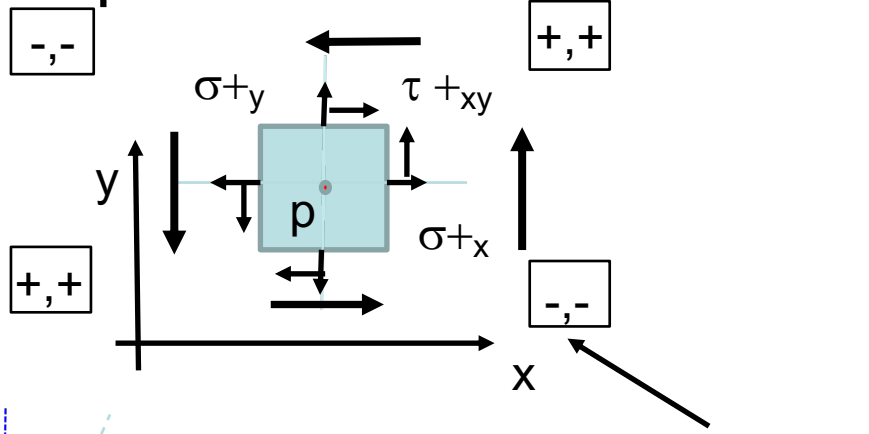


Situación ángulo φ 2. Tracción

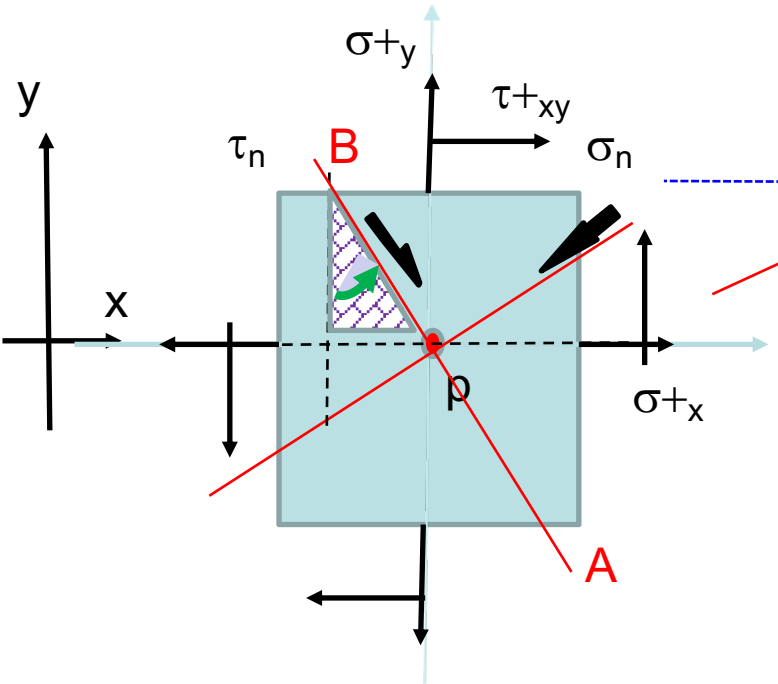
Signos para rocas y suelos

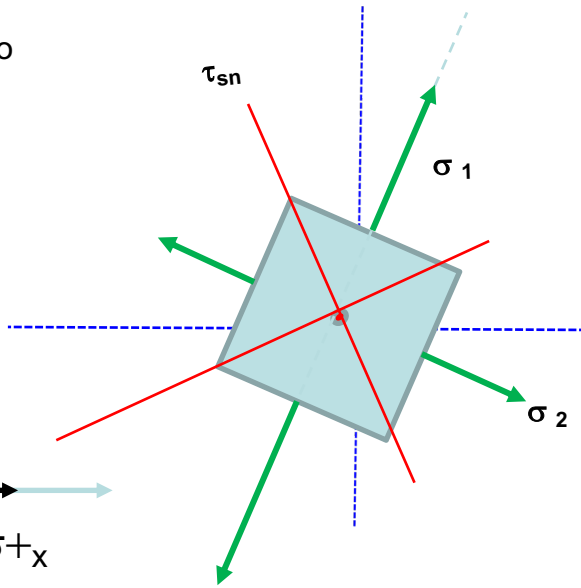


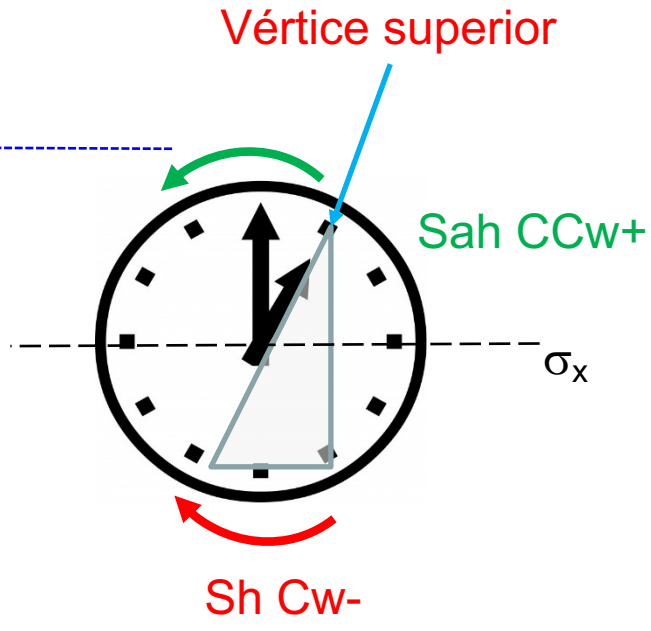
Sentido antihorario Sentido horario



Signo de las Coordenadas τ de esfuerzos



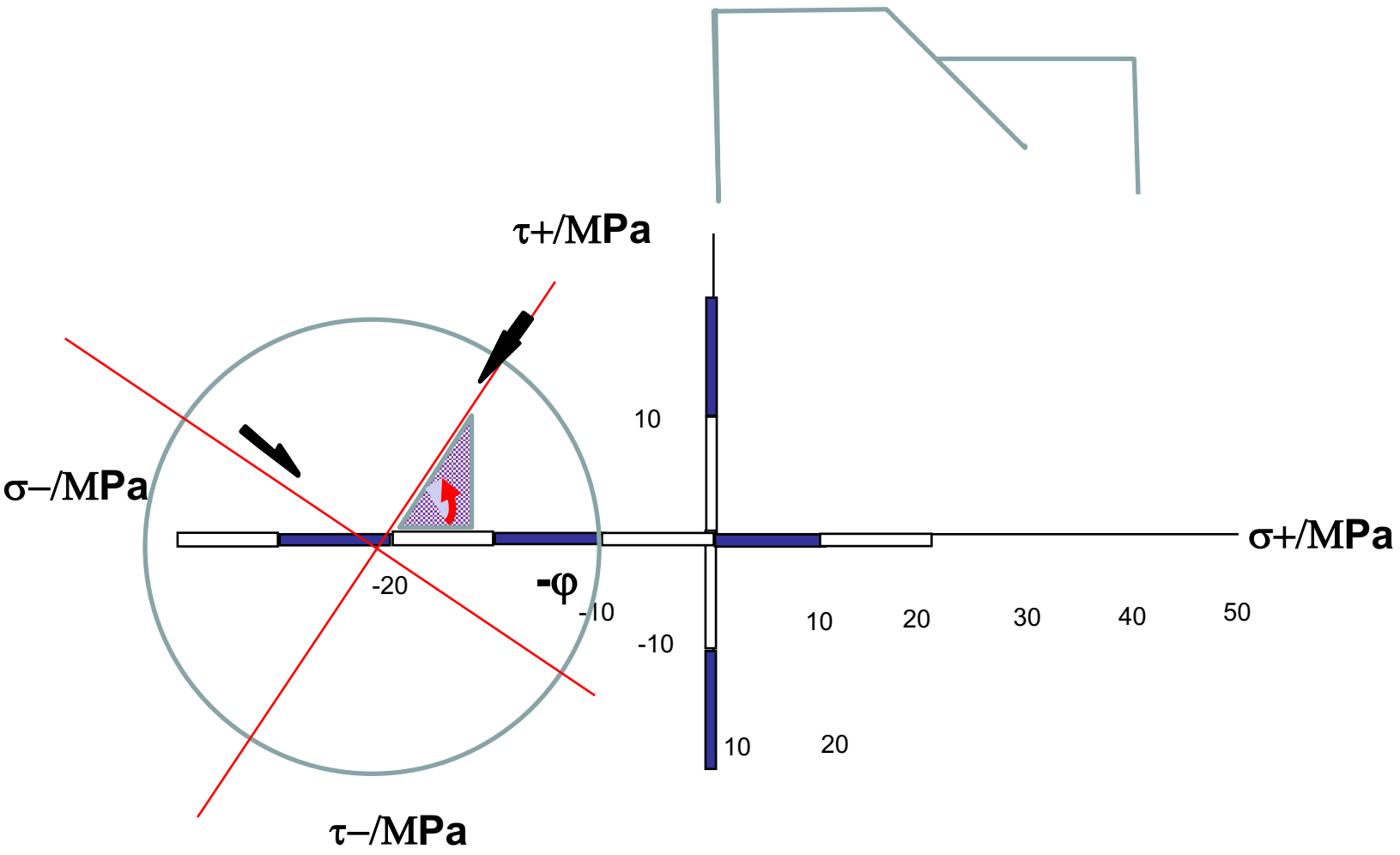




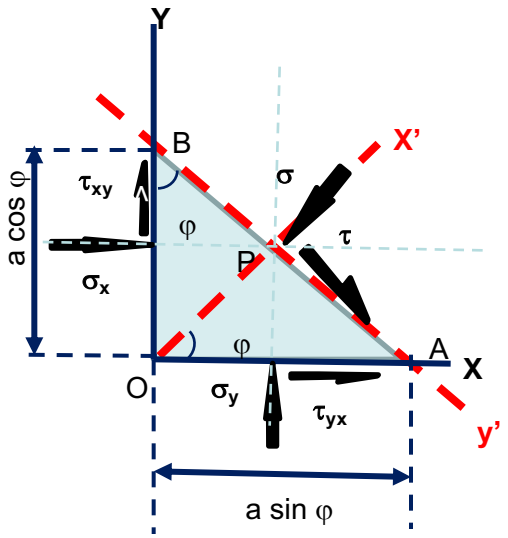
Solución: +φ

ROCAS Y SUELOS

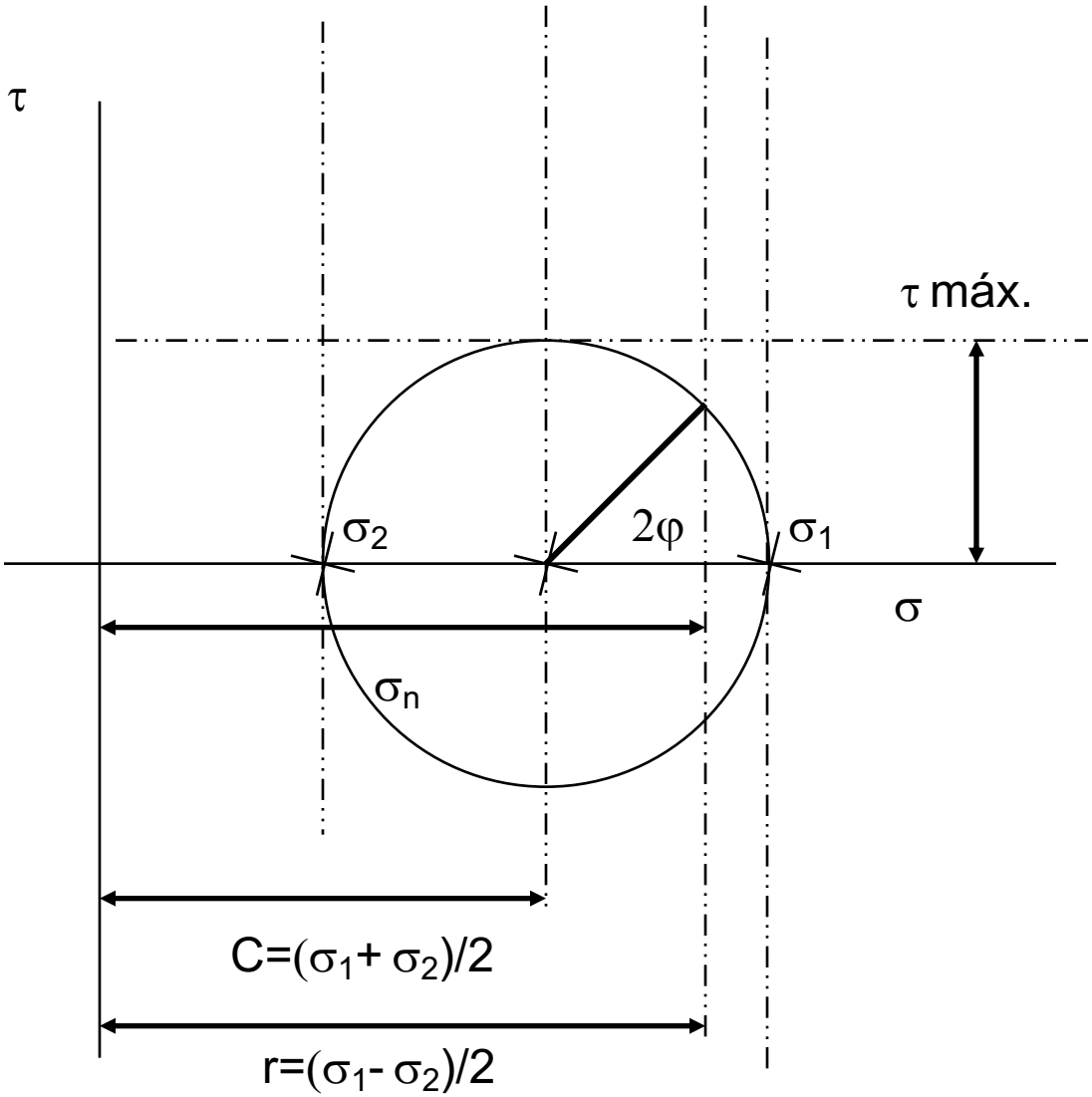
En la representación de Mohr



Representación gráfica del Cículo del Mohr.



Las intersecciones del círculo con el eje de esfuerzo normal son los esfuerzos principales σ_1 y σ_2. El radio representa el valor máximo del esfuerzo tangencial. Cualquier punto del círculo representa el estado de esfuerzos en un plano cuya normal forma un ángulo φ con la dirección del esfuerzo principal σ_3.



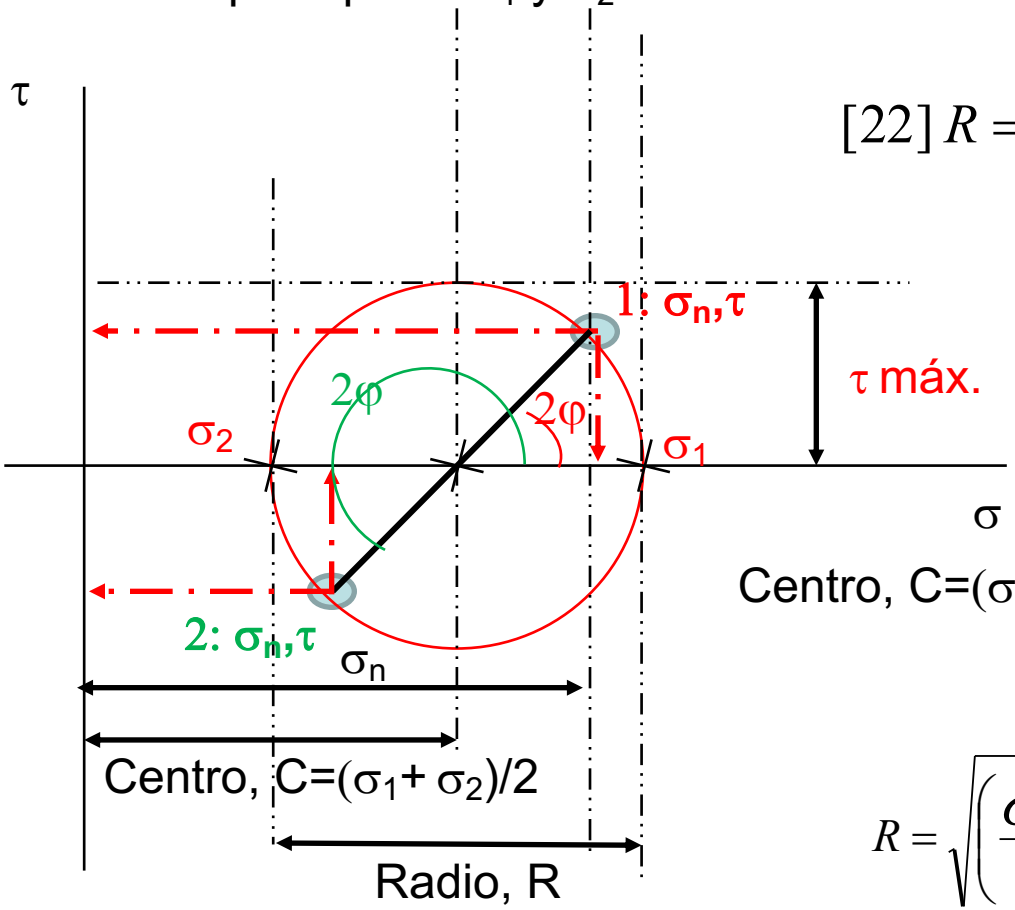
Principales características

A partir del dibujo, dados dos esfuerzos (σ_n y τ) medidos en planos perpendiculares (1 y 2) se pueden calcular los esfuerzos principales σ_1 y σ_2.

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\varphi + \tau_{xy} sen2\varphi$$

$$\tau = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} sen2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi$$

$$[22]\ R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



Centro, C=(σ_1+ σ_2)/2 o esfuerzo normal medio

En el caso de usar los esfuerzos principales

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

r=(σ_1- σ_2)/2

Efecto de la presión intersticial

El agua ejerce un esfuerzo hidrostático, u, de igual magnitud en todas las direcciones. Si la roca contiene agua ocupando sus poros, cuando se ejerce una fuerza sobre la roca, el esfuerzo hidrostático que sufre el agua actúa contrarrestando el esfuerzo normal que se ejerce sobre los granos minerales, no teniendo repercusiones este hecho sobre el esfuerzo tangencial.

El efecto efectivo, actuando perpendicularmente a un plano será el total menos el esfuerzo u:

$$\sigma'_n = \sigma_n - u$$