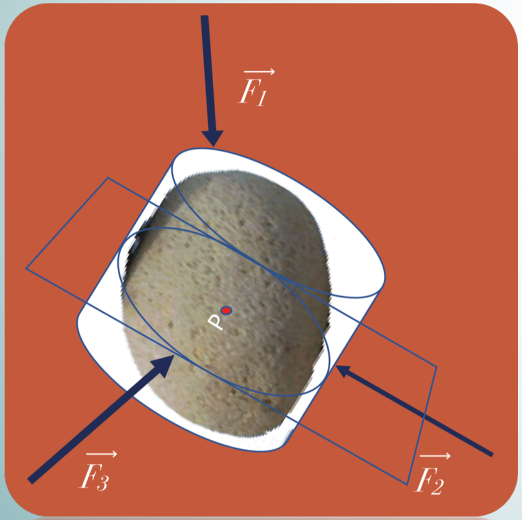
Caracterización geomecánica de suelos y rocas

Problemas del Círculo de Mohr



Alberto González Díez

Patricio Martínez Cedrún

DPTO. DE CIENCIAS DE LA TIERRA Y FÍSICA DE LA MATERIA CONDENSADA (CITIMAC)

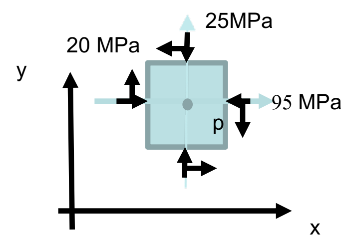
PROBLEMAS TIPO

A

Dado los esfuerzos σ y τ en un sólido calcular los esfuerzos principales

1. Pasos a seguir para llevar a cabo un análisis de esfuerzos mediante el círculo de Mohr.

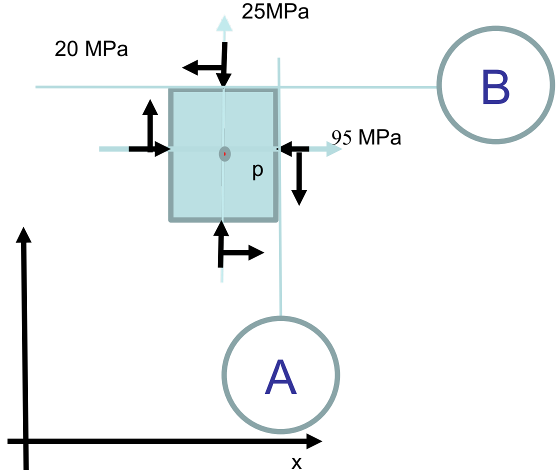
1. Pintar el esquema de esfuerzos, por ejemplo



2. Según dicho esquema y teniendo en cuenta el criterio de signos se determina si los esfuerzos son positivos o negativos tratándose de compresión o extensión. En nuestro ejemplo compresión es +.

2. Pasos a seguir para llevar a cabo un análisis de esfuerzos mediante el círculo de Mohr.

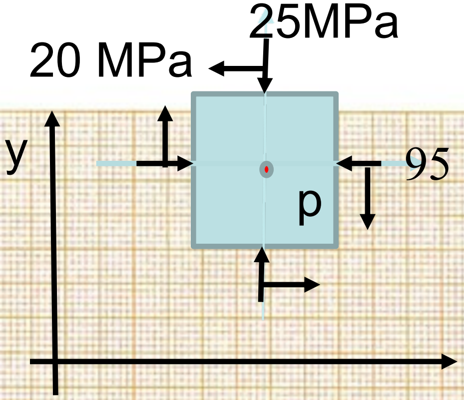
3. Situar los planos a los que corresponden los esfuerzos representados.



Como se aprecia en la figura el plano A es perpendicular al eje X, mientras que el plano B es perpendicular al eje Y

4. Se pinta un sistema de coordenadas σ y τ.
5. Se pintan las coordenadas de los planos A y B

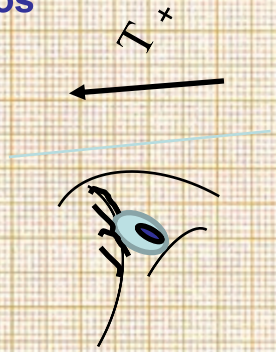
Ejemplo hasta el paso 4



Estos esquemas permiten conocer la polaridad de los signos medidos en los esfuerzos tangenciales

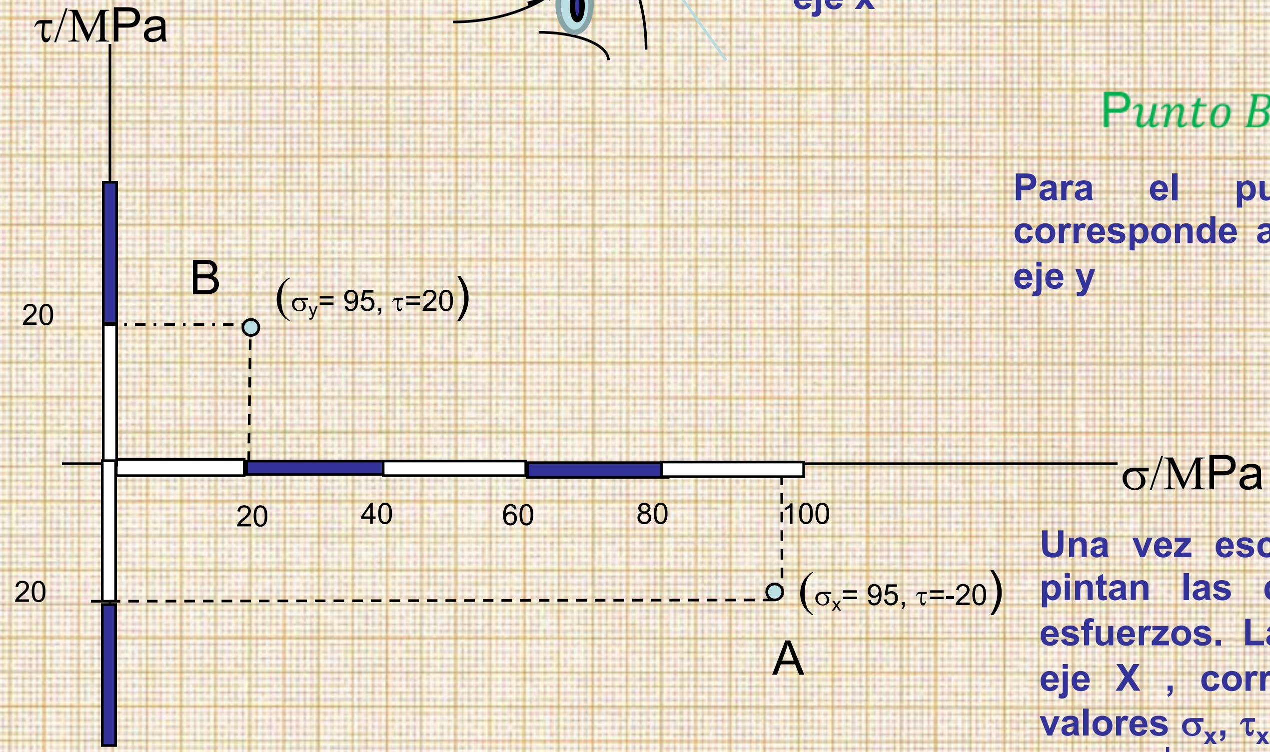
$Punto\ A = [95, -20]$

Para el punto A que corresponde al plano A ⊥ al eje x



$Punto\ B = [25, 20]$

Para el punto B que corresponde al plano B ⊥ al eje y



Una vez escalado el sistema se pintan las coordenadas de los esfuerzos. Las coordenadas ⊥ al eje X , corresponderán con los valores σ_x, τ_{xy} medidos en el plano A; las ⊥ al eje Y corresponderán a σ_y , τ_{yx} medidas en el plano B.

3. Pasos a seguir para llevar a cabo un análisis de esfuerzos mediante el círculo de Mohr.

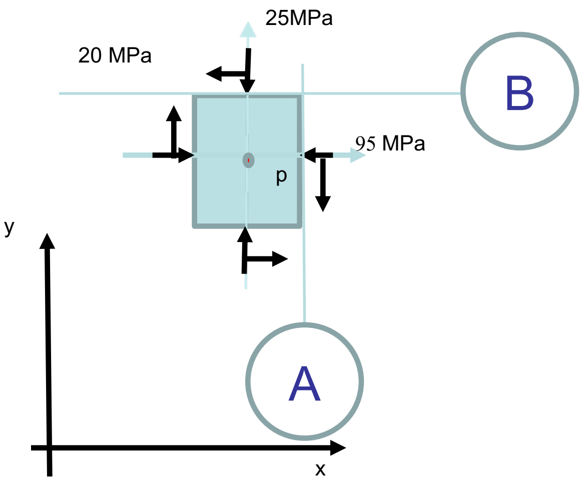
6. Se calculan las coordenadas del punto medio, radio y de los esfuerzos principales usando las siguientes expresiones.

$$[9] \quad \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^{\ 2}}$$

$$[10] \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^{\ 2}}$$

$$[10.1] \quad \sigma_{average} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$$

$$[22] \; R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



$$[9]\quad \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2};\sigma_1 = \frac{95+25}{2} + \sqrt{\left(\frac{95-25}{2}\right)^2 + 20^2}$$

$$\sigma_1 = 60 + \sqrt{35^2 + 20^2};\sigma_1 = 60 + 40{,}31 \Rightarrow \sigma_1 = 100{,}3$$

$$[10]\quad \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2};\sigma_2 = 60 - \sqrt{1625};\ \sigma_2 = 60 - 40{,}31 \Rightarrow \sigma_2 = 19{,}7$$

$$[10.1]\quad \sigma_{average} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2);\sigma_{average} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \Rightarrow \sigma_{average} = 60$$

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\varphi + \tau_{xy} sen 2\varphi$$

$$\tau = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} sen 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi$$

$$[22]\ R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2};\Rightarrow R = 40{,}3$$

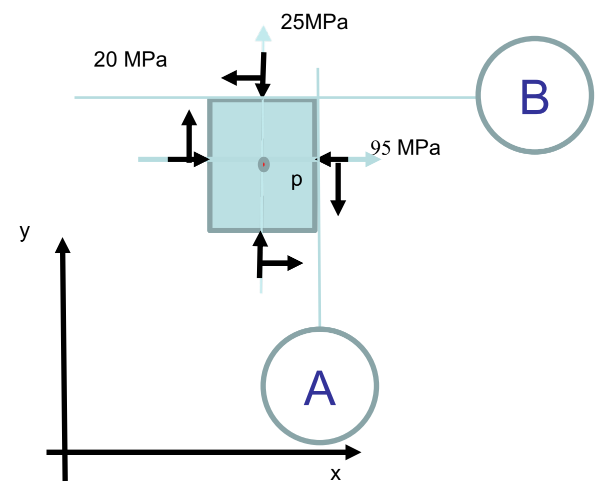
4. Pasos a seguir para llevar a cabo un análisis de esfuerzos mediante el círculo de Mohr.

7. Se calculan los ángulos de giro existentes entre los esfuerzos normales partiendo de σ_x, empleando las siguientes ecuaciones:

$$[7]\ \tan 2\varphi = \frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)}$$

$$[7.1]\ \varphi_1 = \frac{1}{2} * \tan^{-1}\left(\frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)}\right)$$

$$[7.2]\ \varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$$



A continuación se representa σ_1 y σ_2.

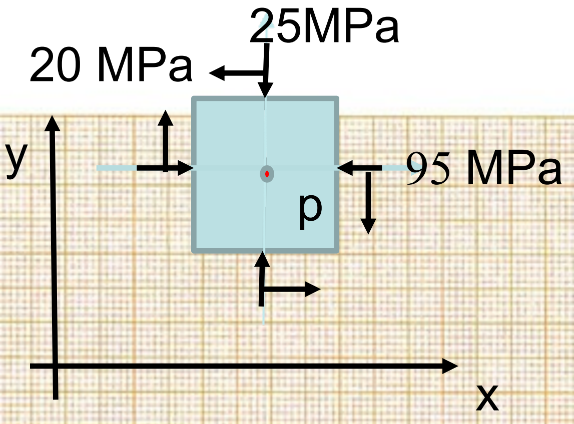
$$[7]\ \tan 2\varphi = \frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)}$$

$$[7.1]\ \varphi_1 = \frac{1}{2} * \tan^{-1}\left(\frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)}\right); \varphi_1 = \frac{1}{2} * \arctan\left(\frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)}\right); \Rightarrow \varphi_1 = \frac{1}{2} * \arctan\left(\frac{2*20}{95-25}\right);$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} * \arctan\left(\frac{4}{7}\right); \Rightarrow \varphi_1 = \frac{1}{2} * \arctan(0{,}571428) \Rightarrow \varphi_1 = \frac{1}{2} * 29{,}72 \Rightarrow \varphi_1 = 14{,}9$$

$$[7.2]\ \varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_2 = 14{,}9 + 90^{\circ} \Rightarrow \varphi_2 = 104{,}87^{\circ}$$

Ejemplo hasta el paso 7

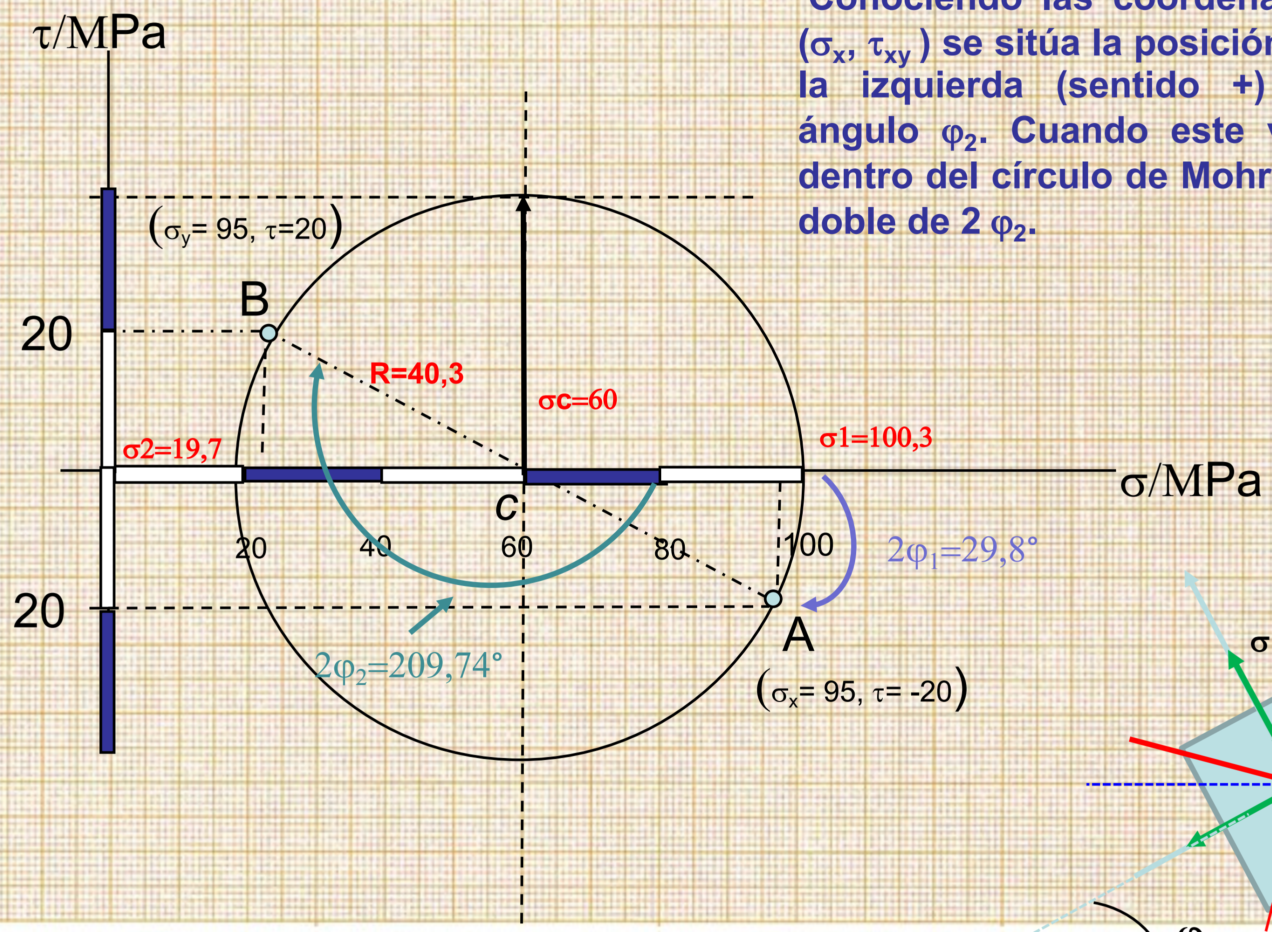


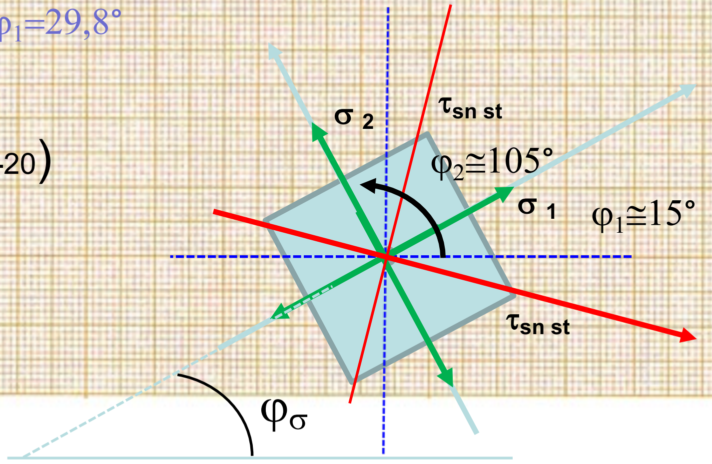
$$\varphi_1 = 14{,}9$$

$$\varphi_2 = 104{,}87^{o}$$

Conociendo las coordenadas del punto A (σ_x, τ_{xy}) se sitúa la posición de σ_1 girando a la izquierda (sentido +) este punto un ángulo φ_1. Cuando este valor se traslada dentro del círculo de Mohr se pone un valor doble de 2 φ_1.

Conociendo las coordenadas del punto A (σ_x, τ_{xy}) se sitúa la posición de σ_2 girando a la izquierda (sentido +) este punto un ángulo φ_2. Cuando este valor se traslada dentro del círculo de Mohr se pone un valor doble de 2 φ_2.





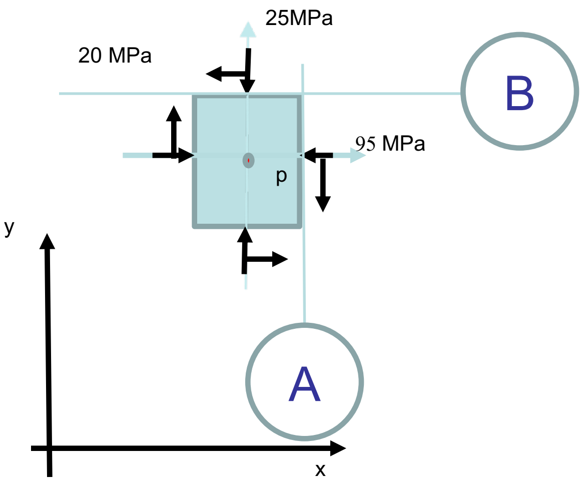
5. Pasos a seguir para llevar a cabo un análisis de esfuerzos mediante el círculo de Mohr.

8. Se calculan los valores de los esfuerzos tangenciales máximos y mínimos y los ángulos de giro existentes empleando las ecuaciones:

$$[15]\ Max.\varphi_{\tau} = Max.\varphi_{\sigma} + \frac{\pi}{4}$$

$$[16]\quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$[4.2]\quad \tau_{\max} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^{\ 2}}$$



A continuación se representa τ_{max} y τ_{min}.

$$\varphi_1 = 14,9$$

$$\varphi_2 = 104,87^{o}$$

$$[15]\ Max.\varphi_\tau = Max.\varphi_\sigma + \frac{\pi}{4}$$

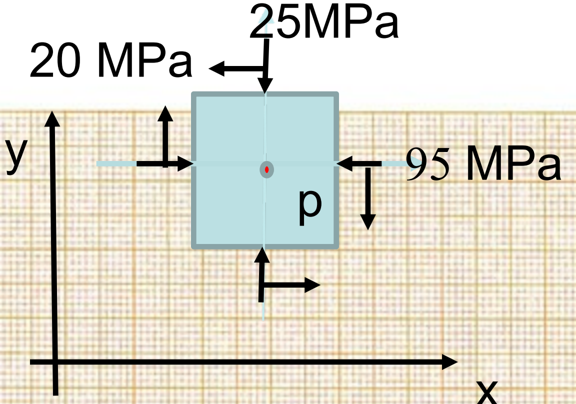
$$Max.\varphi_\tau = 14,9 + \frac{\pi}{4} \Rightarrow Max.\varphi_\tau = 14,9 + 45 \Rightarrow Max.\varphi_\tau = 60,56^{o}$$

$$[16] \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$[16] \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = \frac{95 + 25}{2} = 60 \Rightarrow$$

$$[4.2] \quad \tau_{\max} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2}; \Rightarrow \tau_{\max} = \pm 40,31$$

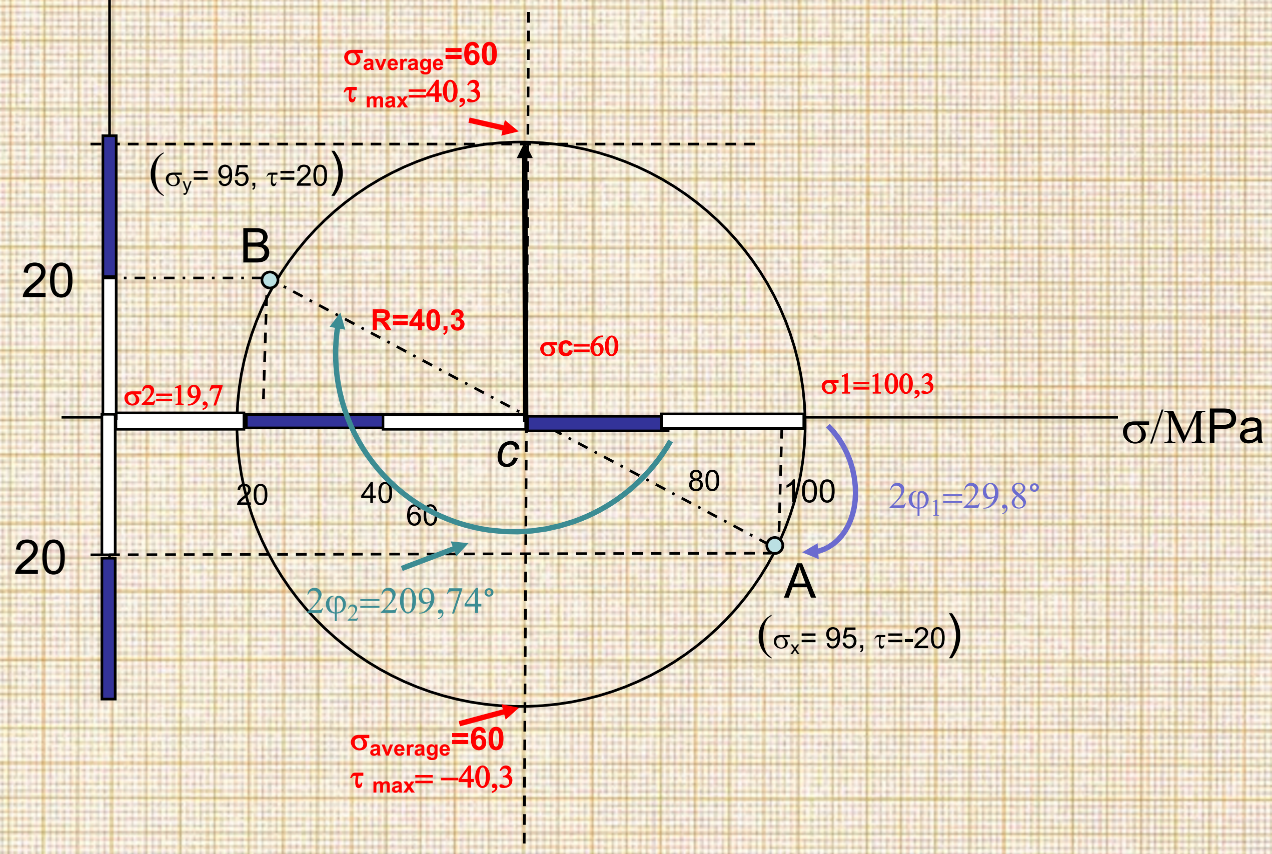
Ejemplo hasta el paso 8



$$\varphi_1 = 14{,}9$$

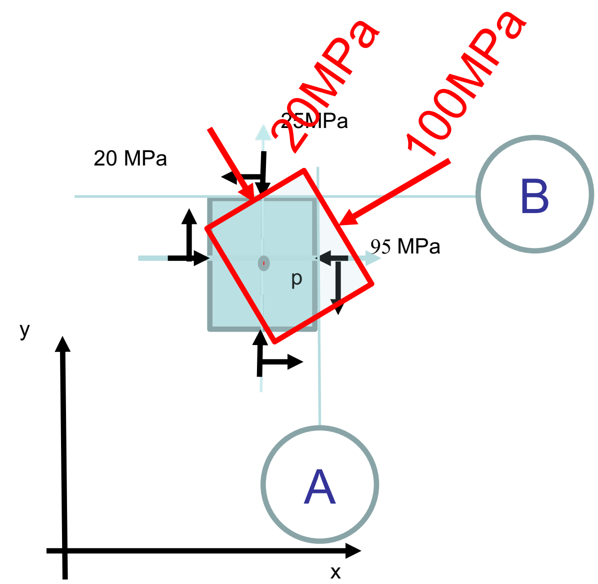
$$\varphi_2 = 104{,}87^\circ$$

Los esfuerzos tangenciales máximos y mínimos se sitúan a 45º más allá de los principales. Girando a la izquierda (sentido +) de (σ_1, 0) un ángulo φ_1+π/2 se sitúa la posición de $\sigma_{average}$, τ_{max}. Girando a la izquierda de (σ_2, 0) un ángulo φ_1+π/2 se sitúa la posición de $\sigma_{average}$, τ_{min}.



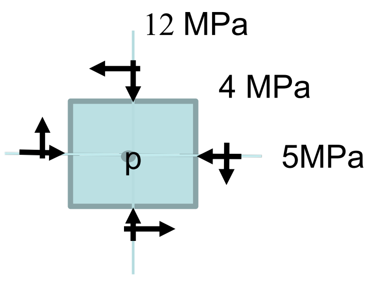
5. Pasos a seguir para llevar a cabo un análisis de esfuerzos mediante el círculo de Mohr.

9. Se giran los ejes de los esfuerzos principales en el mismo sentido



Ejemplo de giro de ejes

Ejemplo de material sometido a esfuerzos normales y de corte en planos perpendiculares

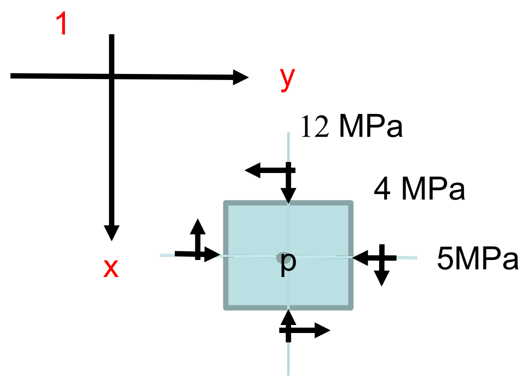


Se pide obtener:

1. Círculo de Mohr
2. Polo
3. Tensiones principales y la dirección del plano donde actúan
4. Las tensiones de corte y la dirección del plano donde actúan
5. La tensión correspondiente a un plano que forma un ángulo de 60 º con la horizontal

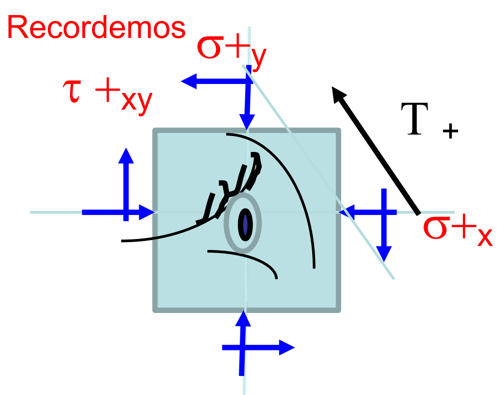
Pasos

1. Situar los ejes X,Y respecto a los esfuerzos mayores o menores del sistema
2. Obtener las coordenadas de esos planos en el círculo de Mohr:

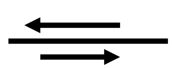


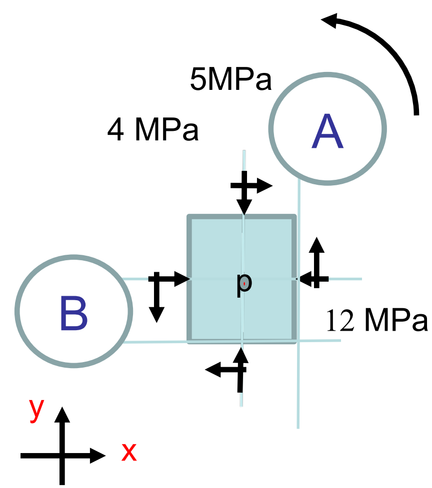
Sistema a compresión, y antohorario +

Coordenadas de los planos: A (12,4); B (5,-4)



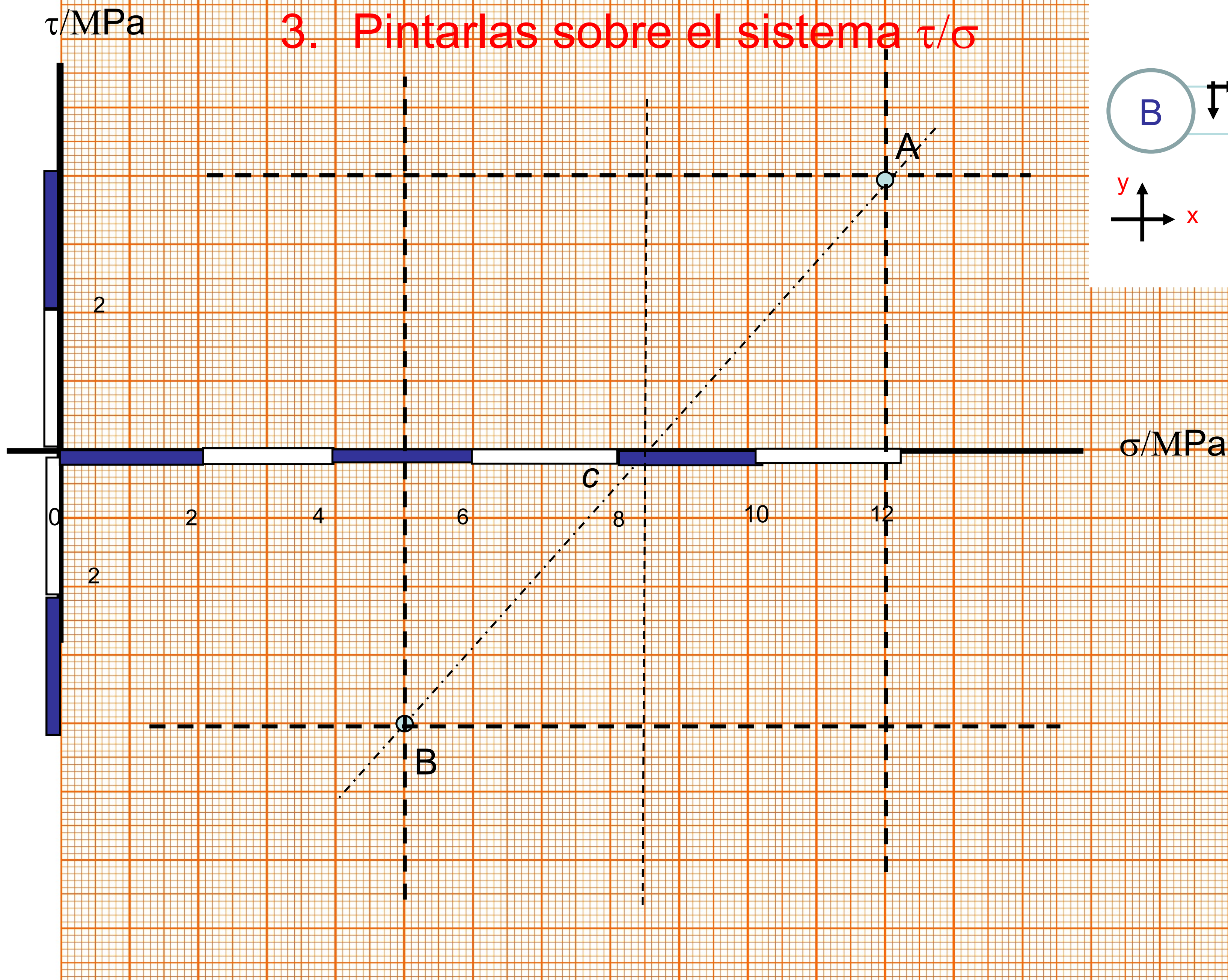
Se rota el esquema del sólido para hacer que los ejes sean coherentes con los del sistema del círculo de Mohr

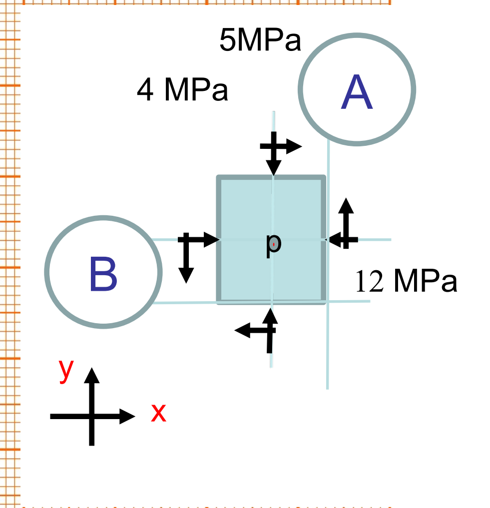




Pasos:

3. Pintarlas sobre el sistema τ/σ





Pasos:

4. Calcular esfuerzos máximos y mínimos mediante

$$[9] \qquad \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2}$$

$$[10] \qquad \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2}$$

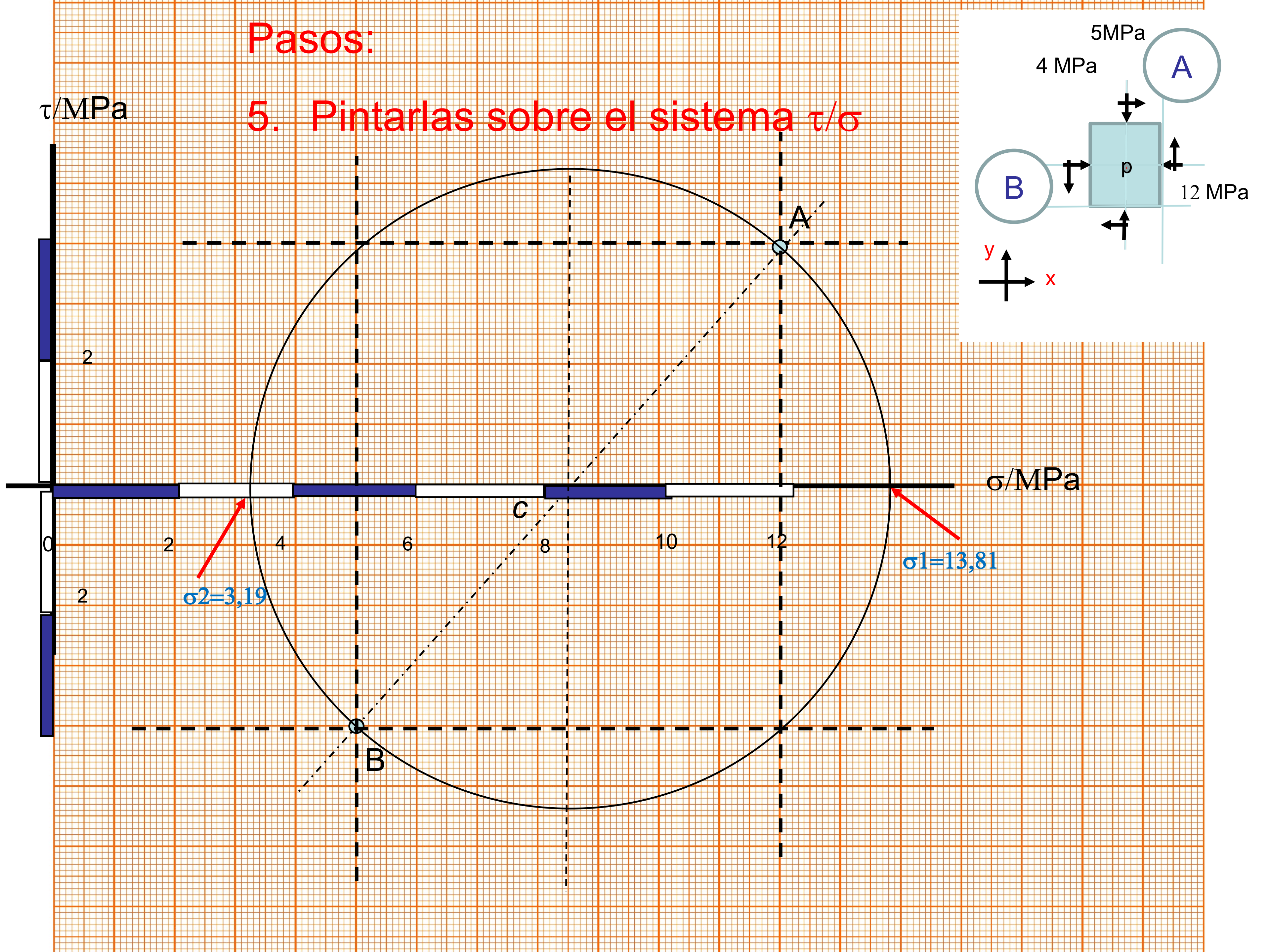
$$[9] \qquad \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2} ; \sigma_1 = \frac{12+5}{2} + \sqrt{\left(\frac{12-5}{2}\right)^2 + 4^2}$$

$$\sigma_1 = 8{,}5 + \sqrt{28{,}25}; \qquad \sigma_1 = 8{,}5 + 5{,}31 \Rightarrow \sigma_1 = 13{,}81$$

$$[10] \qquad \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2} ; \sigma_2 = 8{,}5 - \sqrt{28{,}25}; \ \sigma_2 = 8{,}5 - 5{,}31 \Rightarrow \sigma_2 = 3{,}19$$

Pasos:

5. Pintarlas sobre el sistema τ/σ



Pasos:

6. Calcular esfuerzo medio y el radio mediante:

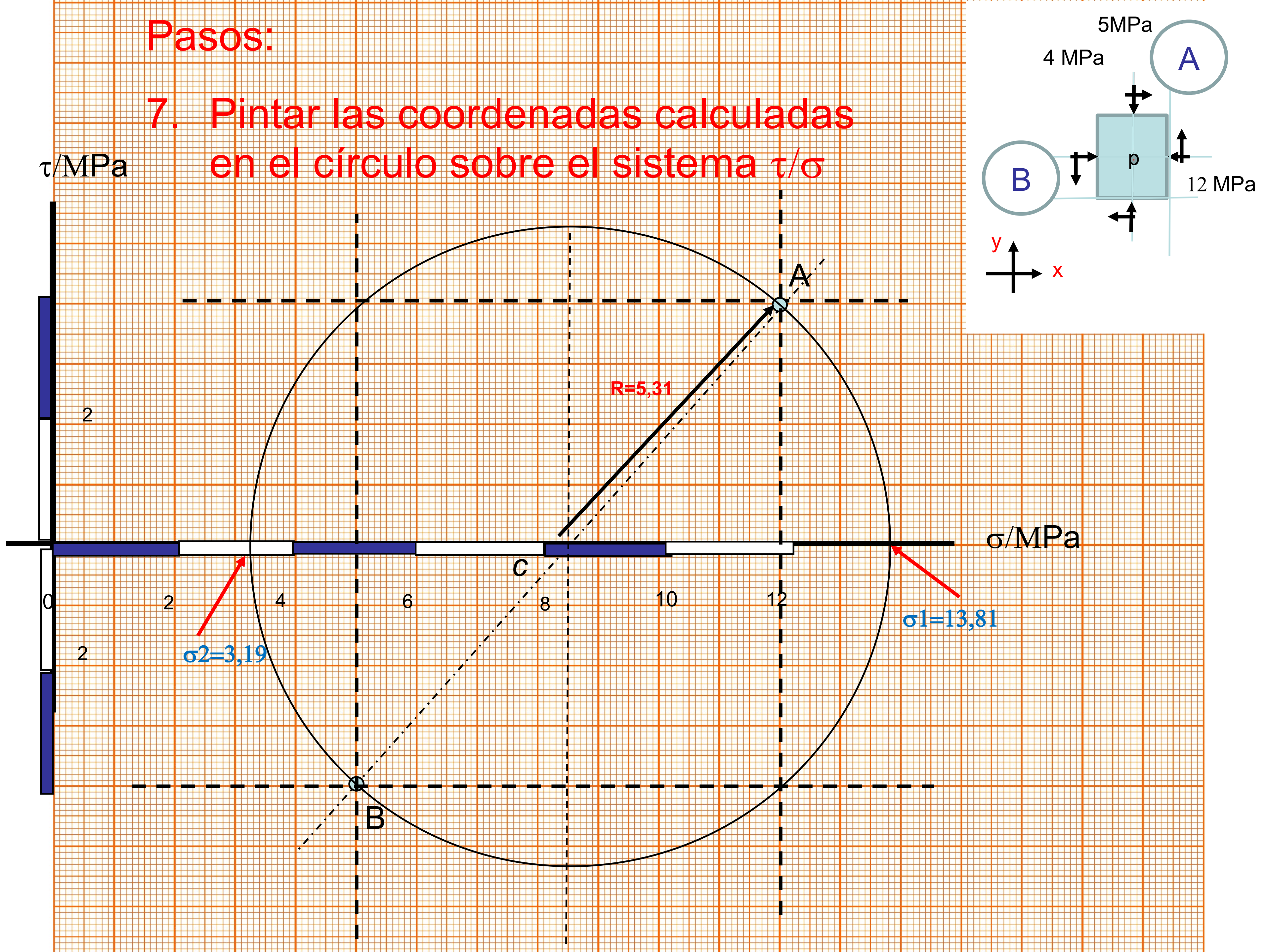
$$[10.1]\quad \sigma_{average} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2); \sigma_{average} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \Rightarrow \sigma_{average} = 8{,}5$$

$$[22]\; R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{12-5}{2}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{(3{,}5)^2 + 4^2} = \sqrt{12{,}25 + 16} = \sqrt{28{,}25} = 5{,}31$$

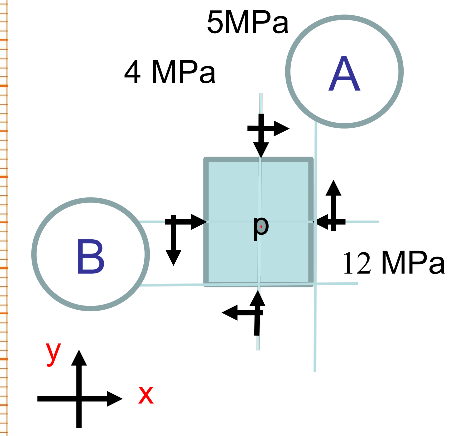
Pasos:

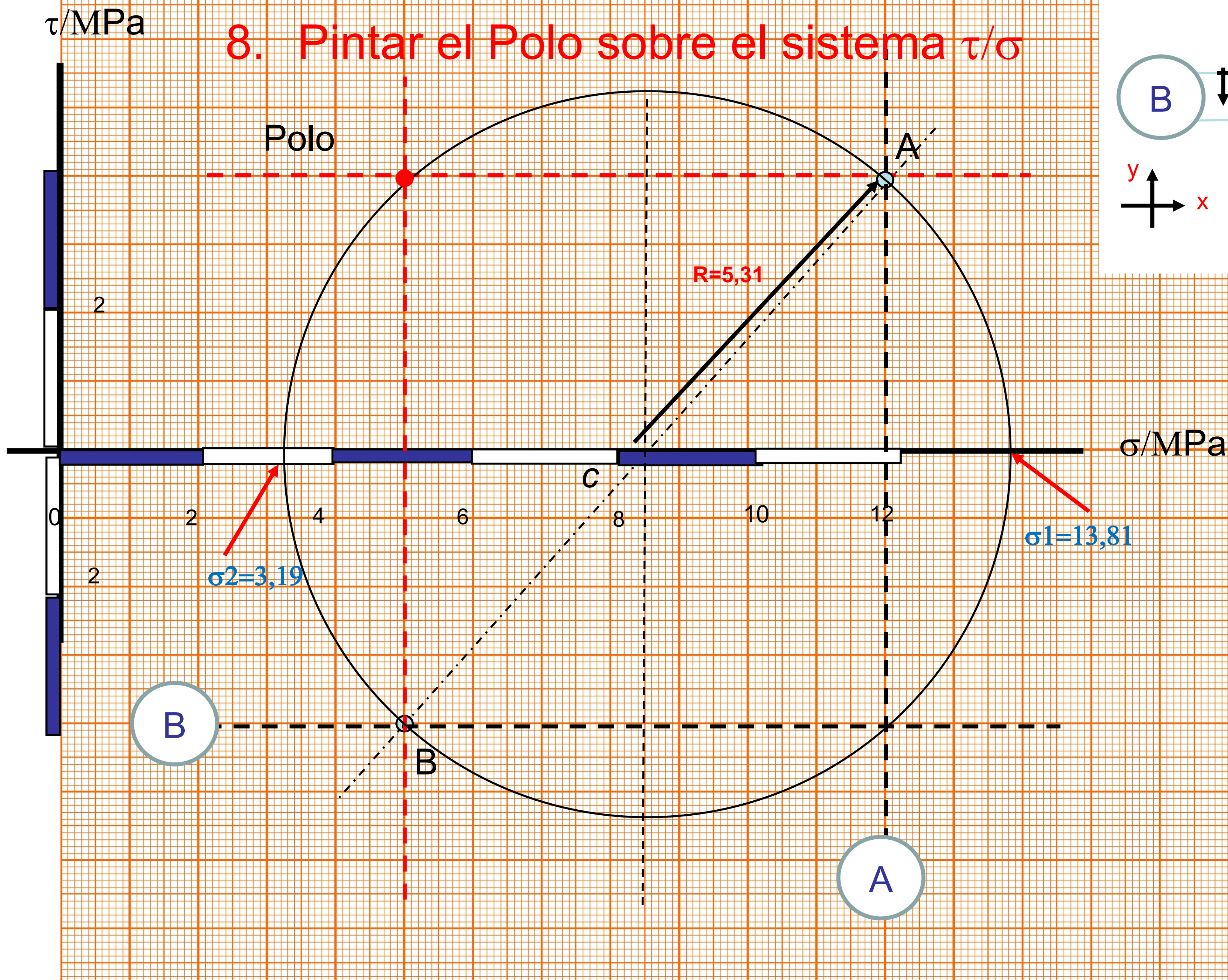
7. Pintar las coordenadas calculadas en el círculo sobre el sistema τ/σ



Pasos:

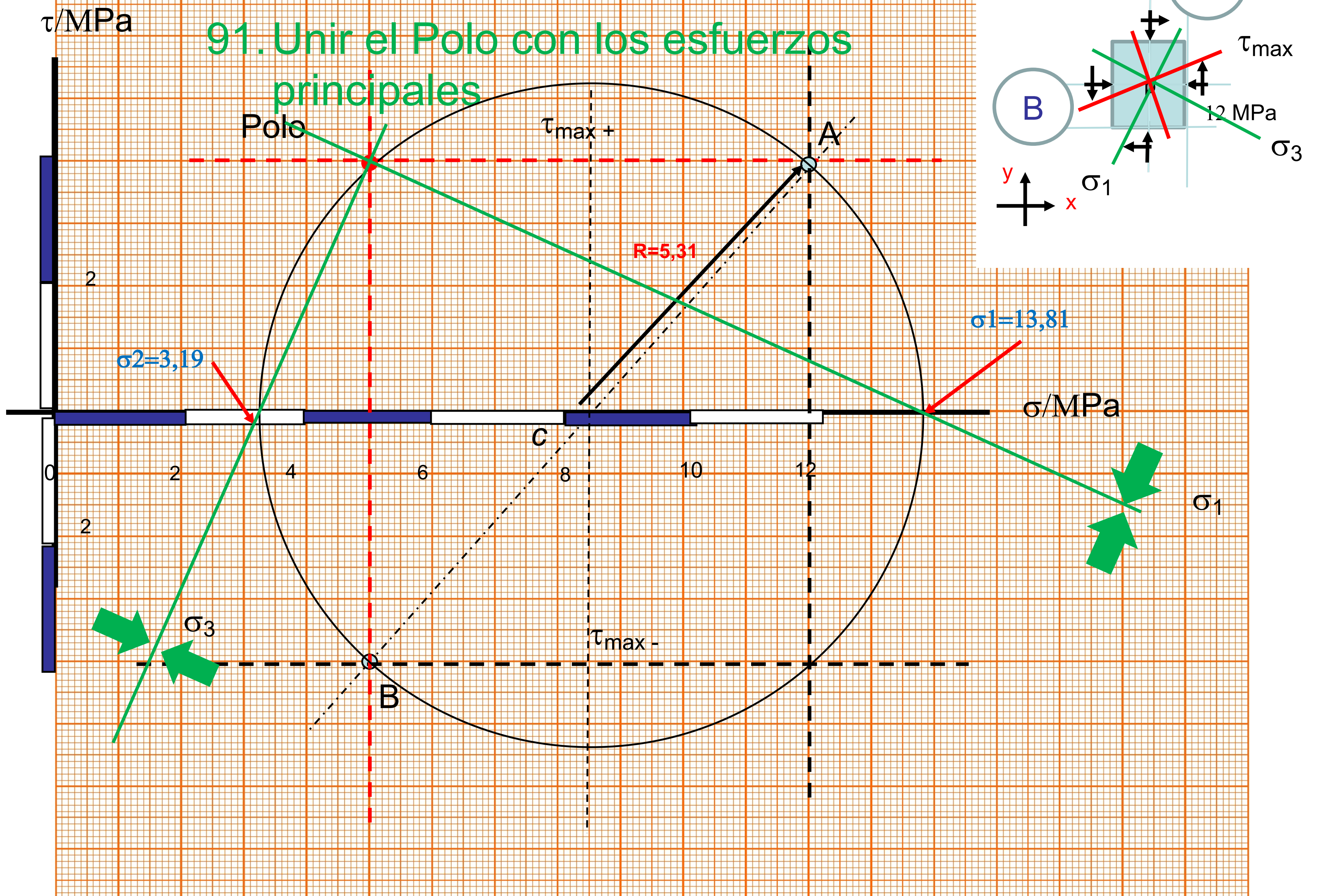
8. Pintar el Polo sobre el sistema τ/σ

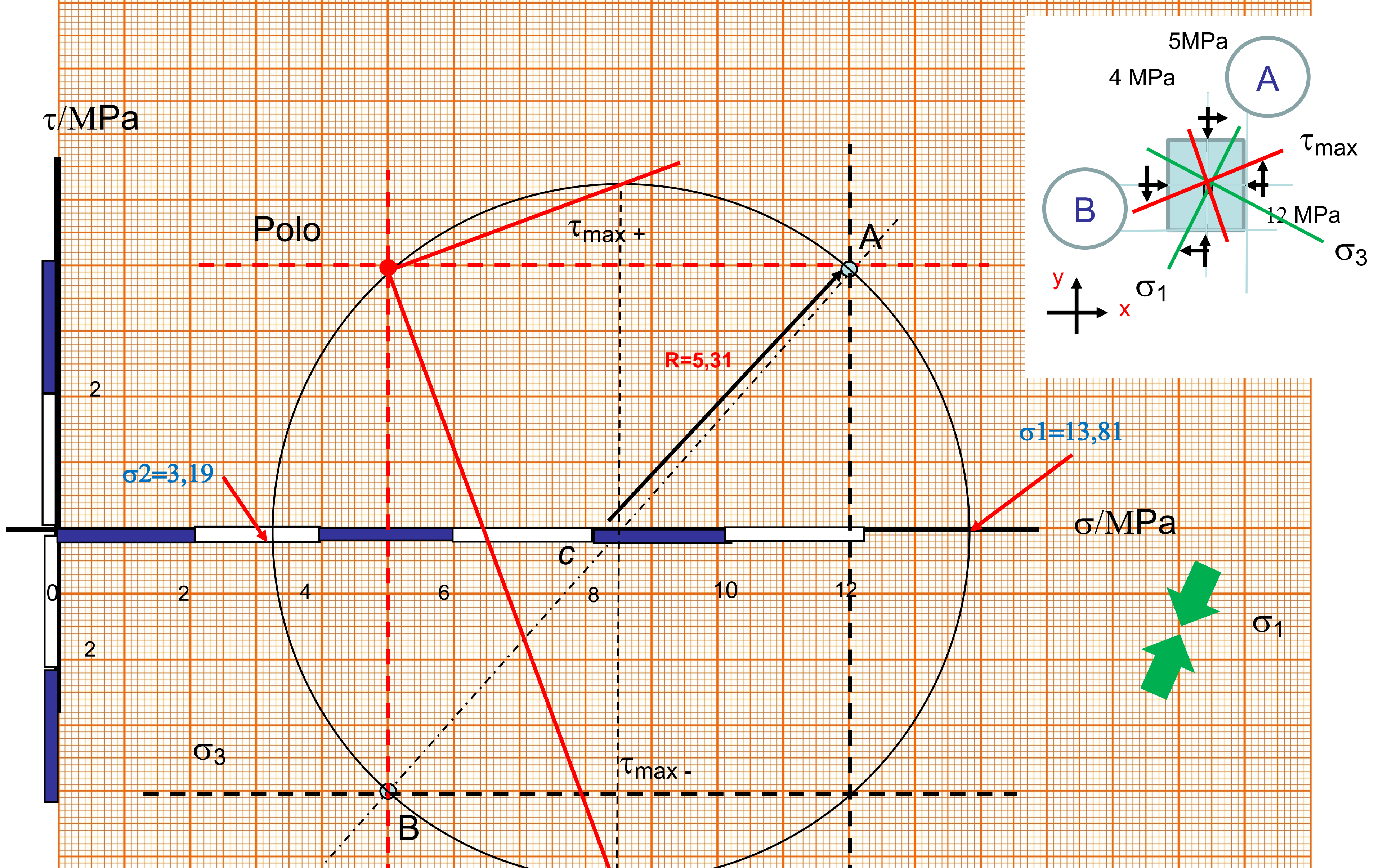




Pasos:

91. Unir el Polo con los esfuerzos principales



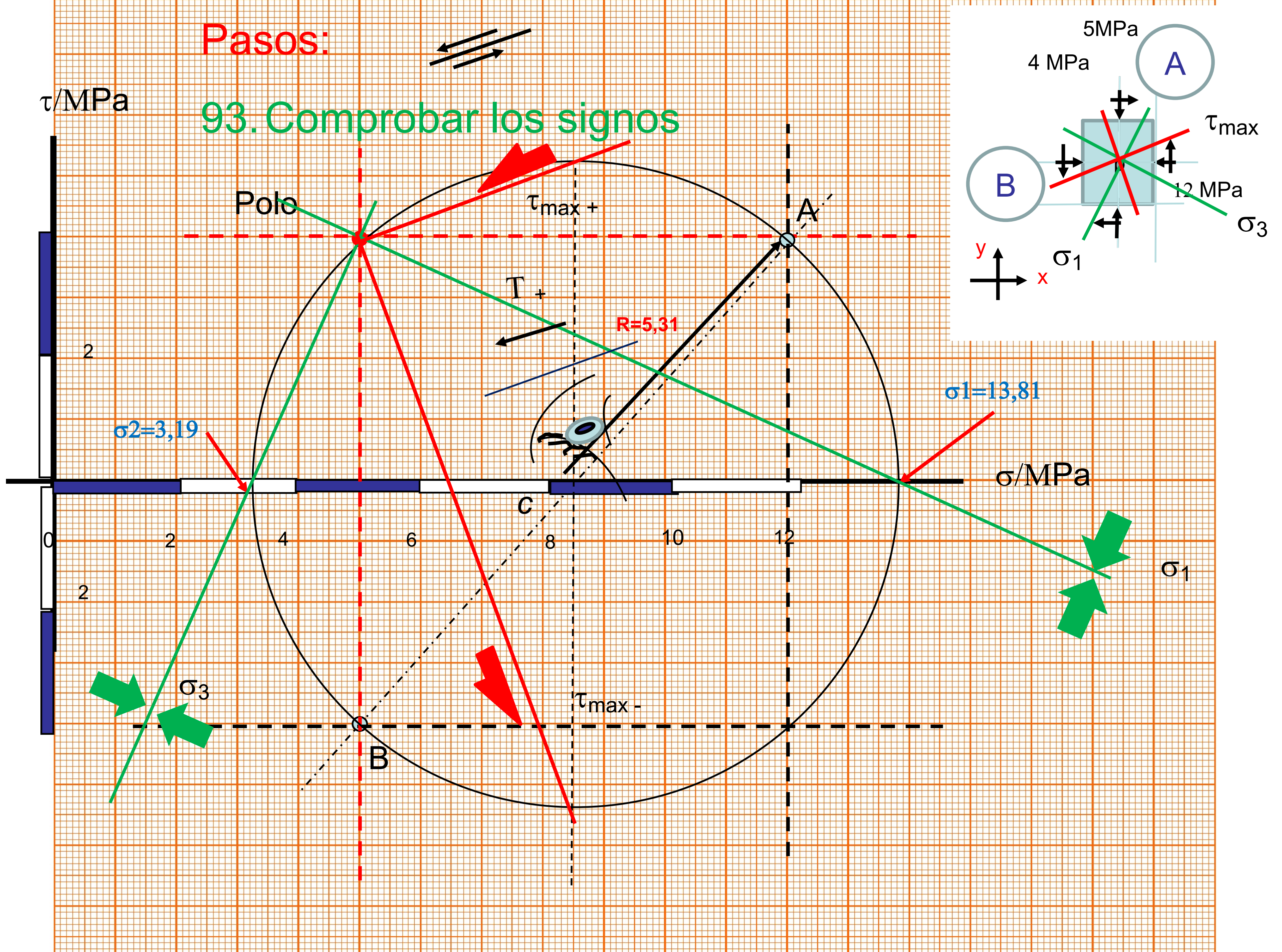


Pasos:

92. Unir el Polo con los esfuerzos de corte principales

Pasos:

93. Comprobar los signos



Pasos:

10. Calcular los ángulos de esos esfuerzos mediante

$$[7]\ \tan 2\varphi = \frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)}$$

$$[7.1]\ \varphi_1 = \frac{1}{2} * \tan^{-1}\left(\frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)}\right); \varphi_1 = \frac{1}{2} * \arctan\left(\frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)}\right); \Rightarrow \varphi_1 = \frac{1}{2} * \arctan\left(\frac{2*4}{12-5}\right);$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} * \arctan\left(\frac{8}{7}\right); \Rightarrow \varphi_1 = \frac{1}{2} * \arctan(1{,}1429) \Rightarrow \varphi_1 = \frac{1}{2} * 48{,}8151 \Rightarrow \varphi_1 = 24{,}4076$$

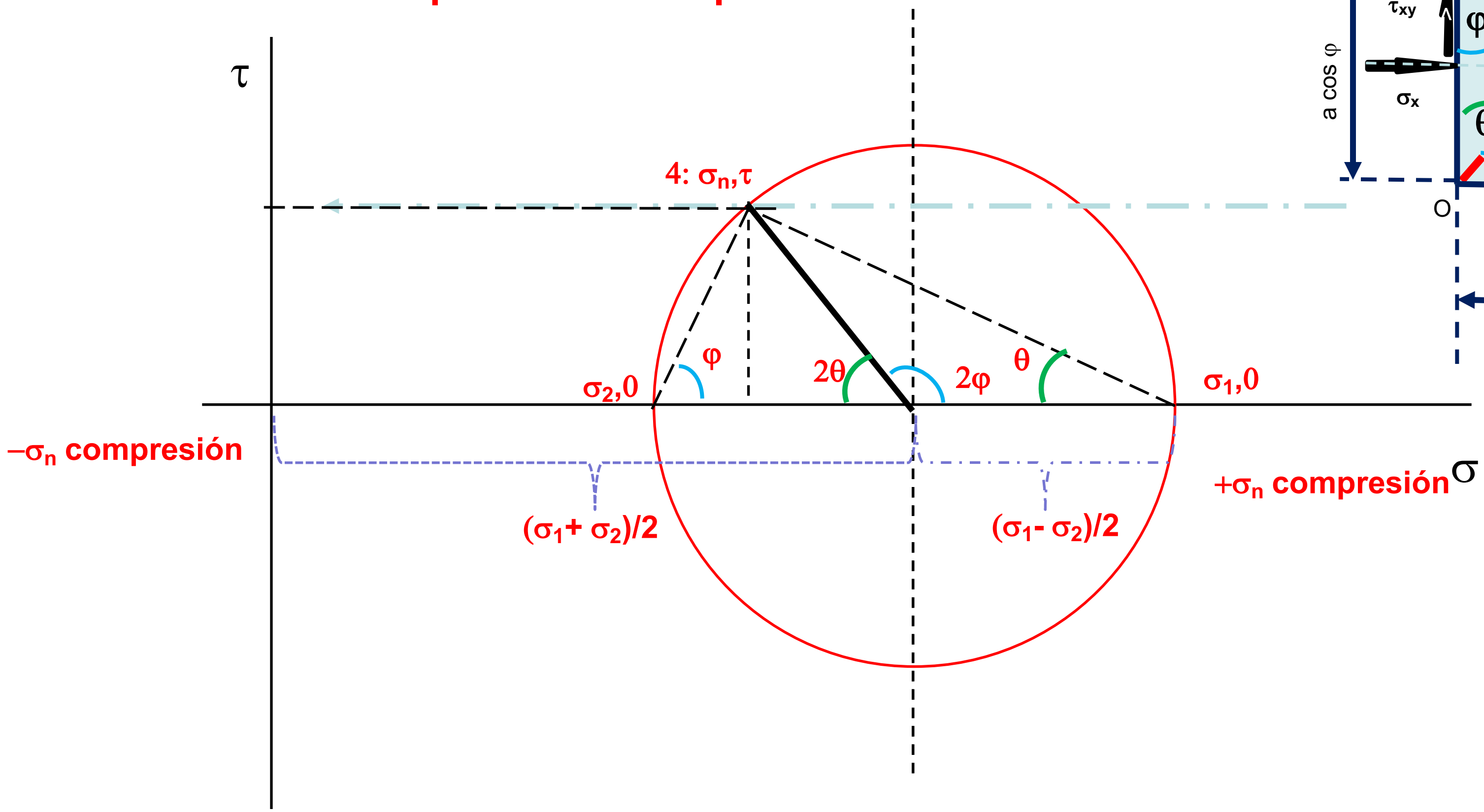
$$[7.2]\ \varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_2 = 24{,}4076 + 90^{\circ} \Rightarrow \varphi_2 = 114{,}4076^{\circ}$$

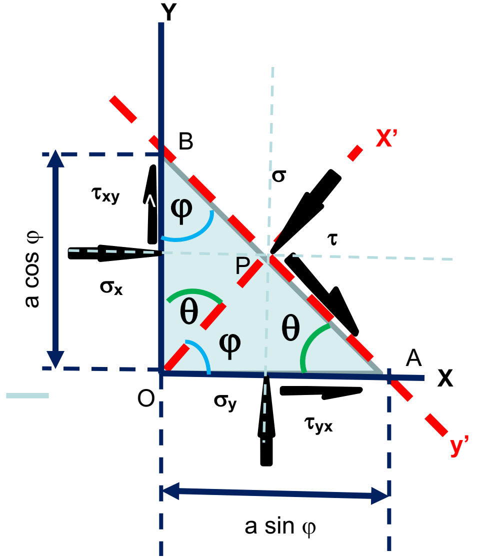
$$[15]\ Max.\varphi_\tau = Max.\varphi_\sigma + \frac{\pi}{4}$$

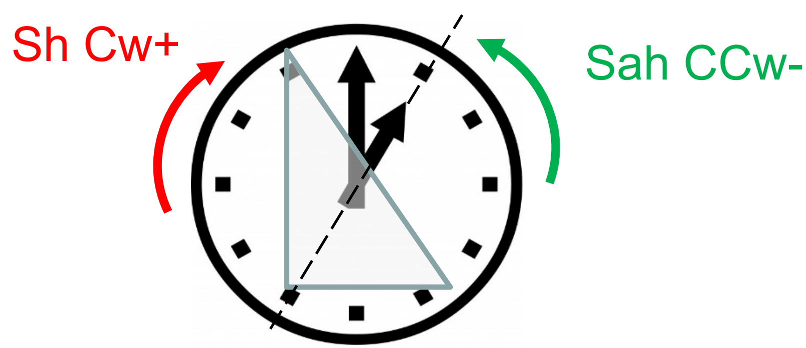
$$[15]\ Max.\varphi_\tau = 114{,}4076^{\circ} + \frac{\pi}{4} = 159{,}4076^{\circ}$$

Pasos:

11. Teniendo presente que

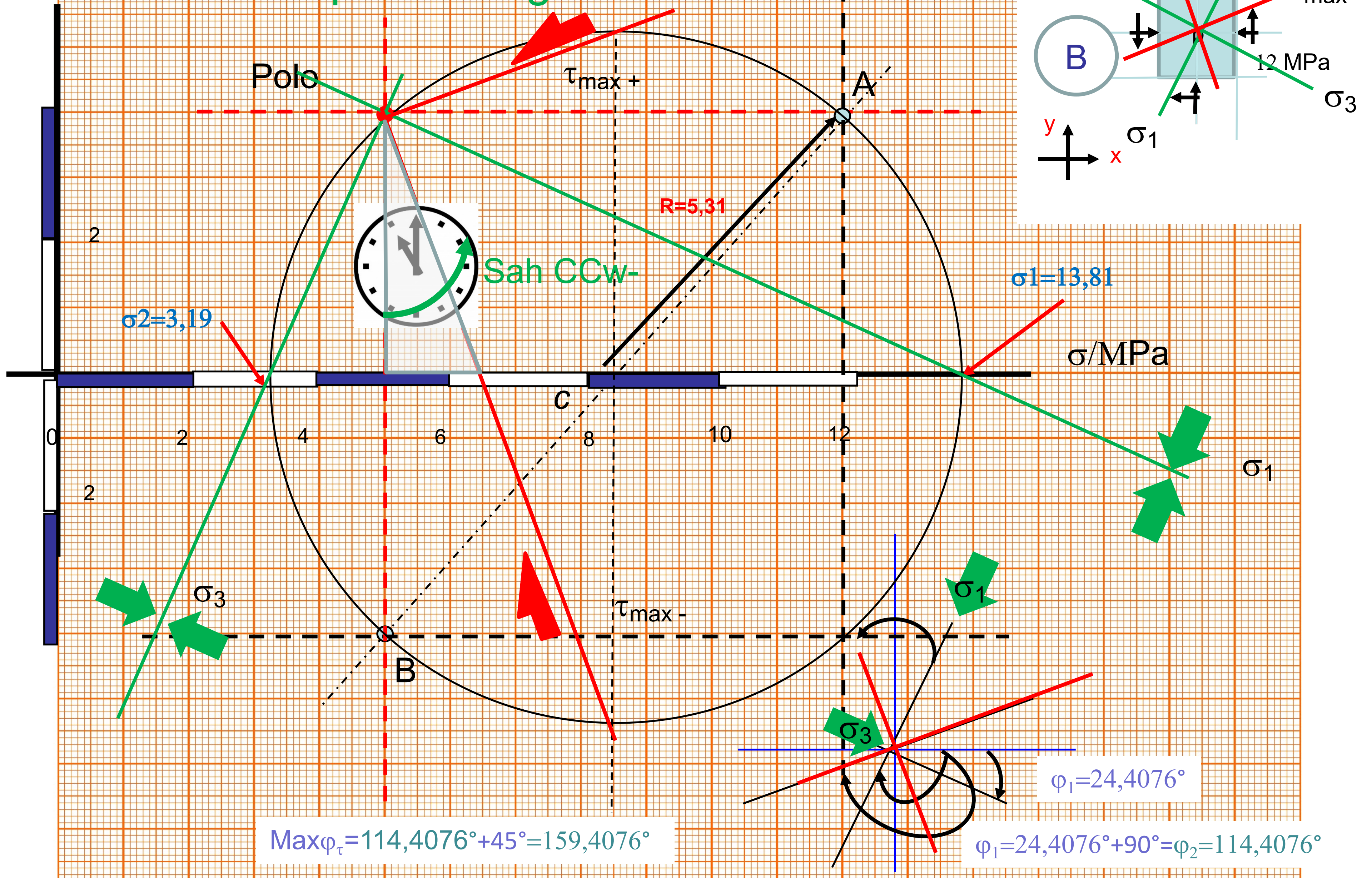






Pasos:

12. Comprobar ángulos



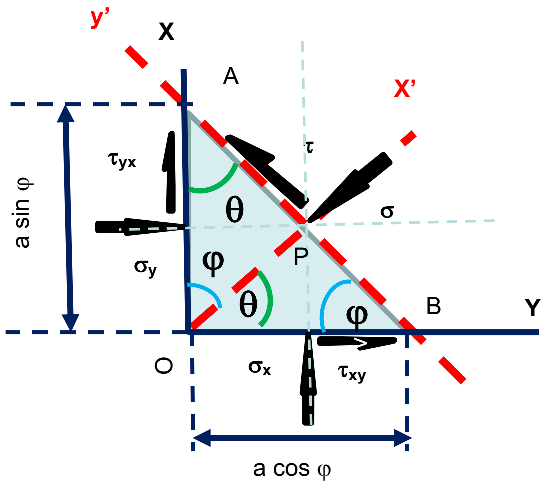
13. Determinar analíticamente la tensión correspondiente a un plano que forma un ángulo de 60 º con la horizontal

$$[3a]\quad \sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\varphi + \tau_{xy} sen 2\varphi$$

$$\sigma = \frac{12+5}{2} + \frac{12-5}{2}\cos 120 + 4 sen 120$$

$$\sigma = 8{,}5 + 3{,}5 * (-0{,}5) + 4 sen(0{,}866)$$

$$\sigma = 8{,}5 + -1{,}75 + 3{,}4641 = 10{,}21$$



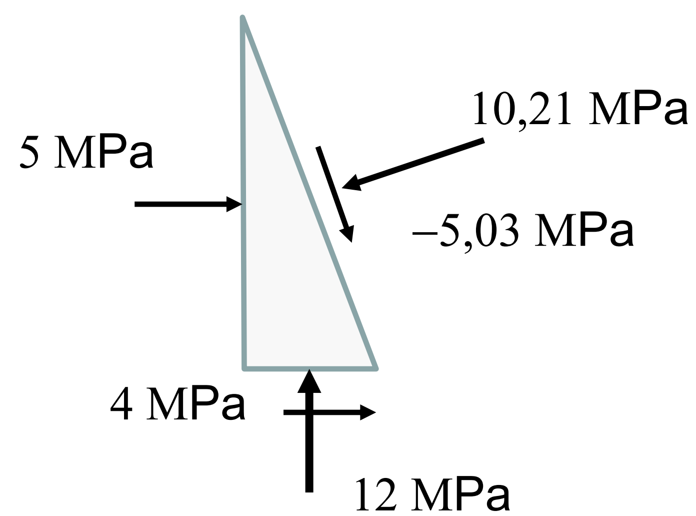
$$[3b1]\quad \tau = -\frac{1}{2}(\sigma x - \sigma y)\sin 2\varphi + \tau xy \cos 2\varphi$$

$$\tau = -\frac{1}{2}(12-5)\sin 120 + 4\cos 120$$

$$\tau = -3{,}5 * (0{,}866) + 4 * (-0{,}5)$$

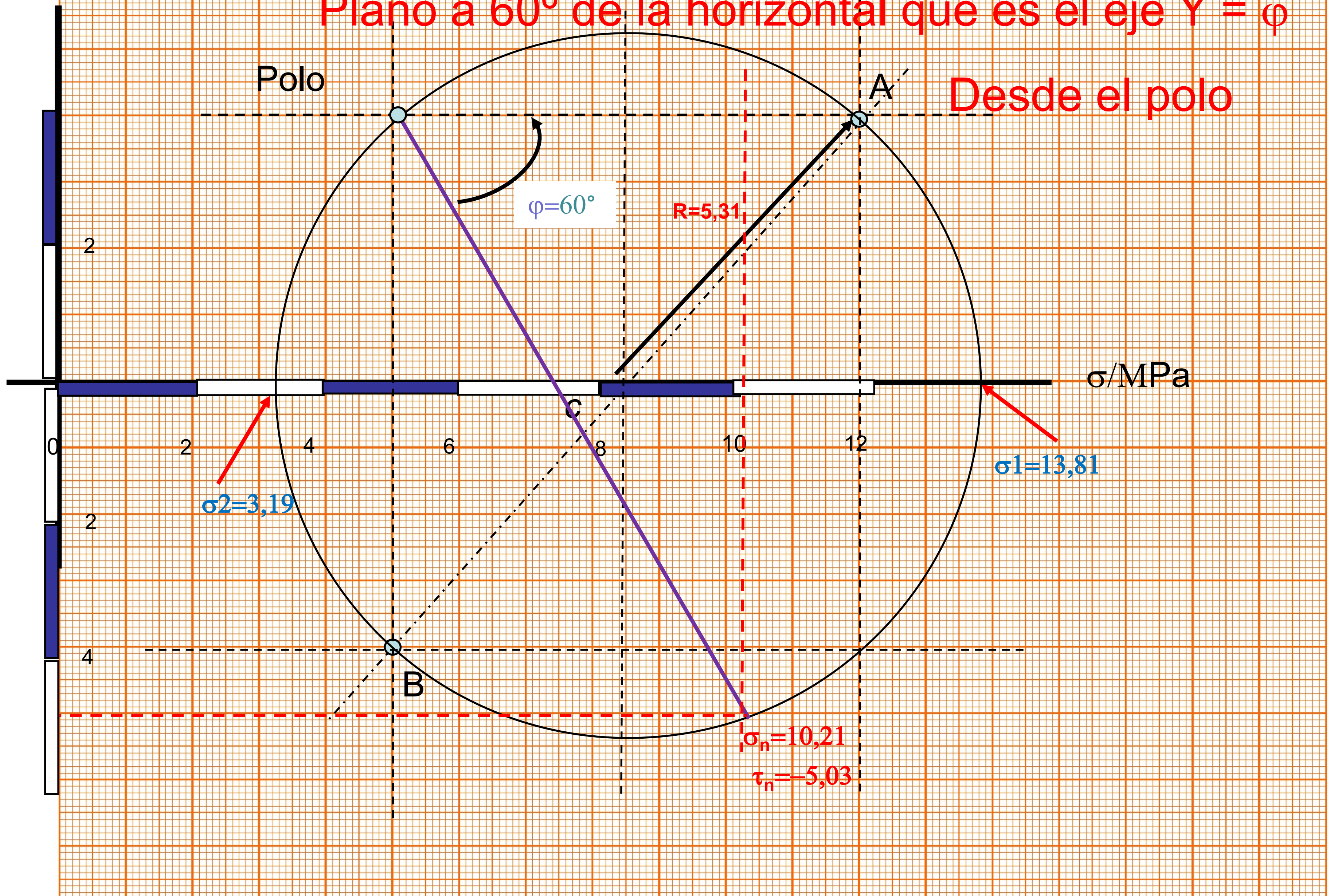
$$\tau = -3{,}031 + (-2) = -5{,}03$$

Esquema de esfuerzos



Pasos:

14. Determinar gráficamente las tensiones de un Plano a 60º de la horizontal que es el eje Y = φ



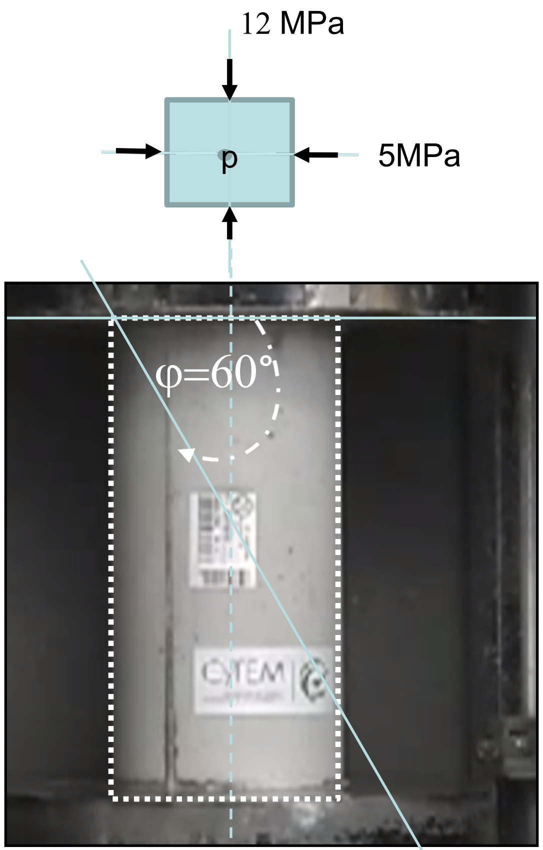
PROBLEMAS TIPO

B

Dado los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 determinar los esfuerzos σ y τ en un plano del solido que posee un ángulo φ

Ejemplo de una probeta en la prensa

En este contexto las presiones son principales no hay tensiones de corte

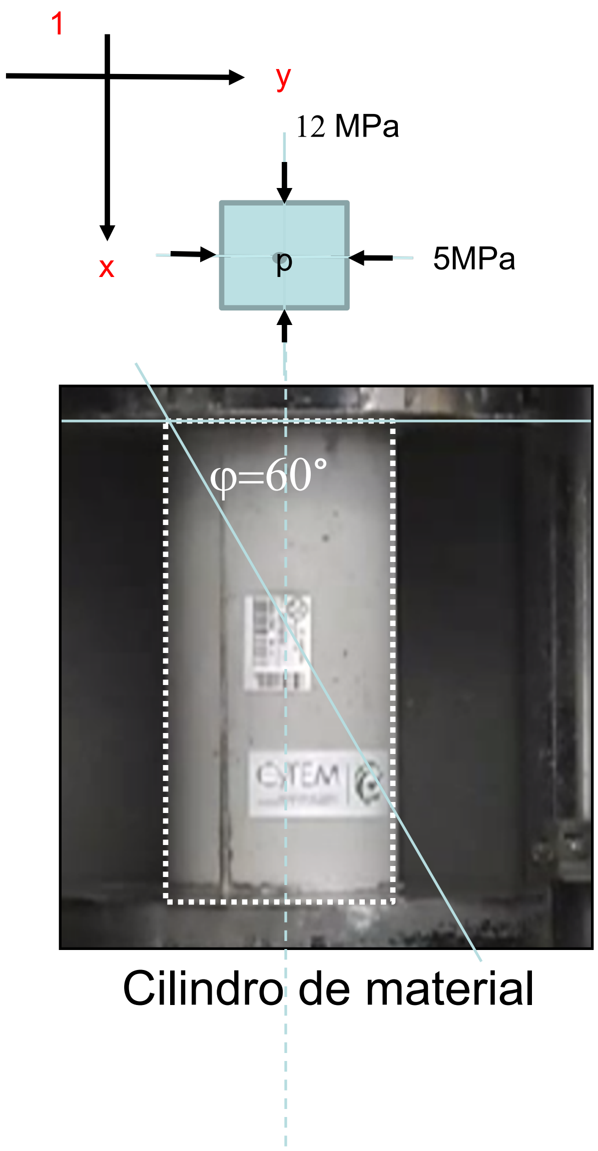


Cilindro de material

Se pide obtener:

1. Círculo de Mohr
2. Polo
3. La tensión correspondiente a un plano que forma un ángulo de 60 º con la horizontal
4. Tensiones normales en el plano
5. Las tensiones de corte en el plano

Ejemplo de una probeta en la prensa



Cilindro de material

Pasos:

1. Situar los ejes X,Y respecto a los esfuerzos mayores o menores del sistema
2. Los esfuerzos que se indican en la figura 3D corresponden a los planos principales σ_1 y σ_3 dado que no hay esfuerzos de corte.
3. Los valores de los esfuerzos normales y tangenciales viene dado por las siguientes ecuaciones en los que τ_{xy} son nulos:

$$[3a]\quad \sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\varphi + \tau_{xy} sen 2\varphi$$

$$[3a]\quad \sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\varphi$$

$$[3b1]\quad \tau = -\frac{1}{2}(\sigma x - \sigma y)\sin 2\varphi + \tau xy \cos 2\varphi$$

$$[3b1]\quad \tau = -\frac{1}{2}(\sigma x - \sigma y)\sin 2\varphi$$

Pasos:

4. tensión correspondiente a un plano que forma un ángulo de 60 º con la horizontal

$$[3a] \quad \sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\varphi + \tau_{xy} sen 2\varphi$$

$$[3a] \quad \sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\varphi$$

$$\sigma = \frac{12+5}{2} + \frac{12-5}{2}\cos 120 = 8{,}5 + 3{,}5 * (-0{,}5) = 6{,}75$$

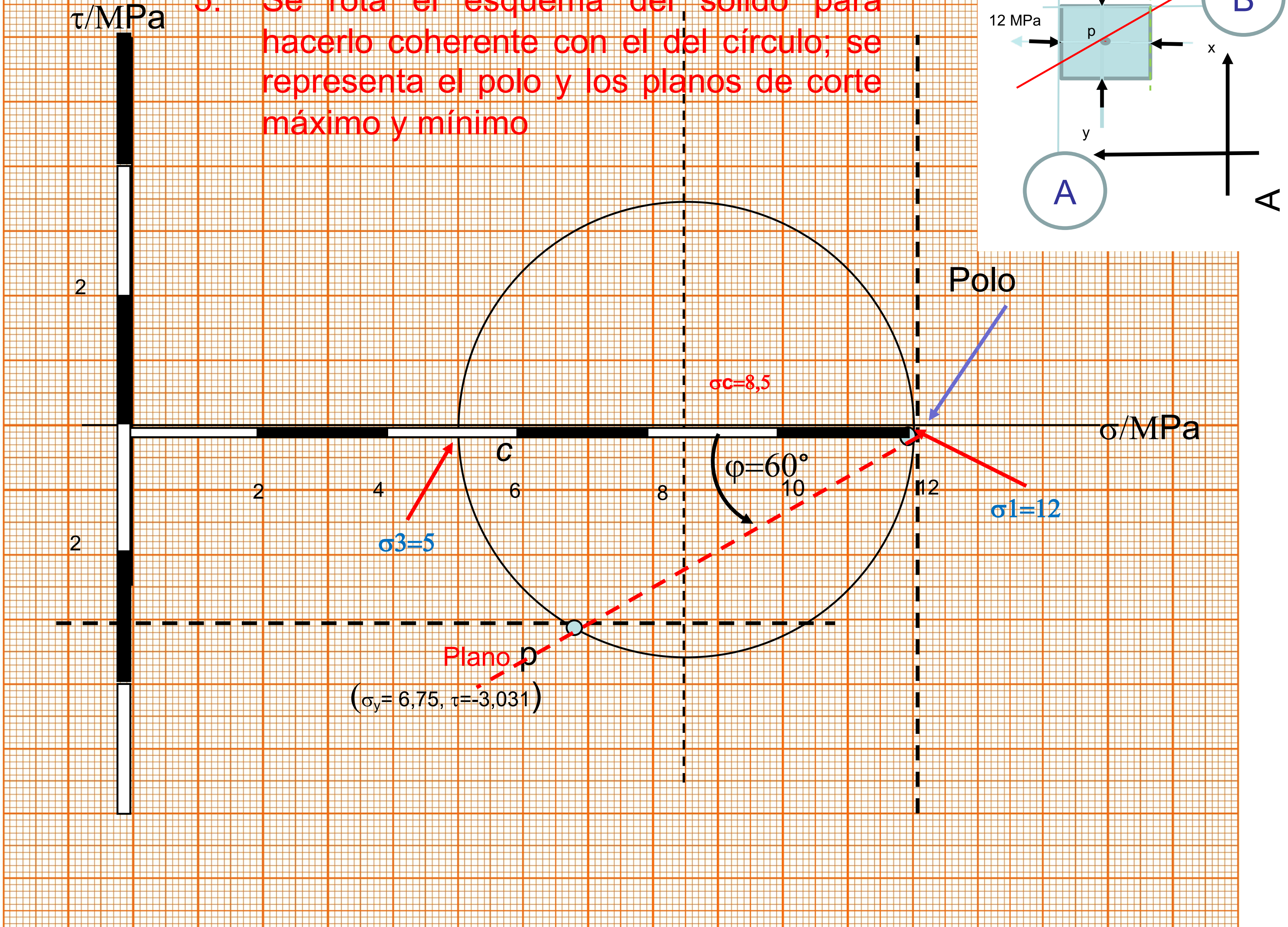
$$[3b1] \quad \tau = -\frac{1}{2}(\sigma x - \sigma y)\sin 2\varphi + \tau xy \cos 2\varphi$$

$$[3b1] \quad \tau = -\frac{1}{2}(\sigma x - \sigma y)\sin 2\varphi$$

$$\tau = -\frac{1}{2}(12-5)\sin 2\varphi = -3{,}5 * (0{,}866) = -3{,}031$$

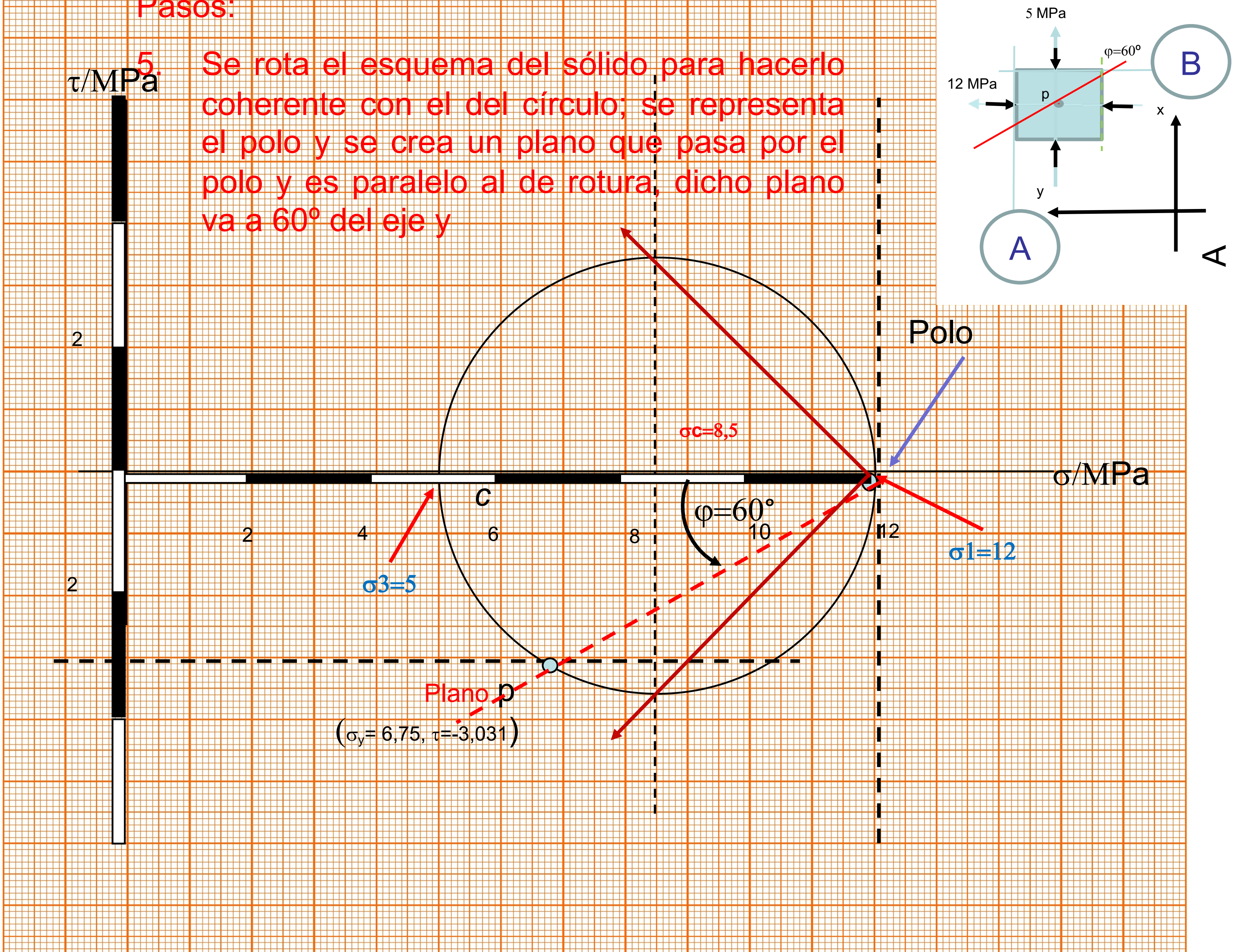
Pasos:

5. Se rota el esquema del sólido para hacerlo coherente con el del círculo; se representa el polo y los planos de corte máximo y mínimo



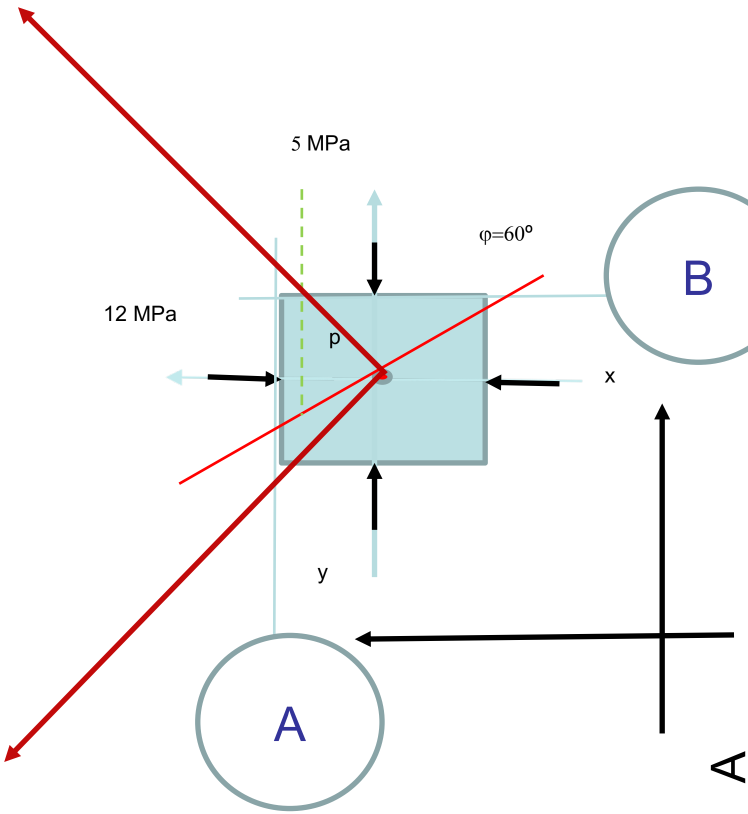
Pasos:

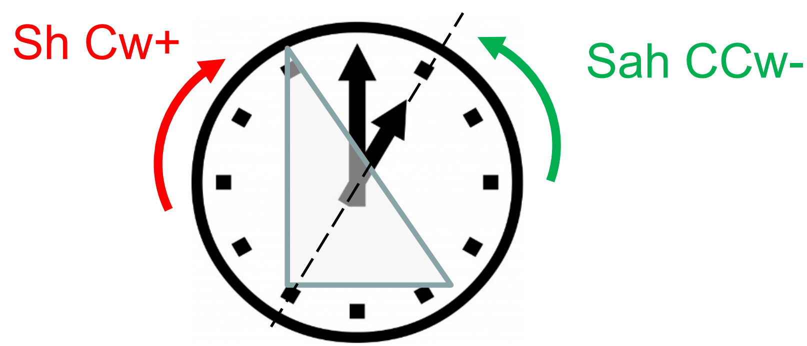
5. Se rota el esquema del sólido para hacerlo coherente con el del círculo; se representa el polo y se crea un plano que pasa por el polo y es paralelo al de rotura, dicho plano va a 60º del eje y



Pasos:

6. Fíjate que el ángulo de giro es negativo, lo que significa que aparece en la parte de abajo del círculo de Mohr





Pasos:

7. En la solución analítica se representan los valores determinados del plano que forma un ángulo de 60º con la horizontal