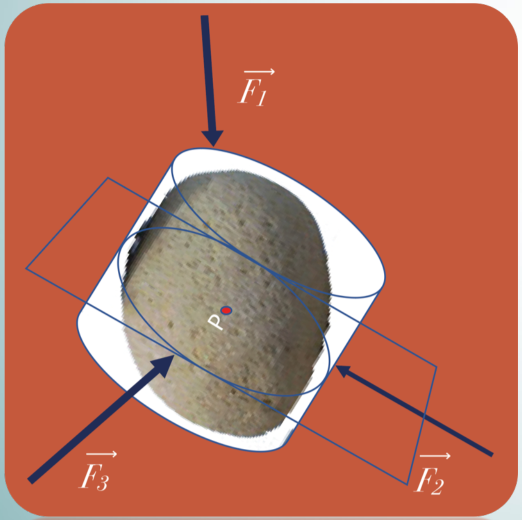
Caracterización geomecánica de suelos y rocas

Ejercicios de resistencia mediante círculo de Mohr



Alberto González Díez

Patricio Martínez Cedrún

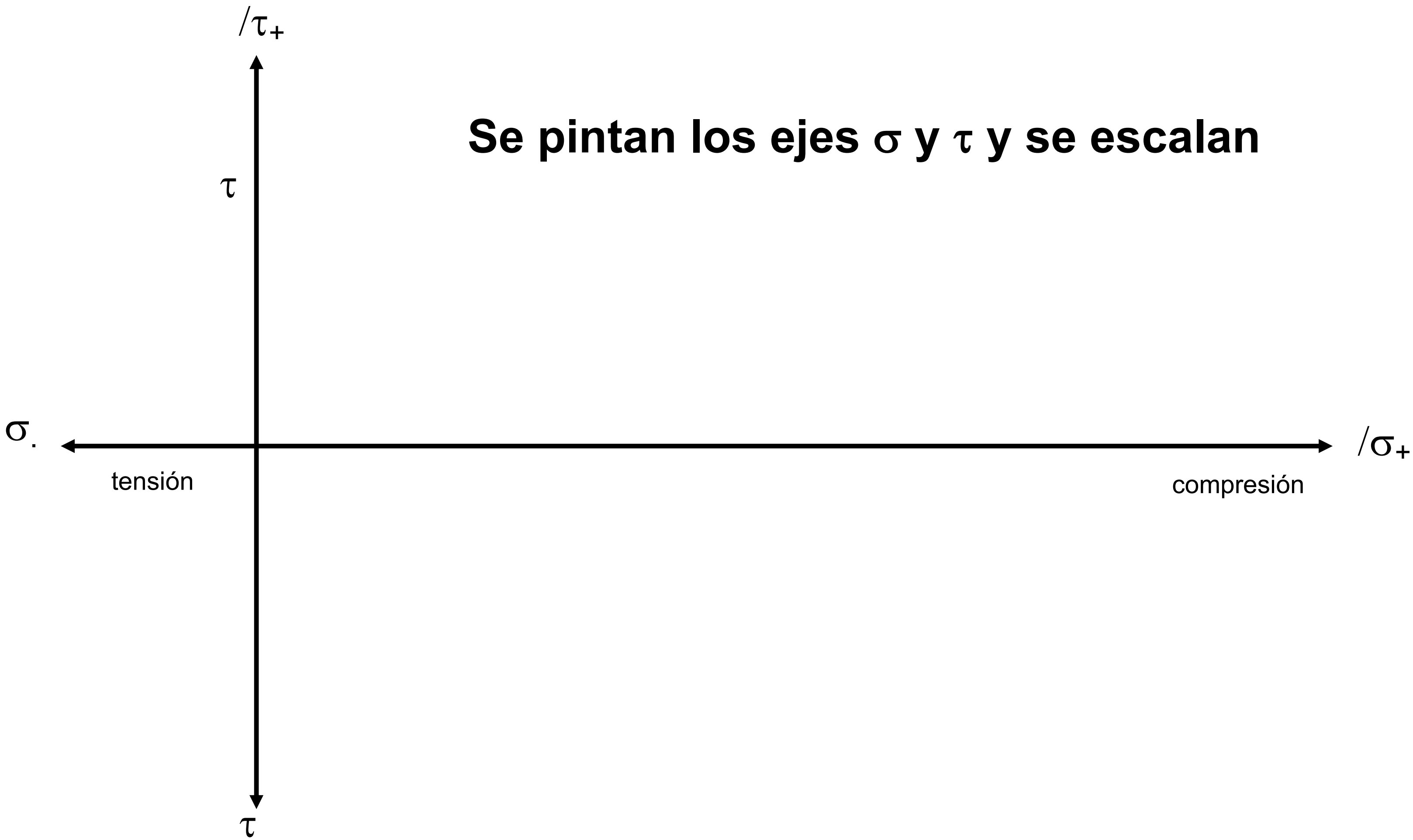
Dpto. de Ciencias de la Tierra y Física de la Materia Condensada (CITIMAC)

Recordatorio de Círculo de Mohr

problemas

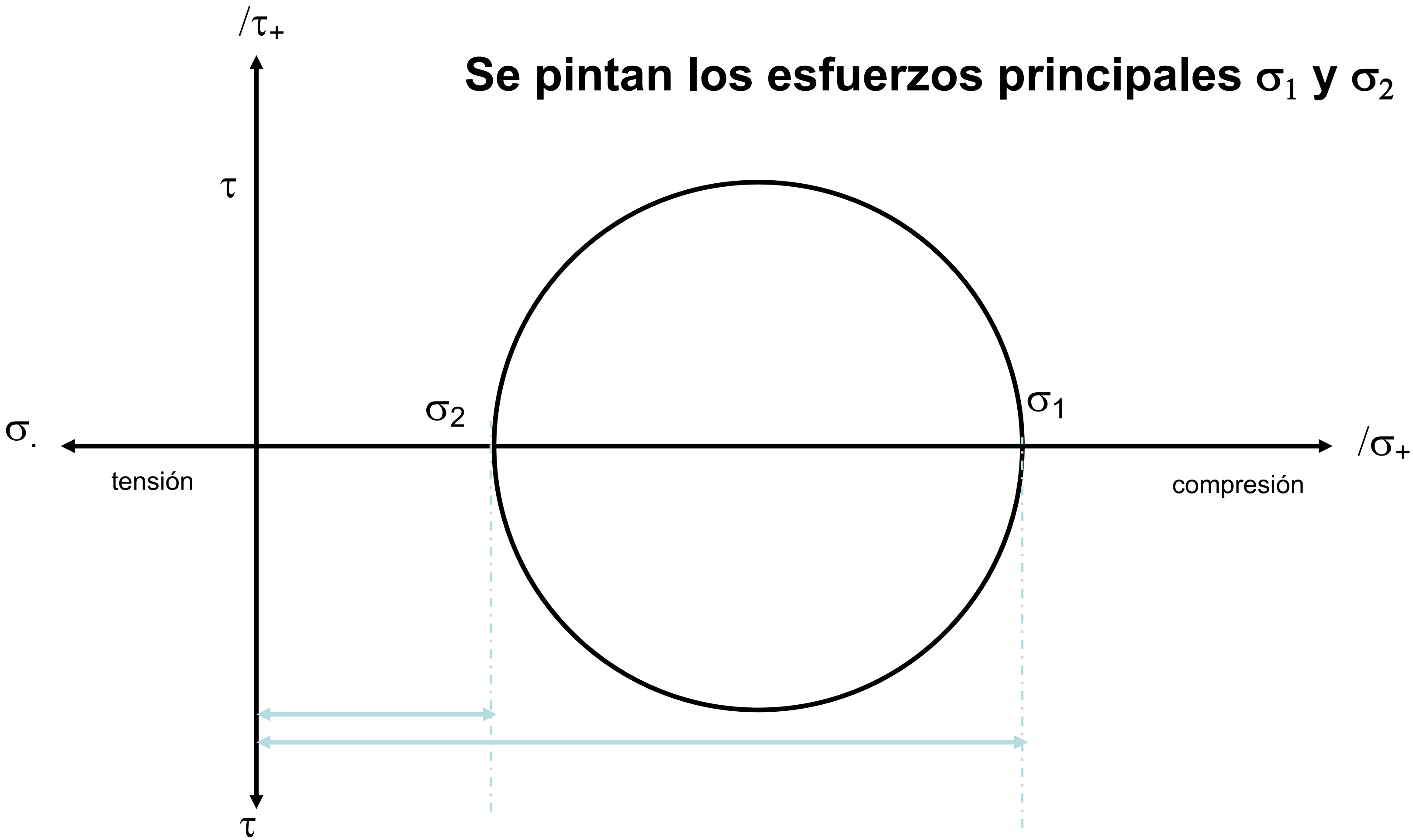
Cómo se construye el círculo de Mohr

Se pintan los ejes σ y τ y se escalan



Esfuerzos principales

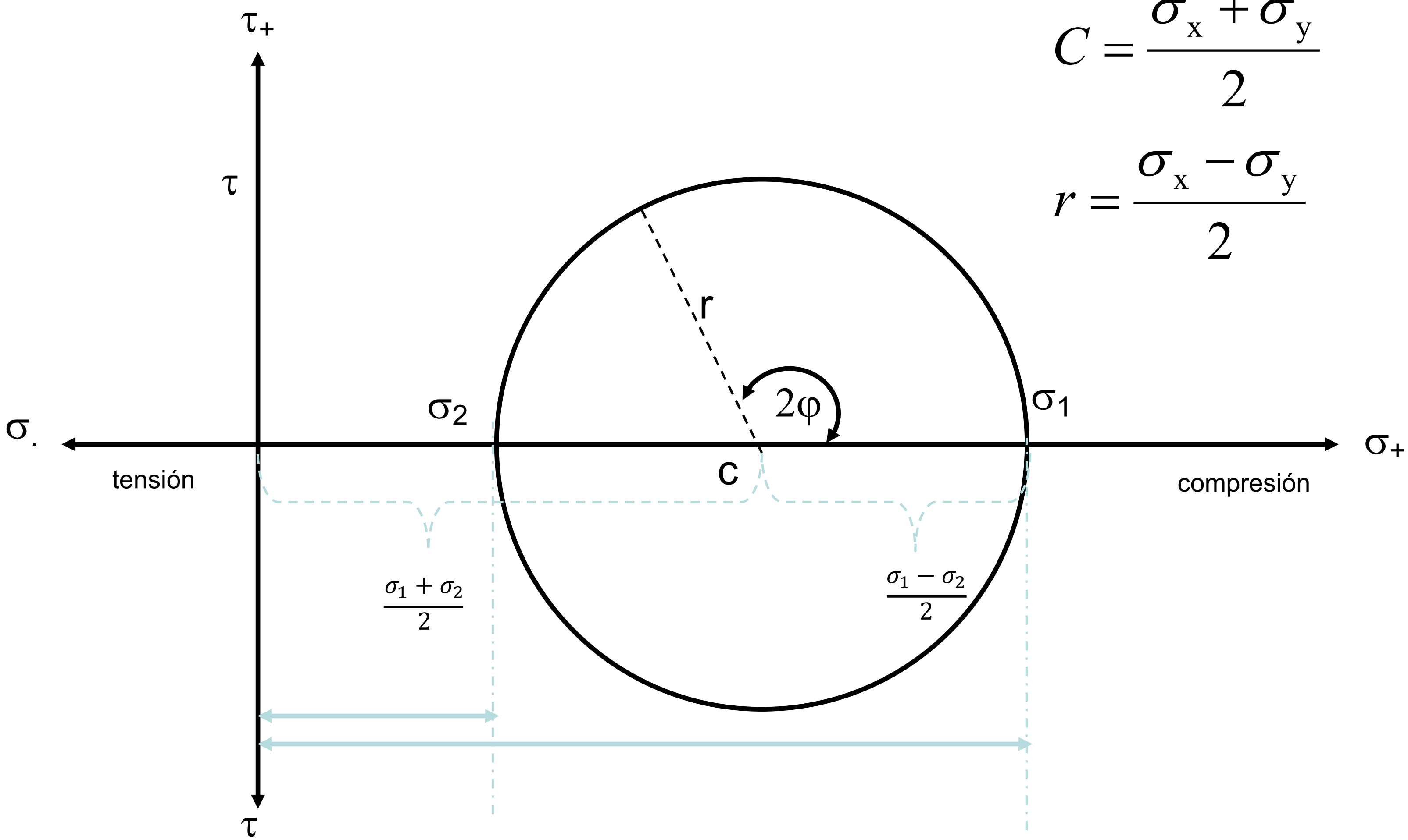
Se pintan los esfuerzos principales σ_1 y σ_2



Determinación del centro, radio y ángulo 2φ

$$C = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

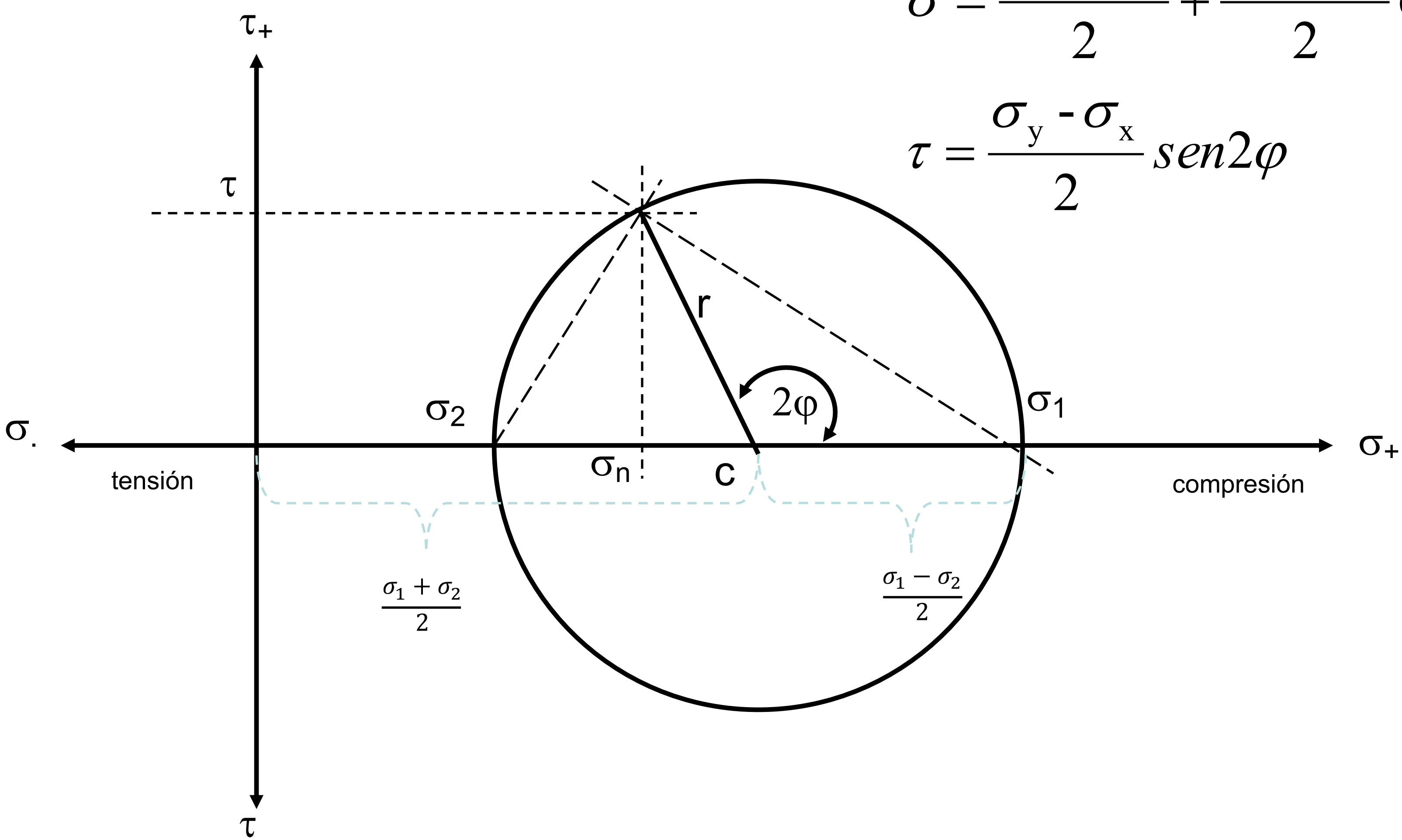
$$r = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$$



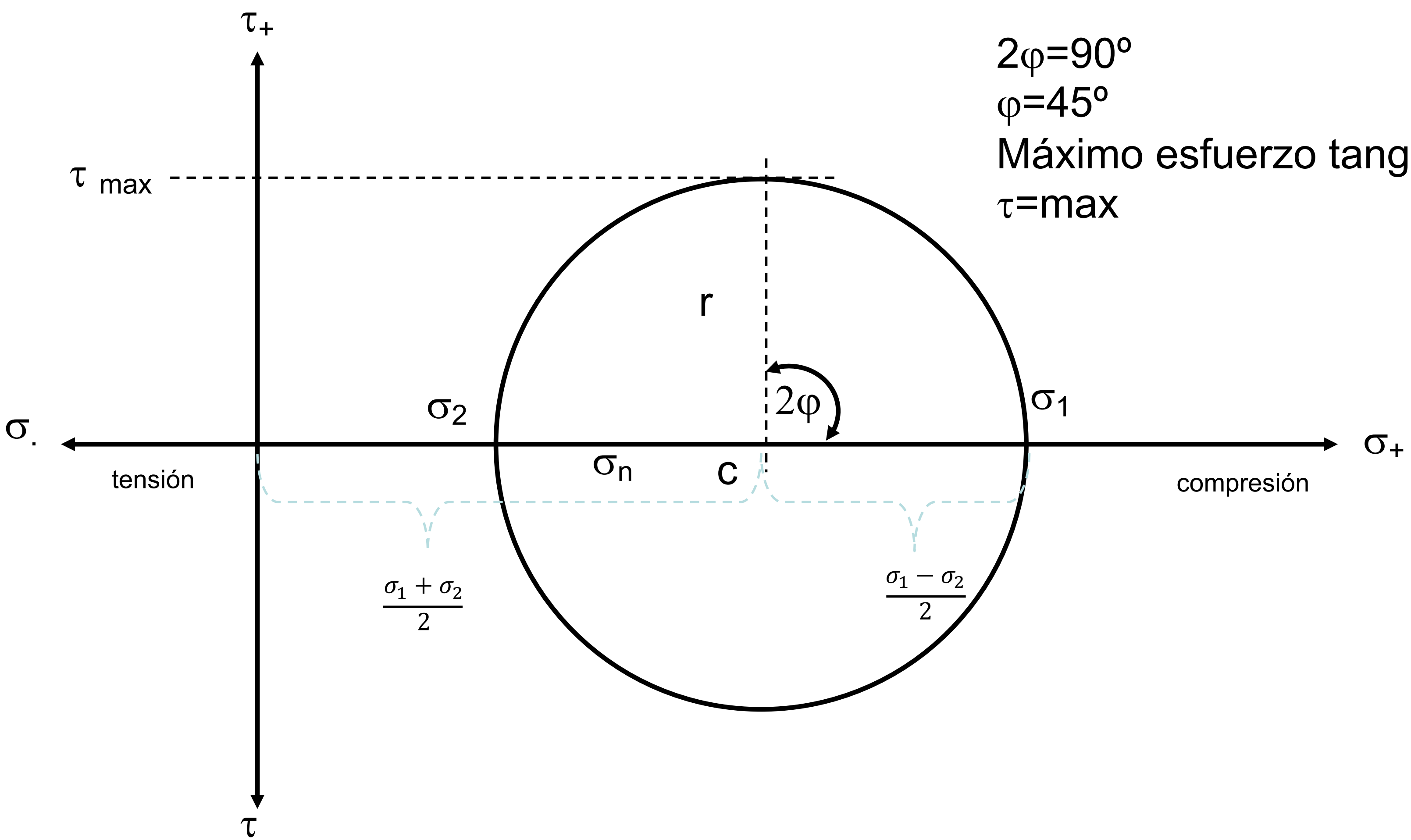
Determinación σ_n, τ

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\varphi$$

$$\tau = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} sen 2\varphi$$

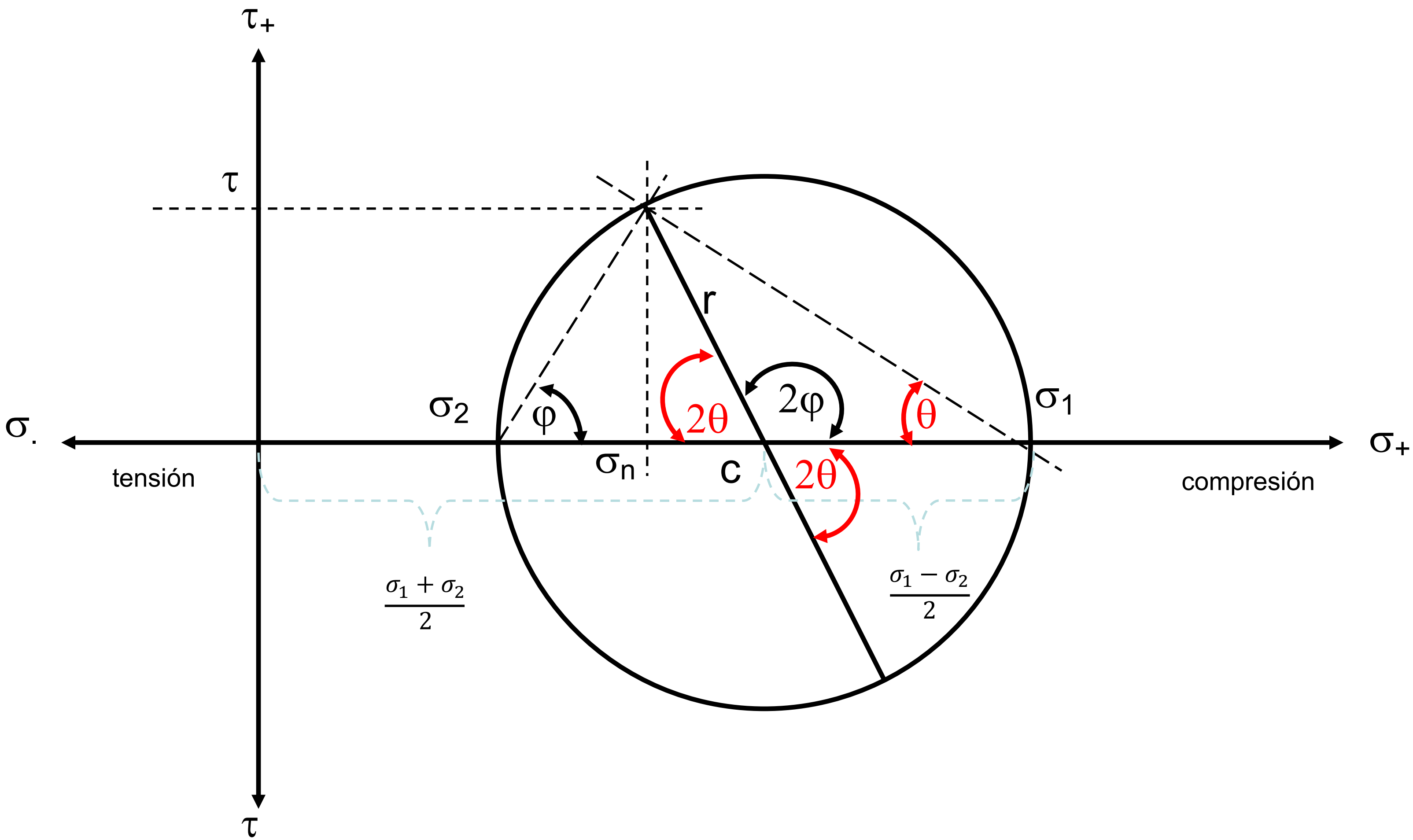


Determinación τ max



2φ=90º
φ=45º
Máximo esfuerzo tangencial
τ=max

Determinación del resto de las posiciones angulares: φ, θ

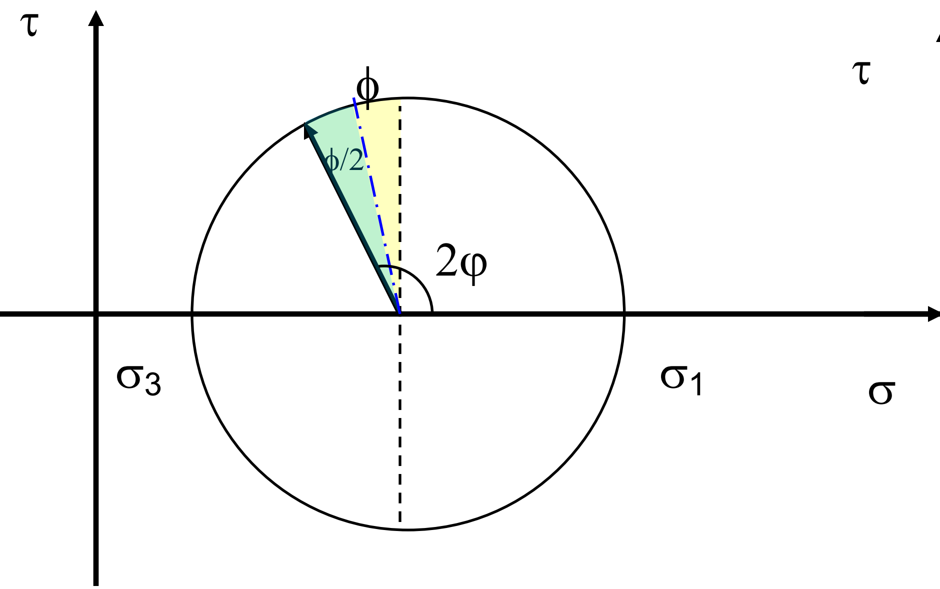


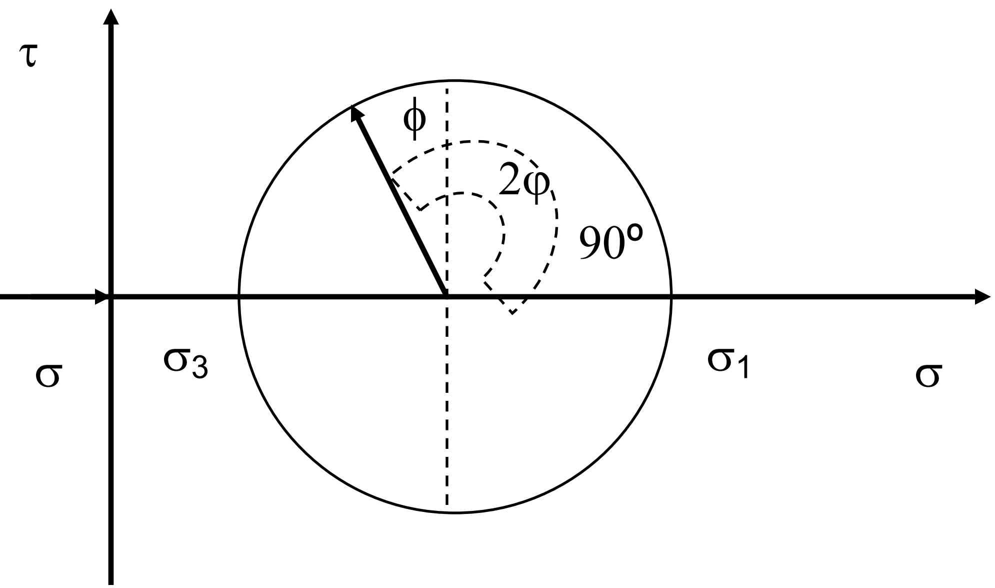
Rotura en un plano

- La rotura de un plano, τ =Max se produce cuando 2φ=90+ϕ

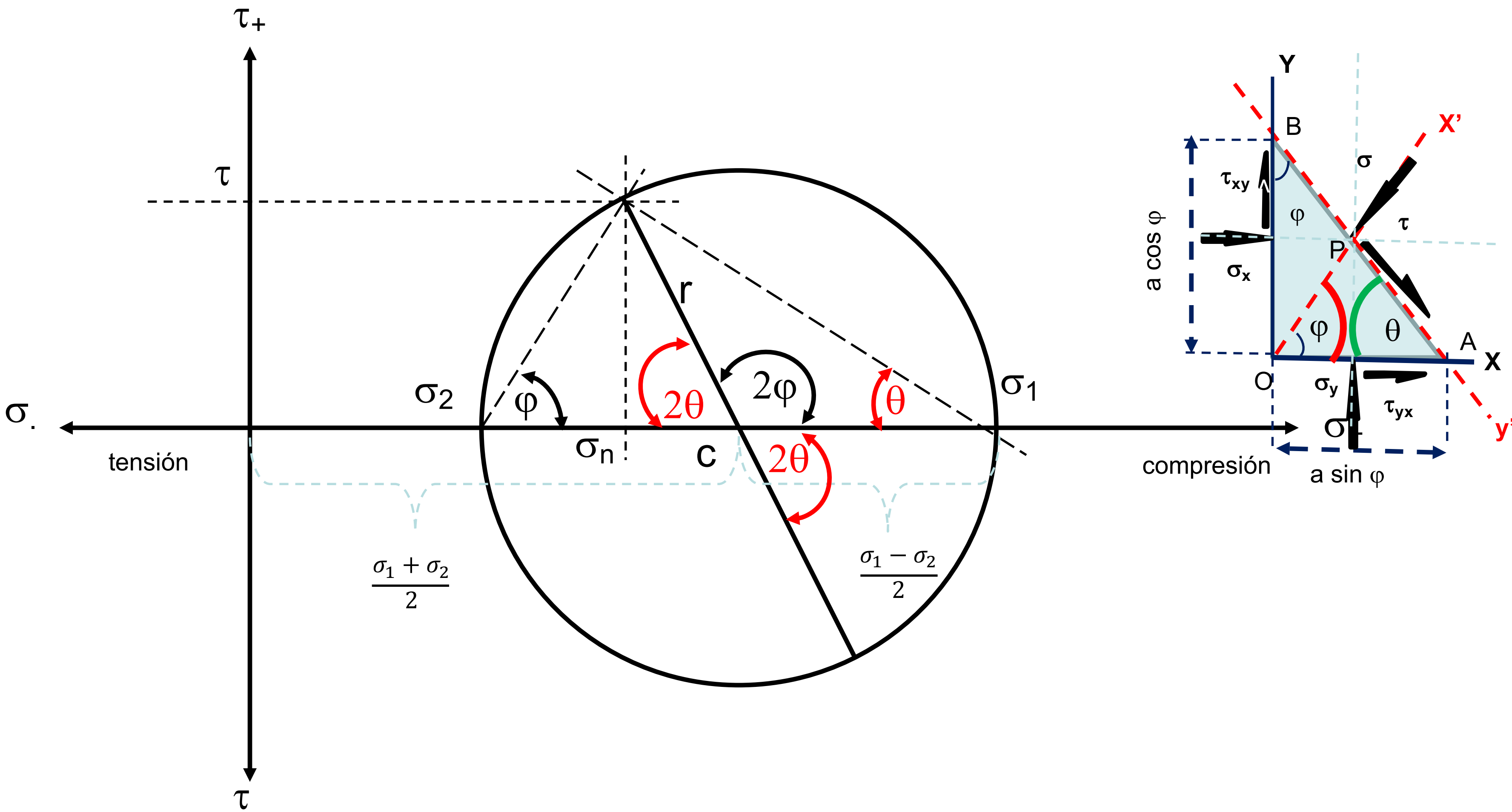
$$2\varphi = 90^{o} + \phi$$

$$\varphi = 45^{o} + \frac{\phi}{2}$$

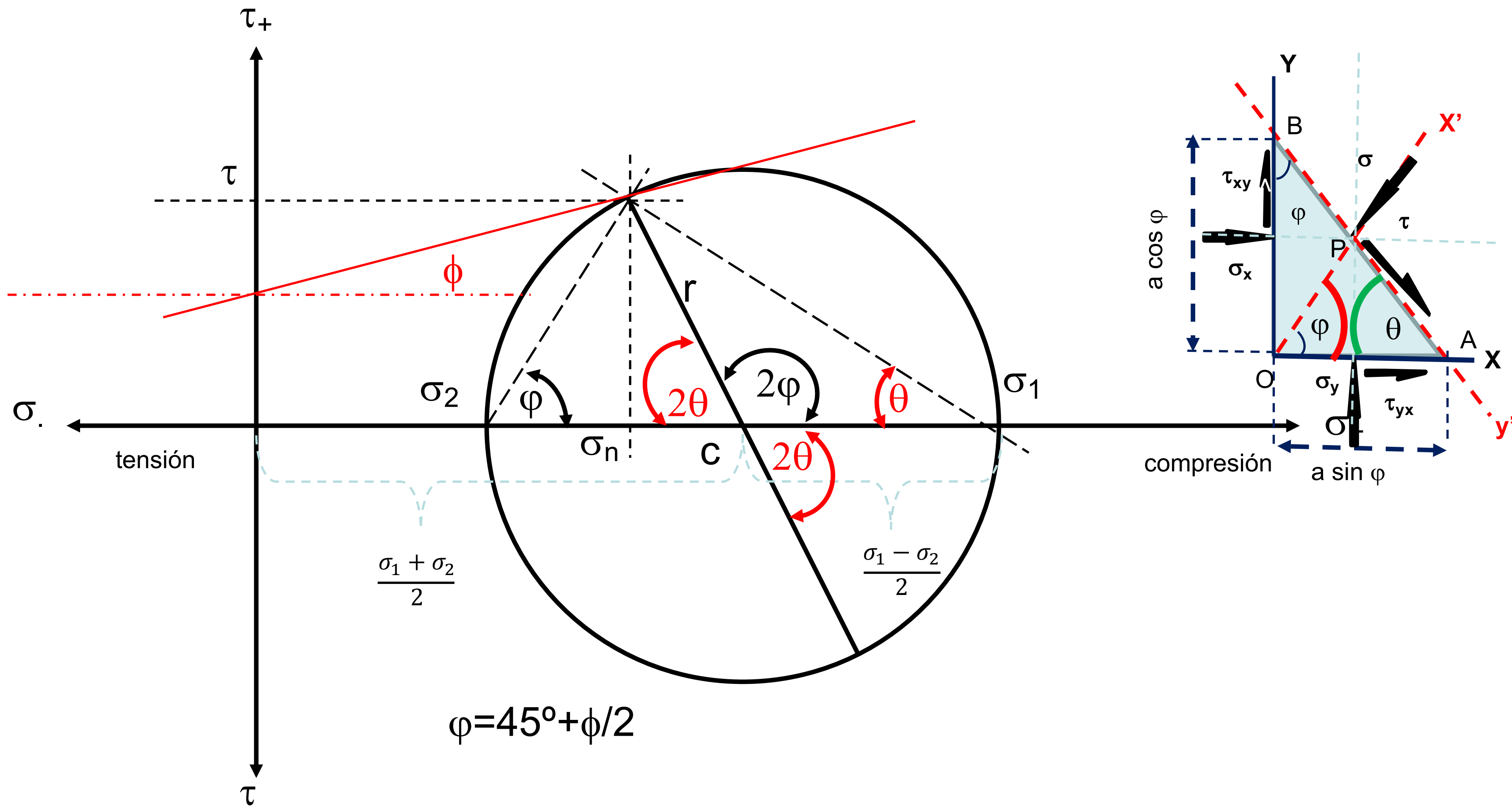




Determinación del resto de las posiciones angulares: φ, θ



Determinación rotura posiciones angulares: φ, θ, ϕ



$\varphi = 45^{o} + \phi/2$

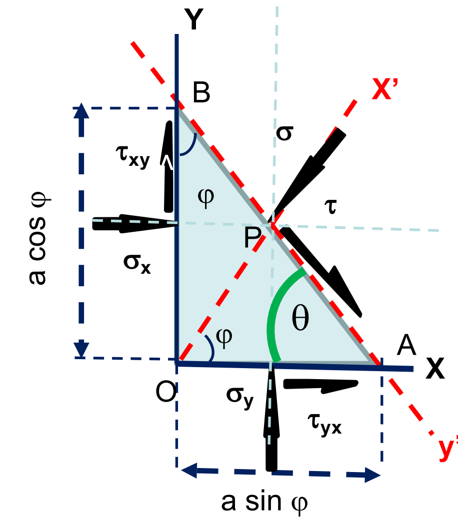
Resistencia

En un punto sobre la superficie de un cilindro que está sometido a presión, en un sistema biaxial donde σ_1 =90 MPa y σ_2=20 MPa, determinar los esfuerzos σ y τ que actúan sobre un plano originado a 30º respecto al esfuerzo mayor.

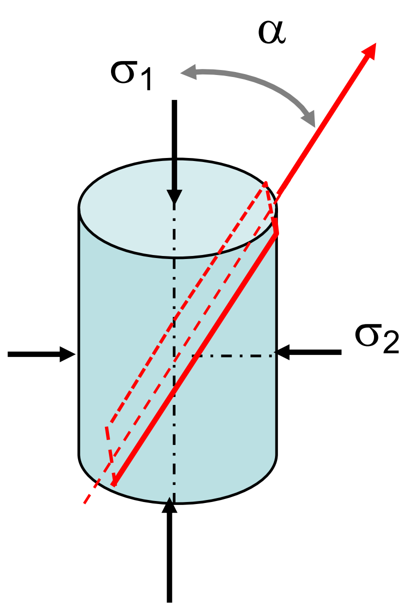
(Modificado de Manual de mecánica del suelo y cimentaciones (Ángel Muelas Rodríguez))

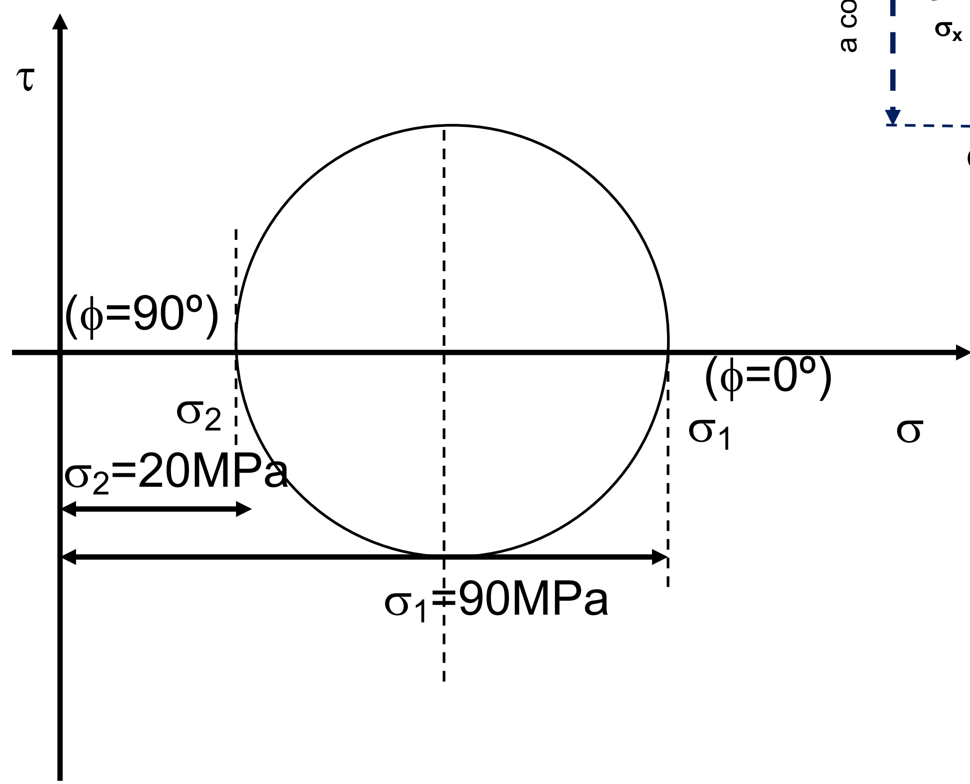
Solución

Realizamos un esquema en el que se representa el cilindro, los esfuerzos principales y colocamos el plan de rotura. En la posición de los esfuerzos principales no existen esfuerzos tangenciales (τ=0).

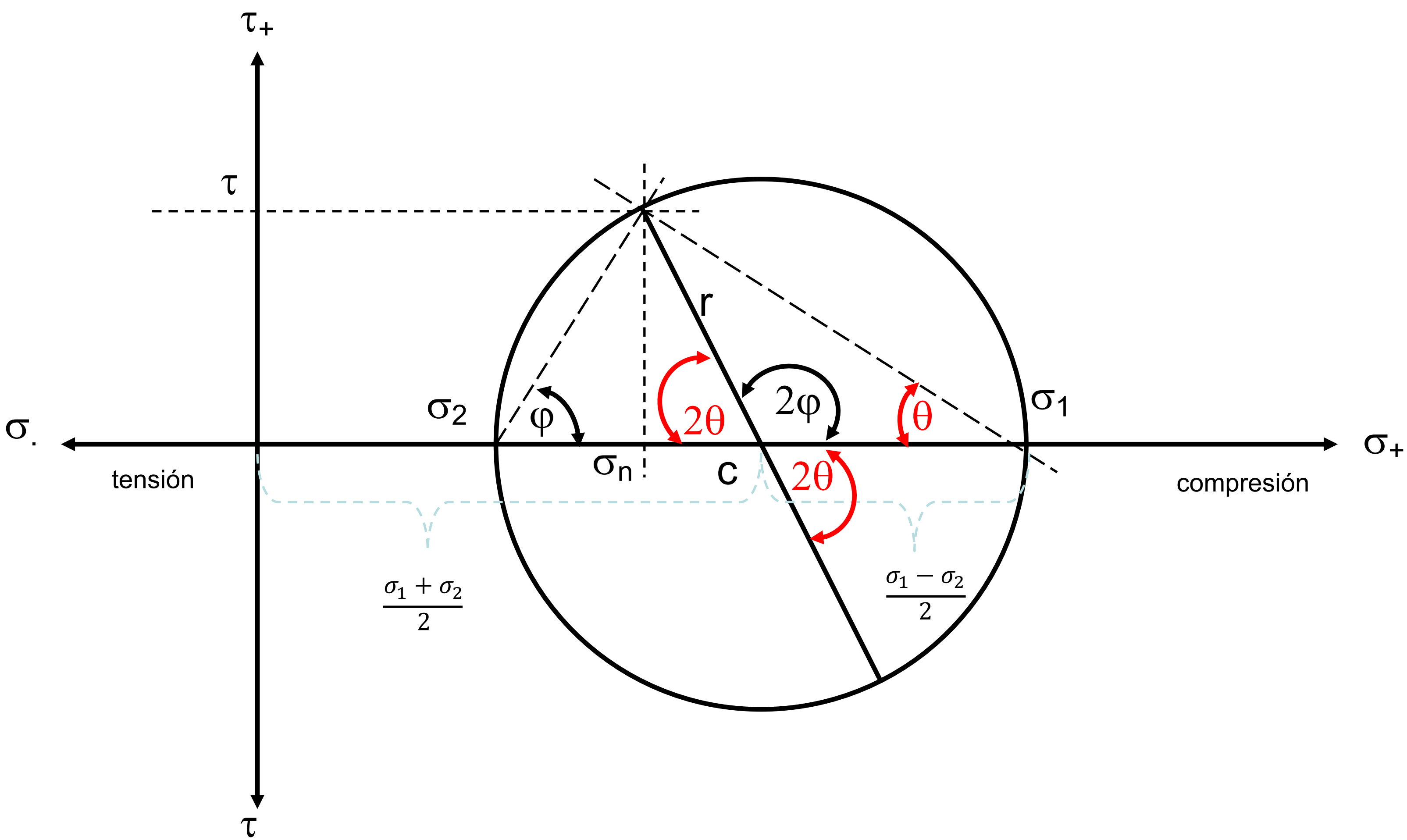


α tiene un ángulo de 30º respecto al esfuerzo mayor, como se observa en el esquema de la derecha corresponde al ángulo θ, en verde. Por tanto, φ vale 60º





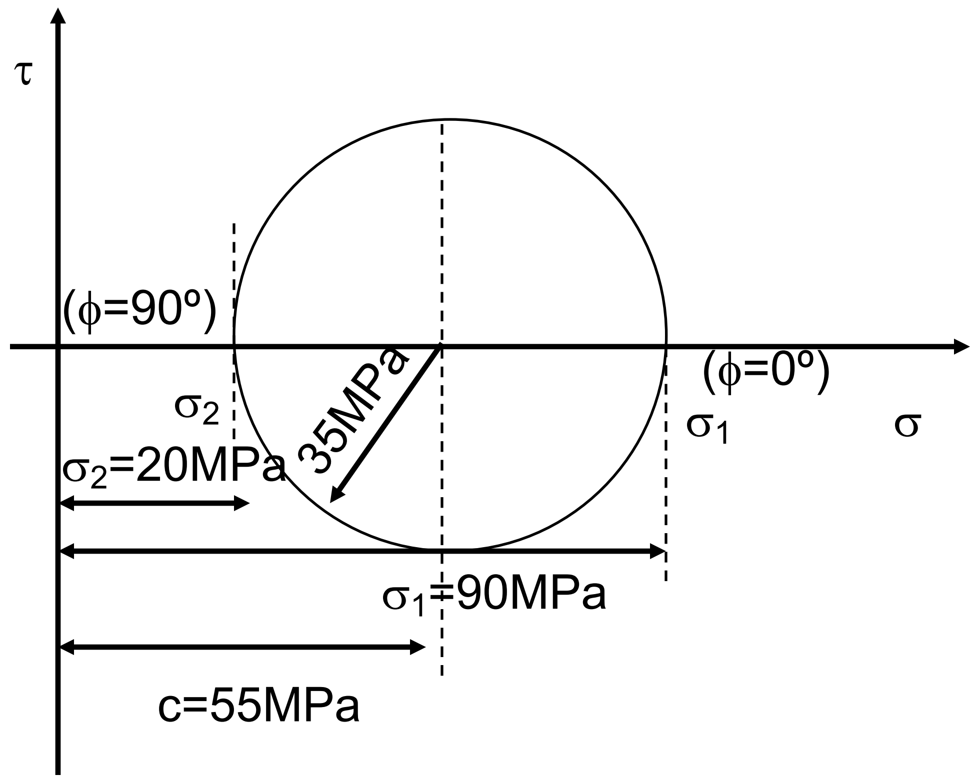
Realizamos un esquema de la representación de Mohr para recordar la posición del ángulo θ y 2θ



Pintamos el cilindro y colocamos los esfuerzos principales. En la posición de los esfuerzos principales no existen esfuerzos tangenciales (τ=0). Calculamos el centro y radio del círculo. A continuación calculamos el esfuerzo medio (centro) y el radio.

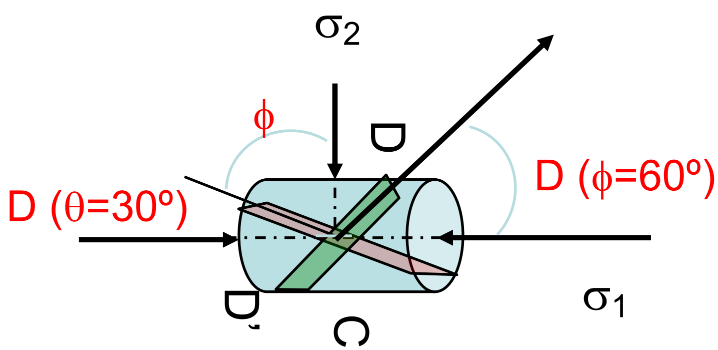
$$C = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{90 + 20}{2} = \frac{110}{2} = 55\ \text{MPa}$$

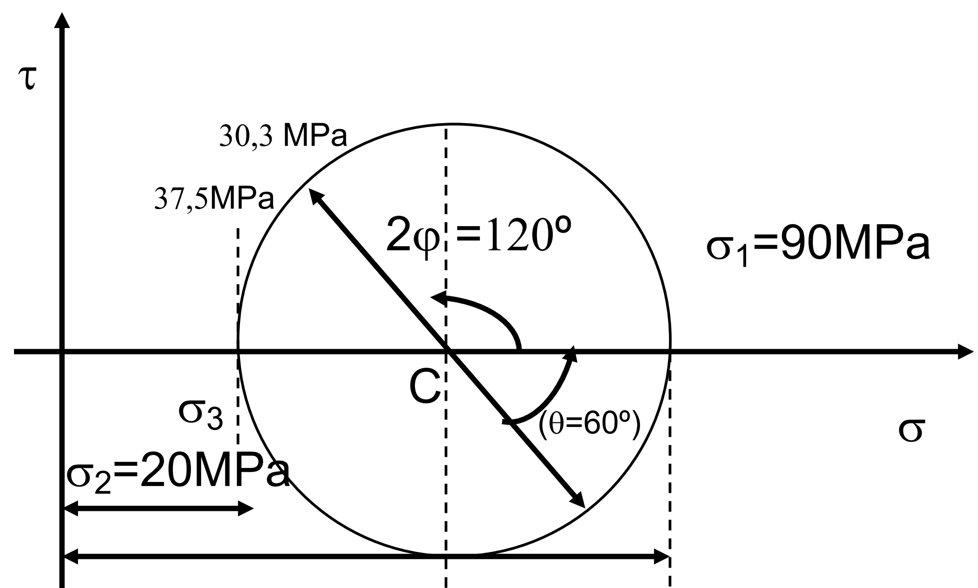
$$r = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{90 - 20}{2} = \frac{70}{2} = 35\ \text{MPa}$$



Continuación de solución P. B1

A continuación, calculamos los esfuerzos normales y tangenciales en los planos 30º respecto a σ1 (ángulo θ) y 60º respecto a σ1 (ángulo φ).





$C = 55\,\text{MPa} \qquad r = 35\,\text{MPa}$

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\varphi \quad = 55 + 35\cos 120^{\text{o}} =$$
$$= 55 - 17{,}5 = 37{,}5\text{MPa}$$

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin 2\varphi = 35\sin 120^{\text{o}} = 30{,}3\,\text{MPa}$$

$C = 55\,\text{MPa} \qquad r = 35\,\text{MPa}$

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\varphi \quad = 55 + 35\cos 300^{\text{o}} =$$
$$= 55 + 17{,}5 = 72{,}5\text{MPa}$$

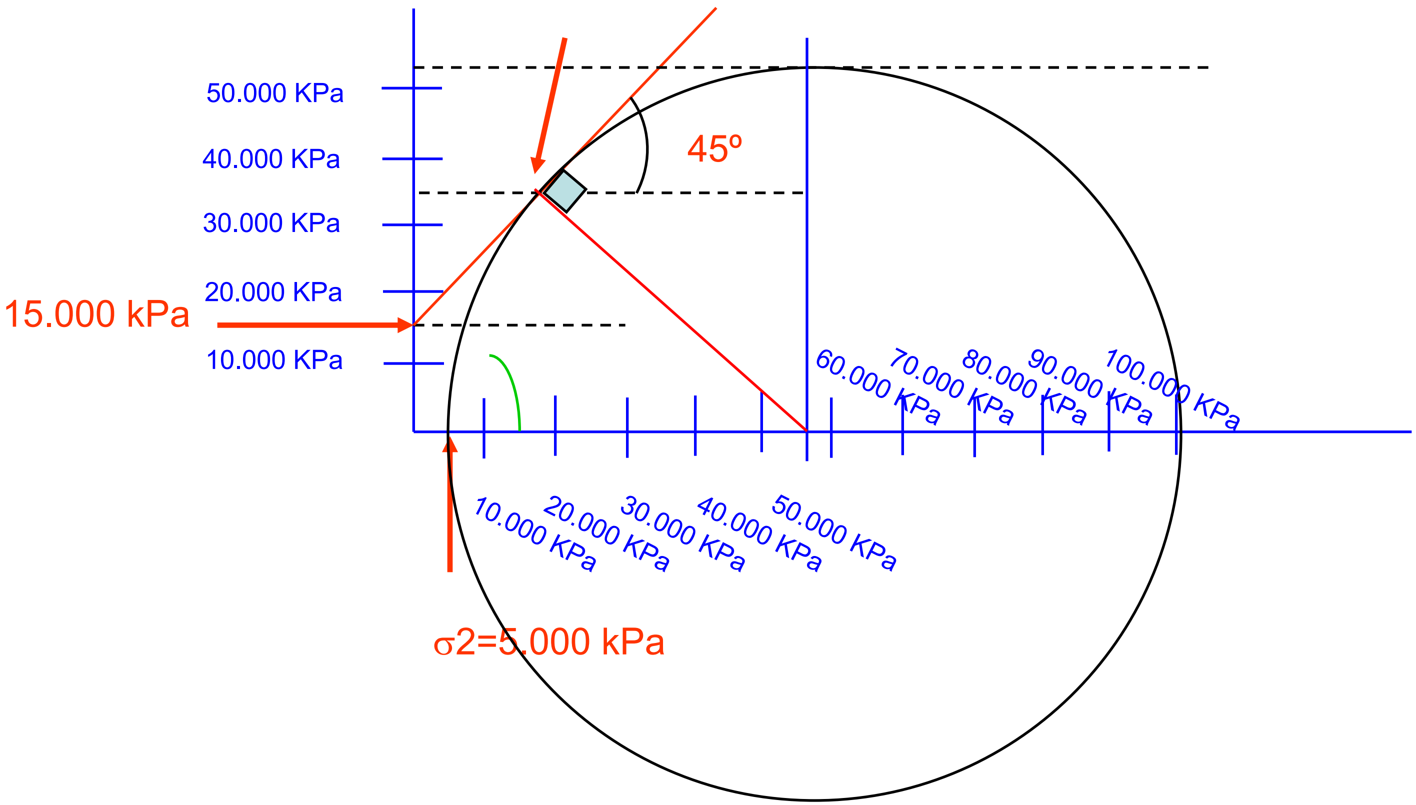
$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin 2\varphi = 35\sin 300^{\text{o}} = -30{,}3\,\text{MPa}$$

Resistencia macizo rocoso

En un macizo rocoso de arenisca, drenado e isótropo, cuya cohesión es de 15 000 kPa y el coeficiente de fricción interna, μ= 1.0. Utilizando el diagrama de Mohr, Predecir la última resistencia de la roca cuando está sometida a una presión de confinamiento de 5.000 KPa, calcular la resistencia al cizallamiento.

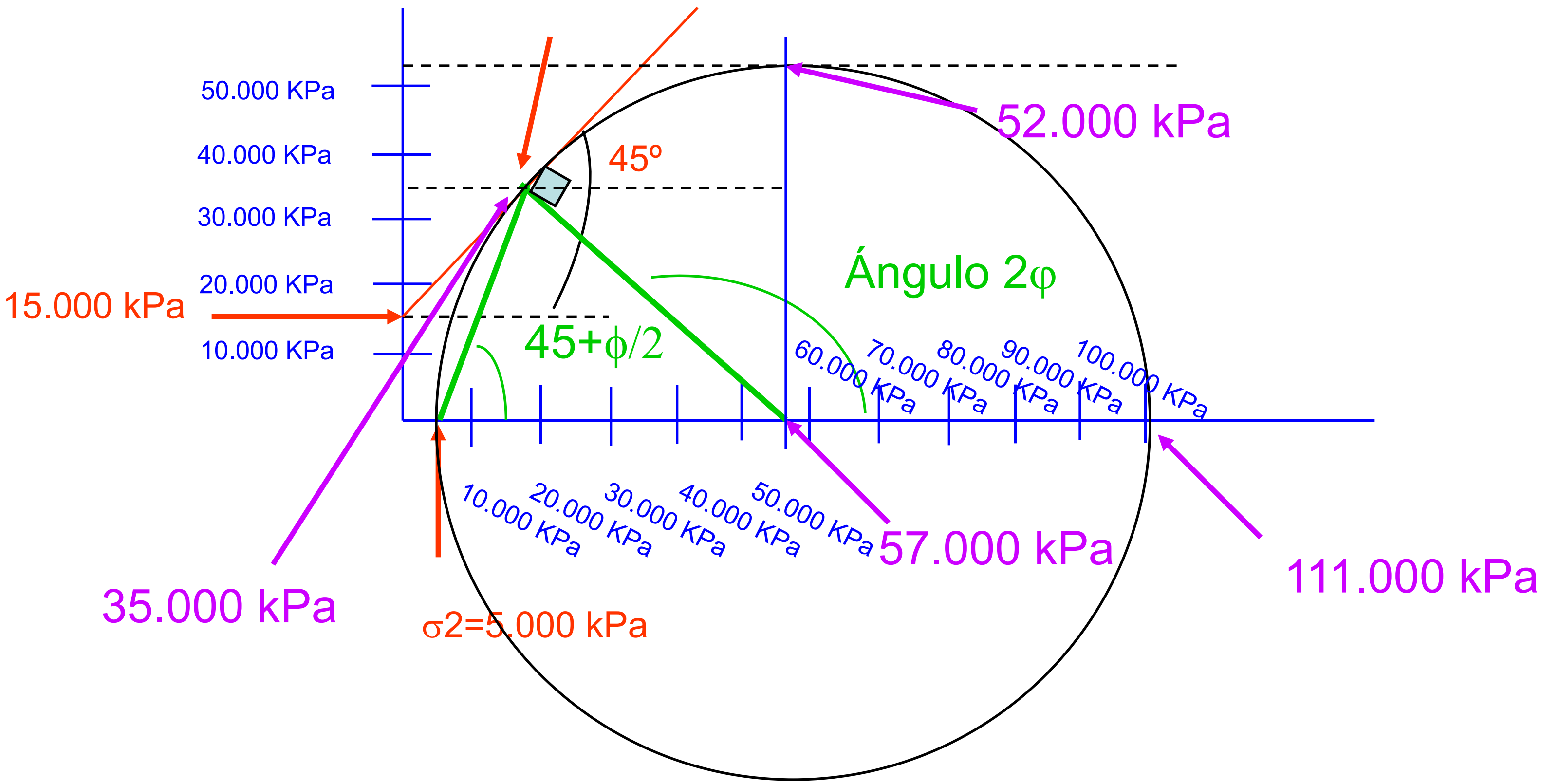
Solución

Comentarios en azul.
1º fijamos unos ejes de la misma escala como sistema de referencia. La cohesión se Se representa en ordenadas



2º situamos sobre los ejes los datos del problema, la cohesión de 15.000 kPa en ordenadas, la presión de confinamiento o σ2 en abscisas; dado que el coeficiente de fricción interna μ=1, es decir ϕ=artang 1, ϕ=45º, la línea construida desde c=15.000kPa (línea de resistencia intrínseca) que tiene una inclinación de 45º será tangente al círculo de Mohr.
Luego una línea perpendicular a ella definirá el centro del círculo.
¿Cómo conocemos la posición de ese punto?

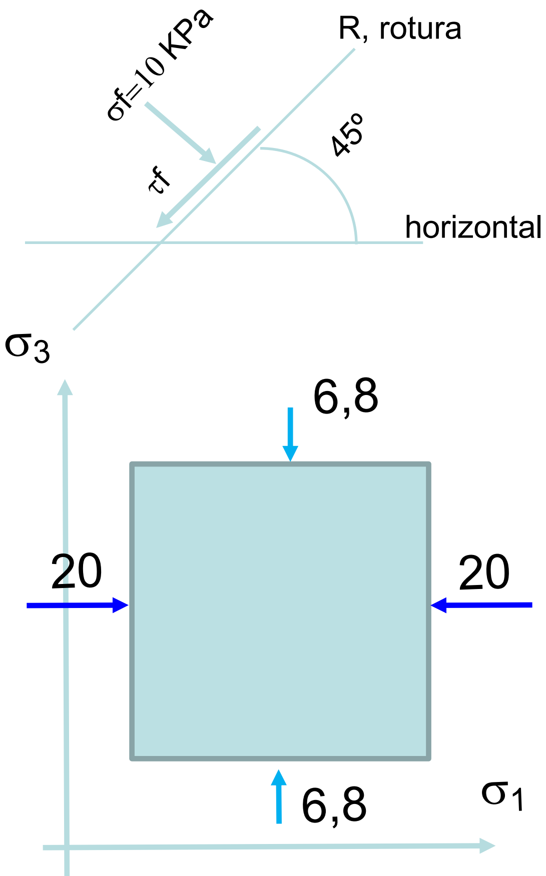
Leamos los ángulos en el círculo de Mohr. Tenemos el ángulo 2ϕ.
Tenemos el ángulo 45+ϕ/2. Donde se juntan los vectores generados por dichos ángulos con la línea de resistencia intrínseca se define el punto de tangencia del círculo. O dicho de otra manera, desde σ2 trazamos un ángulo 45+ϕ/2, es decir 45º+45º/2= 45º+22,5º=67,5º hacia la línea de resistencia interna, Donde intersecte a la línea de resistencia interna, trazamos una perpendicular que corte el eje de abscisas y marcamos el centro del círculo.

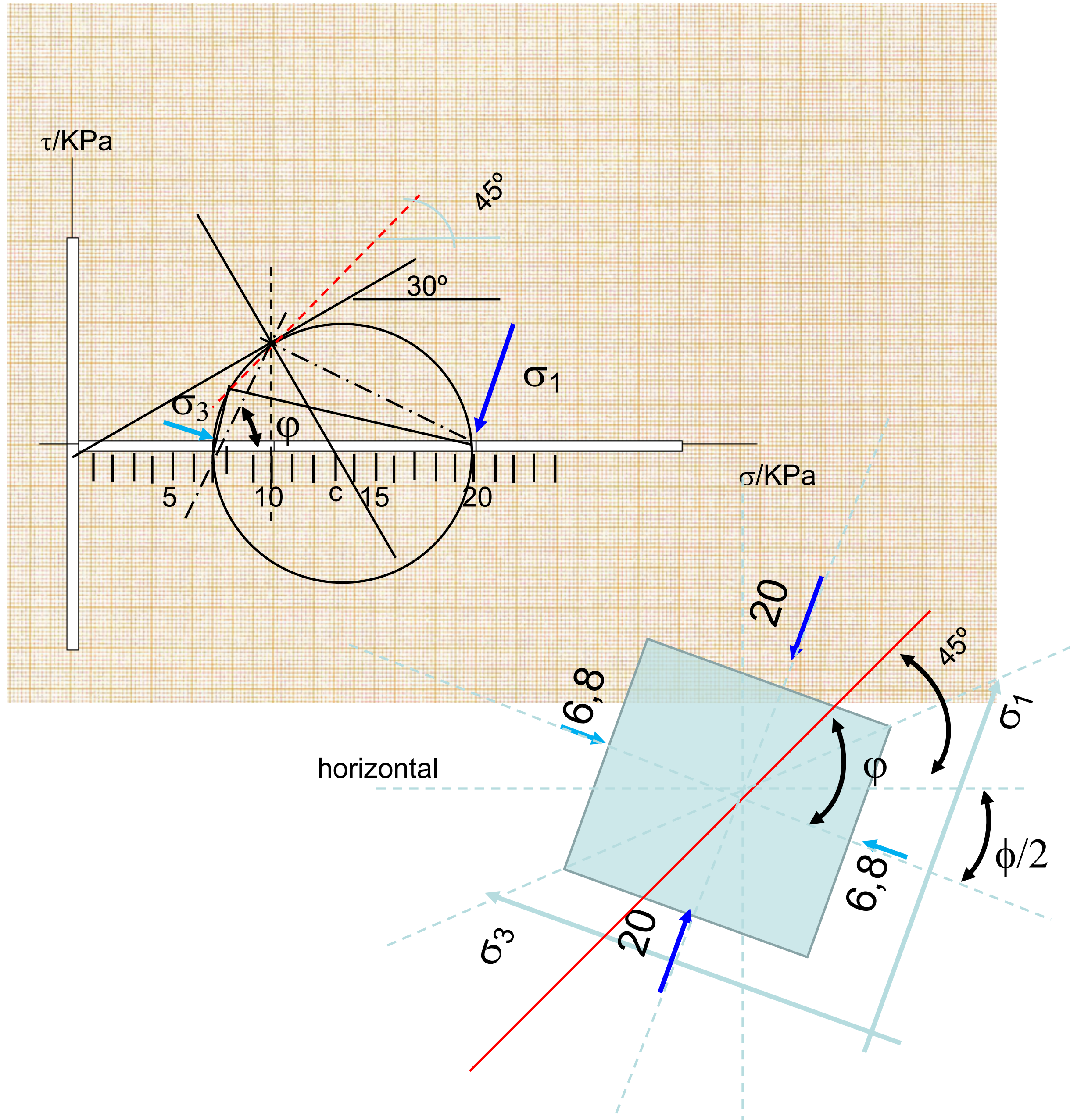


Ahora con un compás, con centro en 57.000kPa y radio en σ2 trazamos σ1= 111.000 kPa; la mayor resistencia al cizallamiento la dará el punto de tangencia entre círculo y línea 35.000 Kpa

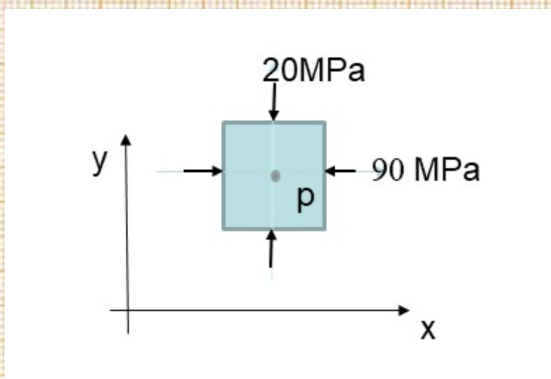
Resistencia ejercicio esquemático

C=0
ϕ=30º
Rotura 45º con la horizontal
σf=10 kPa





En un punto sobre la superficie de un cilindro a presión, el material está sometido a tensiones biaxiales (sigma x=90 MPa; sigma y =20 Mpa). Use el círculo de Mohr para determinar las tensiones que actúan sobre un elemento inclinado un ángulo (ji=30º) respecto a sigma x. Considere solo las tensiones en el plano y muestre los resultados tanto sobre el círculo como sobre un croquis

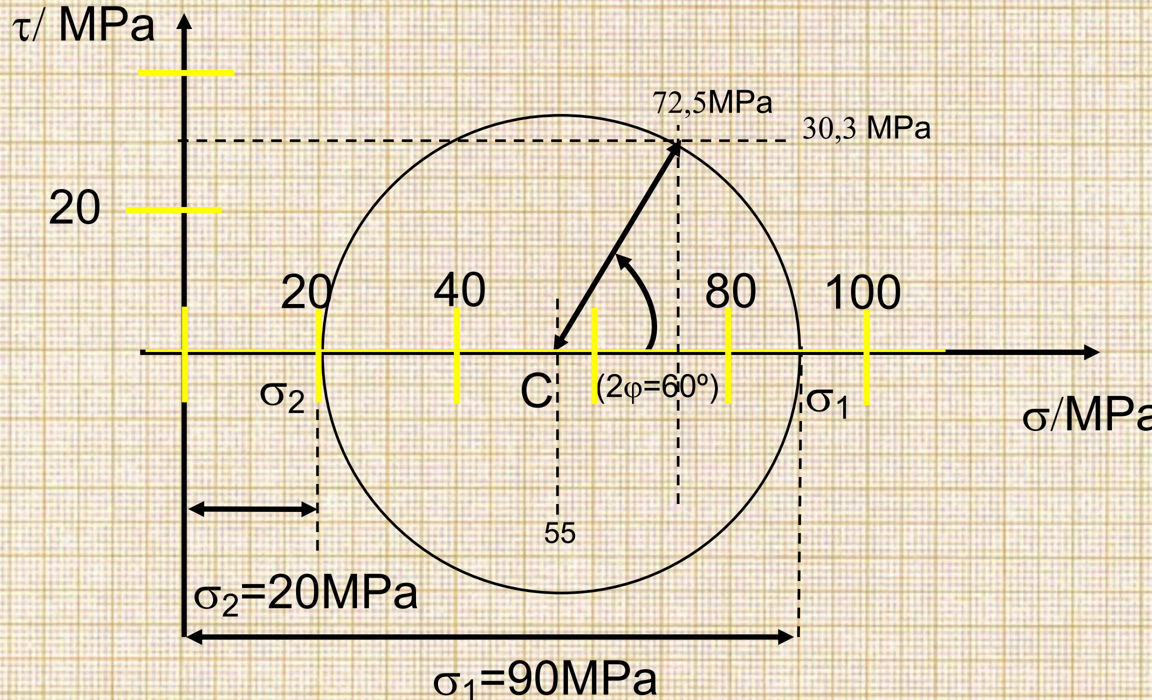


$$C=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}=\frac{90+20}{2}=\frac{110}{2}=55\ \text{MPa}$$

$$r=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}=\frac{90-20}{2}=\frac{70}{2}=35\ \text{MPa}$$

$$\sigma=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}+\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2\varphi \ =55+35\cos 60^{\circ}=$$
$$=55+17{,}5=72{,}5\text{MPa}$$

$$\tau=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\sin 2\varphi=35\sin 60^{\circ}=30{,}3\ \text{MPa}$$

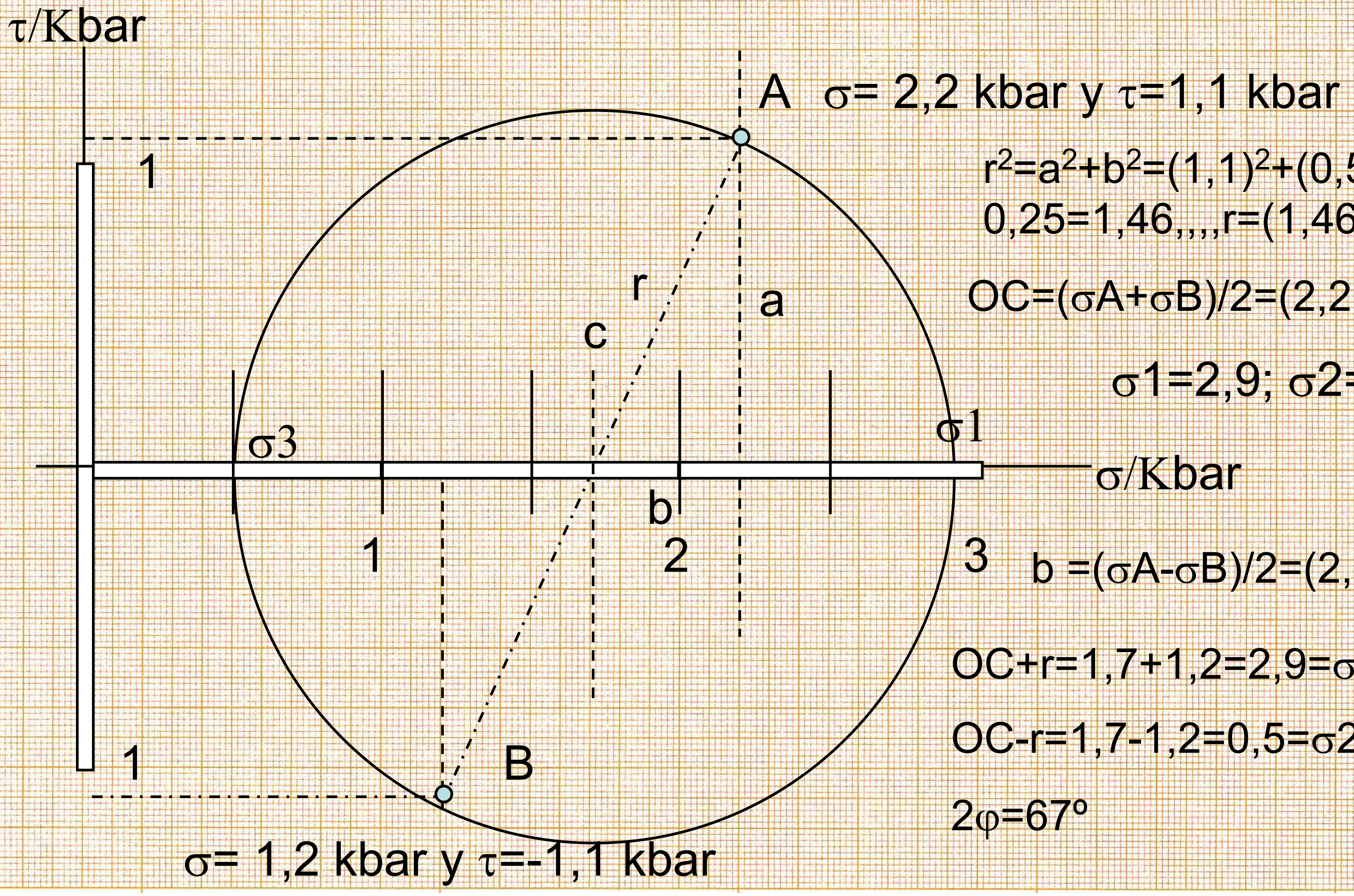


Básico 1

- Utilizar el diagrama de Mohr con el fin de determinar las magnitudes y orientaciones de $\sigma 1$ y $\sigma 3$ a partir de valores conocidos de σ y τ del estado de esfuerzos en dos planos perpendiculares
- Para el primer plano 2,2 kbar y 1,1 kbar
- Para el segundo plano 1,2 kbar y -1,1 kbar

Solución Básico 1

Si los planos son perpendiculares deben estar enfrentados y su media distancia deberá coincidir con el centro del círculo



$r^2=a^2+b^2=(1,1)^2+(0,5)^2=1,21+0,25=1,46,,,,r=(1,46)^{0,5}=1,2$

$OC=(\sigma A+\sigma B)/2=(2,2+1,2)/2=1,7$

$\sigma 1=2,9;\ \sigma 2=0,5$

$b=(\sigma A-\sigma B)/2=(2,2-1,2)/2=0,5$

$OC+r=1,7+1,2=2,9=\sigma 1$

$OC-r=1,7-1,2=0,5=\sigma 2$

$2\varphi=67^o$

Básico 2

A través de un plano, el estado de esfuerzo es medido como:

- Esfuerzo normal 2,2 kbar;
- Esfuerzo de cizalla -0,6kbar

Sobre un plano de 90º del anterior, el estado del esfuerzo es medido como:

- Esfuerzo normal 0,6 kbar;
- Esfuerzo de cizalla 0,6kbar.

Suponiendo que el esfuerzo principal $\sigma 3$ es paralelo a la intersección de los planos:

Determinar los valores de $\sigma 1$ y $\sigma 2$ y calcular en ángulo entre $\sigma 1$ y la normal al primer plano.

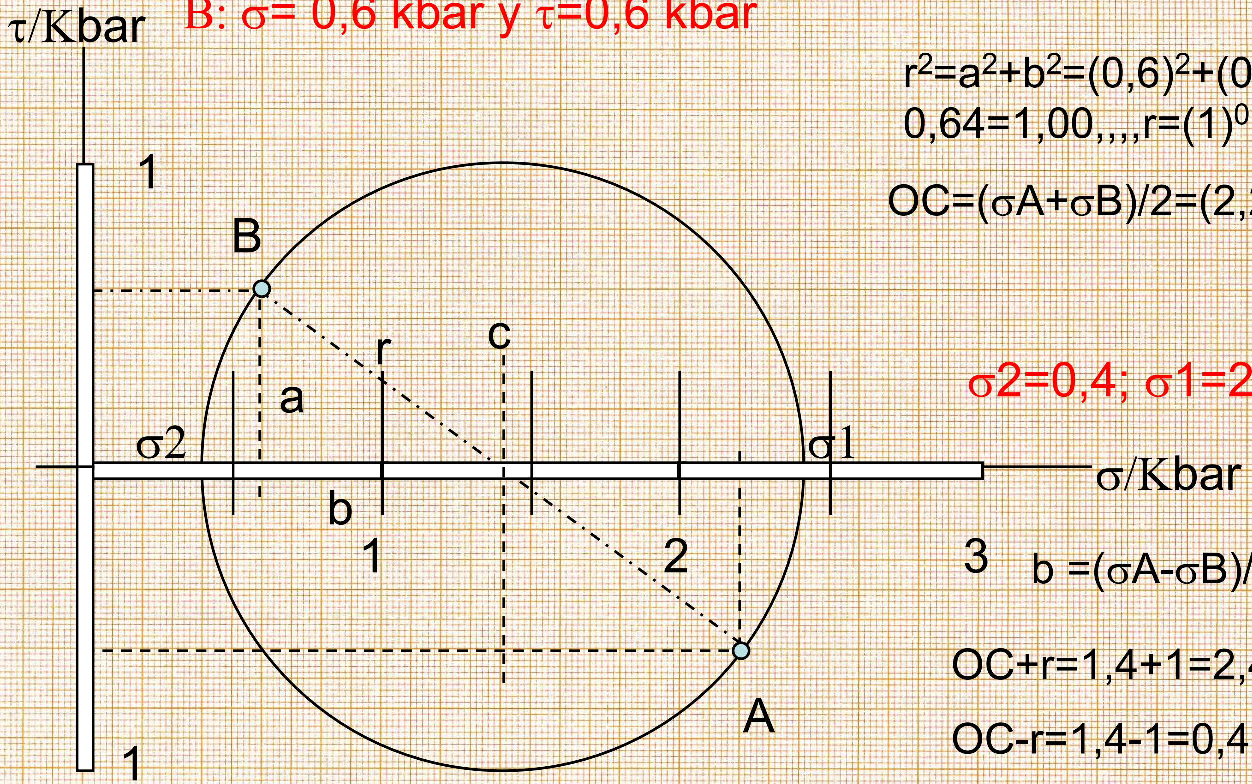
Solución Básico 2

Si los planos son perpendiculares deben estar enfrentados y su media distancia deberá coincidir con el centro del círculo

B: σ= 0,6 kbar y τ=0,6 kbar

$r^2=a^2+b^2=(0,6)^2+(0,8)^2=0,36+0,64=1,00,,,,r=(1)^{0,5}=1$

$OC=(\sigma A+\sigma B)/2=(2,2+0,6)/2=1,4$



$\sigma 2=0,4;\ \sigma 1=2,4$

$b=(\sigma A-\sigma B)/2=(2,2-0,6)/2=0,8$

$OC+r=1,4+1=2,4=\sigma 1$

$OC-r=1,4-1=0,4=\sigma 2$

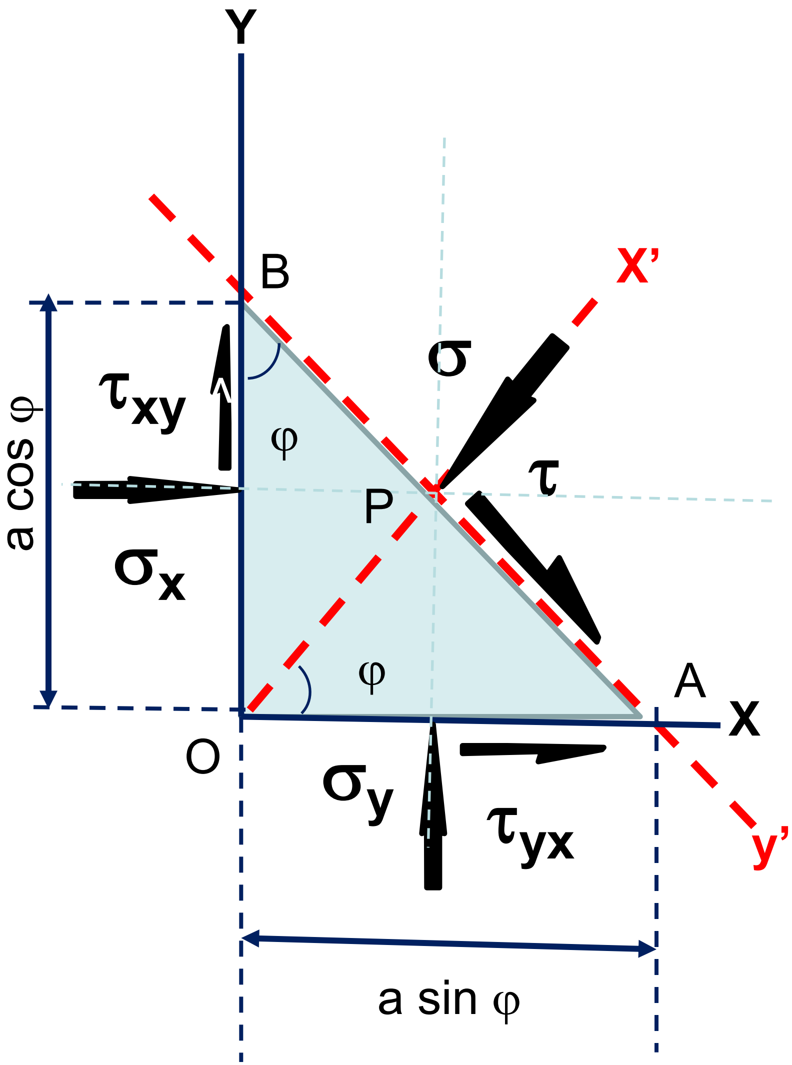
$2\varphi=143^o$

A: σ= 2,2 kbar y τ=-0,6 kbar

Básico 3

- Los esfuerzos máximos y mínimo medidos de un macizo rocoso homogéneo son: 1,5 kbars y 0,8 kbars, respectivamente. Calcular el esfuerzo normal y el esfuerzo máximo de cizalla sobre los siguientes planos paralelos al eje intermedio de esfuerzos y cuyas perpendiculares están inclinadas respecto a σ_1 25º, 45º, 60º, 65º, 80º

j (Grados)	2j (Grados)	2j (Radianes)	s1	s2	s1+s2/2	s1-s2/2	cos 2j	sin 2j	(s1-s2/2)cos2j	(s1-s2/2)sin2j	sn	t
25	50	0,872665	1,5	0,8	1,15	0,35	0,64278732	0,76604468	0,22497556	0,26811564	1,37497556	0,26811564
45	90	1,570797	1,5	0,8	1,15	0,35	-6,7321E-07	1	-2,3562E-07	0,35	1,14999976	0,35
60	120	2,094396	1,5	0,8	1,15	0,35	-0,50000078	0,86602495	-0,17500027	0,30310873	0,97499973	0,30310873
65	130	2,268929	1,5	0,8	1,15	0,35	-0,64278835	0,76604382	-0,22497592	0,26811534	0,92502408	0,26811534
80	160	2,792528	1,5	0,8	1,15	0,35	-0,93969303	0,34201902	-0,32889256	0,11970666	0,82110744	0,11970666



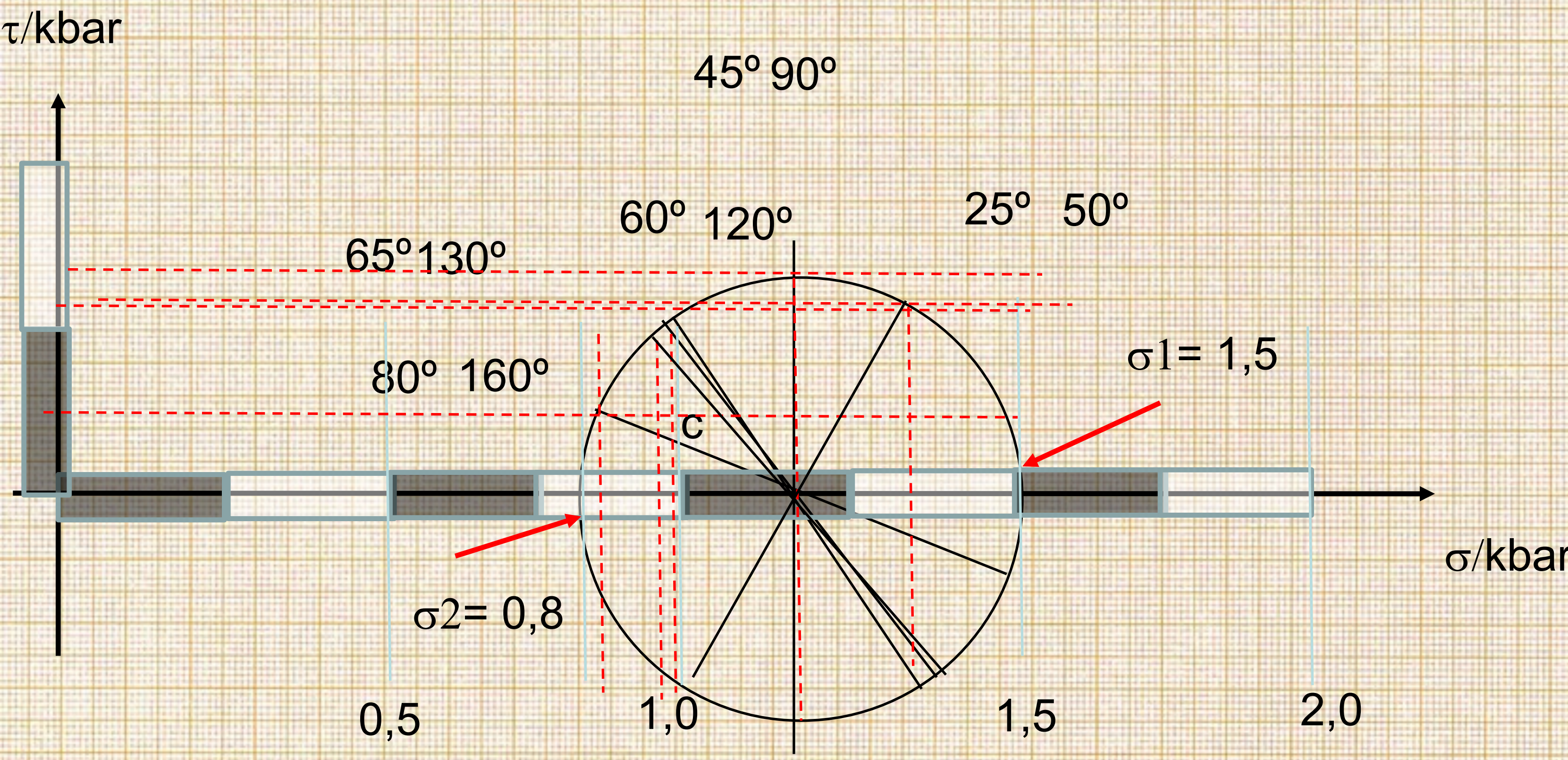
$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\varphi + \tau_{xy} sen 2\varphi$$

$$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} sen 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi$$

$$C = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad r = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

$$1º = \frac{\pi}{180} = 0{,}0174533$$

j (Grados)	2j (Grados)	2j (Radianes)	s1	s2	s1+s2/2	s1-s2/2	cos 2j	sin 2j	(s1-s2/2)cos2j	(s1-s2/2)sin2j	sn	t
25	50	0,872665	1,5	0,8	1,15	0,35	0,64278732	0,76604468	0,22497556	0,26811564	**1,37497556**	**0,26811564**
45	90	1,570797	1,5	0,8	1,15	0,35	-6,7321E-07	1	-2,3562E-07	0,35	**1,14999976**	**0,35**
60	120	2,094396	1,5	0,8	1,15	0,35	-0,50000078	0,86602495	-0,17500027	0,30310873	**0,97499973**	**0,30310873**
65	130	2,268929	1,5	0,8	1,15	0,35	-0,64278835	0,76604382	-0,22497592	0,26811534	**0,92502408**	**0,26811534**
80	160	2,792528	1,5	0,8	1,15	0,35	-0,93969303	0,34201902	-0,32889256	0,11970666	**0,82110744**	**0,11970666**



Solución Básico 3