Tema 2 Espacios Vectoriales

Consideramos el sistema lineal homogéneo estudiado en el Tema 1:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = & 0 \\ x_1 + x_2 & = & 0 \\ 2x_1 + 2x_2 & = & 0 \end{array} \right\}$$

Una solución s_1 del sistema es $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = -1, x_5 = 0$, escribimos esta solución como $(1, -1, 1, -1, 0)$. Otra solución s_2 es $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = -1, x_4 = 0, x_5 = 1$, es decir, $(0, 0, -1, 0, 1)$. Es muy fácil comprobar que la **combinación lineal** $3s_1 - 5s_2$ es de nuevo solución del sistema:

$$3(1, -1, 1, -1, 0) - 5(0, 0, -1, 0, 1) = (3, -3, 8, -3, -5)$$

En varias ramas de las matemáticas aparecen elementos donde se realizan *combinaciones lineales*. Estas operaciones particularmente simples se generalizan a los elementos (vectores) de un espacio vectorial, dando lugar a una estructura algebraica que por su sencillez y amplitud se utiliza con diversos tipos de objetos y en diversos tipos de aplicaciones.

2.1. Primeras definiciones y ejemplos

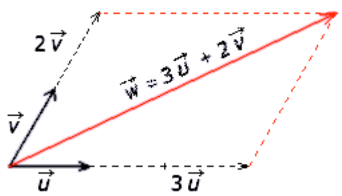
Definición 2.1 *Sea* $\mathbb{K}$ *un cuerpo y* V *un conjunto no vacío. Se dice que* V *es un* $\mathbb{K}$*–espacio vectorial si existen dos operaciones, que llamaremos* suma $(+)$ *y* producto por escalares $(\cdot)$, *respectivamente*

$$+ : V \times V \to V \qquad \cdot : \mathbb{K} \times V \to V$$

verificando las siguientes propiedades (siendo u, v, w *elementos cualesquiera de* V *y* a, b *elementos cualesquiera de* $\mathbb{K}$*;* 1 *denota el elemento neutro del producto en* $\mathbb{K}$*):*

- $(u + v) + w = u + (v + w)$; $u + v = v + u$;
- *Existe un elemento* $\mathbf{0}$ *en* V *tal que* $u + \mathbf{0} = u$ *(* $\mathbf{0}$ *es el elemento neutro de la suma)*
- *Para cada* u *en* V *existe* w *en* V *tal que* $u + w = \mathbf{0}$*;* u *y* w *se dicen opuestos entre sí.*
- $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$; $(a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$;
- $a \cdot (b \cdot u) = (ab) \cdot u$; $1 \cdot u = u$.

Los elementos de V se denominan **vectores** y los elementos de $\mathbb{K}$ **escalares**.



Operaciones con vectores

Proposición 2.1
Si V es un $\mathbb{K}$–espacio vectorial entonces se verifican las siguientes propiedades (siendo v un elemento cualquiera de V y a un elemento cualquiera de $\mathbb{K}$):

- $0 \cdot v = \mathbf{0}$; $a \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$; $(-a) \cdot v = a \cdot (-v) = -(a \cdot v)$;
- *Si* $a \cdot v = \mathbf{0}$ *entonces* $a = 0$ *ó* $v = \mathbf{0}$.

Ejemplos de Espacios Vectoriales

- El conjunto $\mathbb{K}^n$ (las n-uplas con coordenadas en $\mathbb{K}$) con las operaciones:

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

$$a \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (ax_1, \ldots, ax_n)$$

  es un $\mathbb{K}$–espacio vectorial.

- El conjunto $M_{n\times m}(\mathbb{K})$ de las matrices con n filas y m columnas y elementos en $\mathbb{K}$ es un $\mathbb{K}$–espacio vectorial.

- El conjunto $\mathbb{K}[X]$ de los polinomios en la variable X y coeficientes en $\mathbb{K}$ es un $\mathbb{K}$–espacio vectorial. También es un $\mathbb{K}$–espacio vectorial el conjunto $\mathbb{K}_n[x]$ cuyos elementos son los polinomios en $\mathbb{K}[x]$ cuyo grado es menor o igual que n.

Código Sage 2.1: Objeto tipo vector en Sage

```
# Variables de entrada
v = vector(QQ, 4, [1, 1/2, 1/3, 1/4]);
print(v);
print("Grado", v.degree()) ;
print(v.parent());
# Pertenece al Vector space of dimension 4 over Rational Field
print(v+v);
v[2]; #Tercer elemento del vector
```

Evaluar en SageMathCell

Nota: Los vectores en Sage se construyen y manipulan de forma similar a las matrices pero el número de elementos está referido como "degree" en lugar de filas y columnas . Al visualizarse por pantalla se delimitan por paréntesis para distinguirse de matrices de una sola fila. Al igual que en las matrices, los índices de los elementos comienzan en cero.

2.2. Subespacios vectoriales

Definición 2.2 *Se dice que un subconjunto no vacío U de un $\mathbb{K}$–espacio vectorial V es un subespacio vectorial si U con las operaciones de V es también un $\mathbb{K}$–espacio vectorial.*

Caracterización de subespacios vectoriales

Los subespacios vectoriales admiten las siguientes caracterizaciones:

Proposición 2.2 *Un subconjunto U de un $\mathbb{K}$–espacio vectorial V es un subespacio vectorial de V si verifica:*

a) $\mathbf{0} \in U$

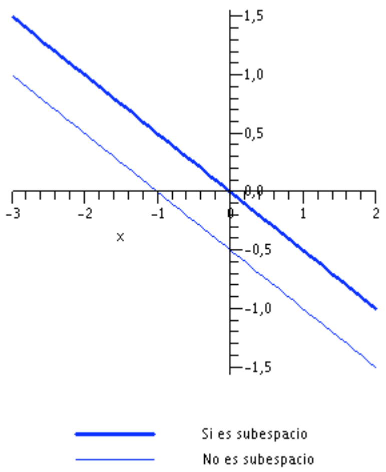
b) Si u_1 y $u_2 \in U \Rightarrow u_1 + u_2 \in U$

c) Si $a \in \mathbb{K}$ y $u \in U \Rightarrow a \cdot u \in U$

Proposición 2.3 *Un subconjunto no vacío U de un $\mathbb{K}$–espacio vectorial V es un subespacio vectorial si y sólo si para todo a_1 y a_2 en $\mathbb{K}$ y para todo u_1 y u_2 en U se tiene:*

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 \in U$$

Ejemplo 2.1 *El conjunto de los vectores (x, y) en $\mathbb{R}^2$ verificando $x+2y = 0$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ como $\mathbb{R}$–espacio vectorial. No es subespacio vectorial el conjunto de los vectores (x, y) verificando $x + 2y = 1$.*



No todas los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ son subespacios

Ejemplos de subespacios vectoriales

- El conjunto $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Sin embargo el conjunto $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 1\}$ no es subespacio vectorial.
- El conjunto de las matrices diagonales es un subespacio vectorial de $M_{5\times5}(\mathbb{R})$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.
- El conjunto $U = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \,/ a_{11} - a_{22} = 0; a_{12} + a_{22} = 0\}$ es subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$.

- El conjunto de los polinomios en $\mathbb{K}[X]$ de grado menor o igual que 3 es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}[x]$ como $\mathbb{K}$-espacio vectorial.
- El polinomio cero unión el conjunto de los polinomios en $\mathbb{K}[X]$ de grado igual a 3 no es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}[X]$ como $\mathbb{K}$-espacio vectorial.
- Denotemos por $P_3(x)$ el conjunto de polinomios , en la variable x, de grado menor o igual que tres. El subconjunto $U = \{p(x) \in P_3(x) \,/ p(x) + p'(x) = 0\}$ es subespacio vectorial del R-espacio vectorial $P_3(x)$.
- El conjunto $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 : x \leq 0\}$ no es un subespacio vectorial del $\mathbb{Q}$-espacio vectorial $\mathbb{Q}^3$.
- Si U_1 y U_2 son subespacios vectoriales del $\mathbb{K}-$espacio vectorial V, entonces $U_1 \bigcap U_2$ es un subespacio vectorial de V.

Sea V un $\mathbb{K}$–espacio vectorial, el siguiente concepto permitirá establecer la definición de *subespacio generado por una familia de vectores.*

Combinación lineal Sean $u, u_1, \ldots, u_m$ vectores de V. Se dice que u es una *combinación lineal* de los vectores $u_1, \ldots, u_m$ si existen escalares $a_1, \ldots, a_m$ en $\mathbb{K}$ tal que

$$u = a_1u_1 + a_1u_2 + \ldots + a_mu_m$$

Subespacio generado por una familia de vectores Sea $S = \{u_1, \ldots, u_m\}$ una familia de vectores de V. Se define el *subespacio generado por* S, que se denota $\langle S\rangle$, como el subconjunto de V formado por todos aquellos vectores de V que son combinación lineal de los vectores $u_1, \ldots, u_m$.

Es inmediato que si u es combinación lineal de los vectores $u_1, \ldots, u_m$, y cada uno de éstos es combinación lineal de los vectores $w_1, \ldots, w_l$, entonces u es combinación lineal de los vectores $w_1, \ldots, w_l$.

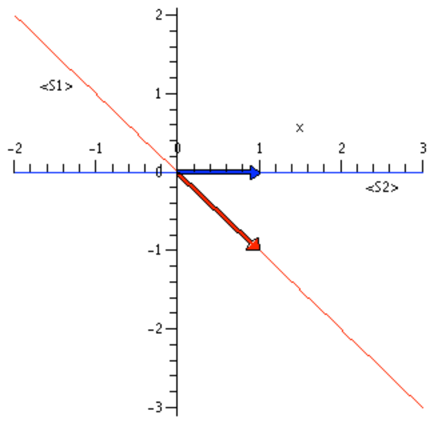
Ejemplo 2.2

- En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, si $S_1 = \{(1, -1)\}$, $\langle S_1\rangle$ representa la bisectriz del primer y tercer cuadrante. Para $S_2 = \{(1, 0)\}$, $\langle S_2\rangle$ representa el eje de abscisas; y si $S_3 = \{(1, -1), (1, 0)\}$, entonces $\langle S_3\rangle = \mathbb{R}^2$.
- Si en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $M_3(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas de orden 3 se consideran los subconjuntos

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

  entonces $\langle S_1\rangle$ es el conjunto de matrices escalares (matrices diagonales con todos los elementos de la diagonal principal iguales) y $\langle S_2\rangle$ es el conjunto de matrices diagonales.

La forma principal de definir un subespacio vectorial en Sage es mediante la familia de vectores que lo generan.



Combinaciones lineales de elementos de $\mathbb{R}^2$

Código Sage 2.2: Definición de espacios y subespacios vectoriales (I)

```
#Variables de entrada
V=VectorSpace(RR,2);
v1=V([1,-1]);
v2=V([1,0]);
S_1=V.subspace([v1]);
S_2=V.subspace([v2]);
S_3=V.subspace([v1,v2]);
print(v1 in S_3); #Comprueba si v1 pertenece al subespacio S_3
```

Evaluar en SageMathCell

Código Sage 2.3: Definición de espacios y subespacios vectoriales (II)

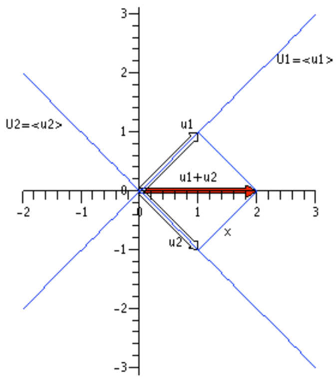
```
#Construir el subespacio que de vectores que cumplen x+y+z=0
A=matrix(QQ,[[1,1,1]]);
V1=VectorSpace(QQ,3);
S=V1.subspace(A.transpose().kernel());
v=vector(QQ,[1,0,1]);
print(A*v) #Si es distinto de 0, v no pertenece al subespacio S
```

Evaluar en SageMathCell

Union e intersección de subespacios Si V es un $\mathbb{K}$–espacio vectorial y U_1 y U_2 son subespacios vectoriales de V entonces la intersección de U_1 y U_2, es decir $U_1 \cap U_2$, es un subespacio vectorial de V.
Sin embargo para la unión de subespacios no es posible asegurar un resultado análogo, como muestra el siguiente ejemplo en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^2$:

$$U_1 = \big\langle \{u_1 = (1,1)\} \big\rangle, \qquad U_2 = \big\langle \{u_2 = (1,-1)\} \big\rangle$$

$$u_1 = (1,1) \in U_1 \cup U_2\ , \quad u_2 = (1,-1) \in U_1 \cup U_2\ , \quad u_1 + u_2 = (2,0) \notin U_1 \cup U_2$$



Combinación lineal de vectores de $U_1 \cup U_2$ que no está en $U_1 \cup U_2$

Suma de subespacios Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y U_1 y U_2 subespacios vectoriales de V. Se define el *subespacio suma* como

$$U_1 + U_2 = \langle U_1 \cup U_2 \rangle \quad \text{y se tiene que} \quad U_1 + U_2 = \{v_1 + v_2 \,/ v_1 \in U_1, v_2 \in U_2\}$$

Propiedades

1. Puesto que la combinación lineal de dos elementos en $\langle S \rangle$ es también una combinación lineal de los vectores de $\langle S \rangle$, de acuerdo con la proposición se tiene evidentemente que $\langle S \rangle$ es un subespacio vectorial de V.
2. Se tiene asimismo que $\langle S \rangle$ coincide con la intersección de todos los subespacios de V que contienen a S
3. $\langle S \rangle$ es el subespacio vectorial de V más pequeño de todos aquellos que contienen a S en el sentido siguiente:

$$\text{Si } U \text{ es un subespacio de } V \text{ tal que } S \subseteq U \text{ entonces } \langle S \rangle \subseteq U$$

Definición 2.3 *Diremos que* $S = \{u_1, \ldots, u_m\}$ *es un* **sistema de generadores** *de un* $\mathbb{K}$*–espacio vectorial* V *si*

$$V = \langle S \rangle.$$

A los espacios vectoriales que verifiquen esta propiedad se les denominará **espacios vectoriales de tipo finito**.

- Los $\mathbb{K}$-espacios vectoriales $\mathbb{K}^n$, $M_{n\times m}(\mathbb{K})$ y $\mathbb{K}_n[x]$ son de tipo finito.
- $\mathbb{K}[x]$ como $\mathbb{K}$–espacio vectorial no es de tipo finito.

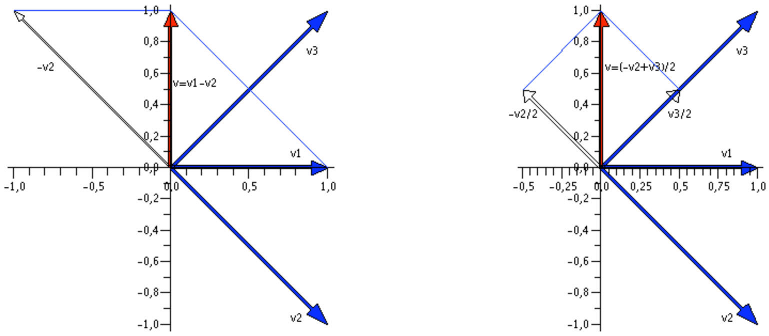
En todo lo que sigue, espacio vectorial denotará espacio vectorial de tipo finito.

Ejemplo 2.3
Si $V = \mathbb{R}^2$ es el $\mathbb{R}$–espacio vectorial, la familia $S = \{v_1 = (1,0), v_2 = (1,-1), v_3 = (1,1)\}$ es un sistema de generadores de V. Por ejemplo, el vector $v = (0,1)$ puede expresarse como combinación lineal de los vectores de S de la siguiente forma:

$$v = (0,1) = 1 \cdot (1,0) + (-1) \cdot (1,-1) + 0 \cdot (1,1) = v_1 - v_2$$

Pero también

$$v = (0,1) = 0 \cdot (1,0) + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (1,-1) + \frac{1}{2} \cdot (1,1) = \frac{1}{2}(-v_2 + v_3)$$



La búsqueda de la unicidad, i.e. una única forma de representar un vector como combinación lineal de aquellos que forman un sistema de generadores es lo que conduce, a la noción de vectores linealmente independientes y, al concepto de base.

Código Sage 2.4: Suma e intersección de subespacios vectoriales

```
#Variables de entrada
V=QQ^5;
v1=vector(QQ,[1,0,-1,1,0]);
v2=vector(QQ,[1,1,-1,1,0]);
v3=vector(QQ,[1,1,1,1,1]);
v4=vector(QQ,[1,0,1,0,1]);
U1=V.subspace([v1,v2,v3,v4]);
w1=vector(QQ,[1,0,0,1,0]);
w2=vector(QQ,[1,-1,-1,-1,-1]);
w3=vector(QQ,[0,0,1,0,1]);
U2=V.subspace([w1,w2,w3]);
print(U1+U2);
print(U1.intersection(U2));
```

Evaluar en SageMathCell

2.3. Dependencia e independencia lineal de vectores

Definición 2.4

- Sea V un $\mathbb{K}$–espacio vectorial y $u_1, \ldots, u_m$ vectores de V. Se dice que los vectores $u_1, \ldots, u_m$ son **linealmente independientes, (l.i) ,** (o que la familia $\{u_1, \ldots, u_m\}$ es **libre**), si se verifica la siguiente condición:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_m u_m = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$$

- Si los vectores $u_1, \dots, u_m$ no son linealmente independientes diremos que son **linealmente dependientes, (l.d)** , o que $\{u_1, \dots, u_m\}$ es una **familia ligada**.

Es decir, los vectores $u_1, \dots, u_m$ son l.i si y sólo si la única forma de representar el vector $\mathbf{0}$ como combinación lineal de $u_1, \dots, u_m$ es aquélla en la que todos los escalares son 0.

Ejemplo 2.4

- Los vectores $(1,1)$ y $(1,-1)$ de $\mathbb{R}^2$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial son l.i puesto que:

$$\alpha_1(1,1) + \alpha_2(1,-1) = (0,0) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

  En cambio, los vectores $(1,1)$, $(1,-1)$ y $(1,0)$ son l.d. puesto que:

$$(0,0) = 0(1,1) + 0(1,-1) + 0(1,0) = \frac{1}{2}(1,-1) + \frac{1}{2}(1,1) + (-1)(1,0)$$

Código Sage 2.5: Independencia entre vectores

```
"""
Una lista de vectores son linealmente independientes si al
   ponerlos por filas de una matriz el rango es maximo
"""
V=QQ^5;
v1=vector(QQ,[1,0]);
v2=vector(QQ,[1,-1]);
v3=vector(QQ,[1,0]);
M=matrix([v1,v2,v3]);
print(M.rank());

#Alternativamente resolver el sistema compatible
   indeterminado.
A=matrix(QQ,[[1,1,1],[1,-1,0]]);
A.transpose().kernel();
# Solucion General -> [1,1,-2]
A.solve_right(vector([0,0]));# Solucion particular sistema
   homogeneo ->[0,0,0]
```

Evaluar en SageMathCell

- Si $\mathbb{R}$ se considera como $\mathbb{R}$–espacio vectorial, es inmediato que la familia $\{1, \sqrt{2}\}$ es ligada puesto que se puede escribir: $(-\sqrt{2}) \cdot 1 + 1 \cdot \sqrt{2} = 0$.

- En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}_3[X]$ de los polinomios de coeficientes reales de grado menor o igual que 3, los vectores $1, X, X^3$ son l.i.

  También son l.i los vectores $1 - X$ y X^2.

  Son l.d los vectores $1 - X, X + X^2, 2, 3X^2$. Esta última afirmación queda justificada mediante la siguiente igualdad.

$$3X^2 - 3(X^2 + X) - 3(1 - X) - \frac{3}{2}2 = 0$$

- En el $\mathbb{Q}$-espacio vectorial $\mathbb{R}$ la familia $\{1, \sqrt{2}\}$ es libre. En efecto , si en la combinación $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot \sqrt{2} = 0$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ se tuviese $\beta \neq 0$,entonces $\sqrt{2}$ podría escribirse como cociente de dos números racionales, y por tanto sería racional. Lo cual es absurdo y por tanto debe ser $\beta = 0$, y entonces $\alpha = 0$.

Proposición 2.4
Sea V un $\mathbb{K}$–espacio vectorial y $\mathcal{S} = \{u_1, \dots, u_m\}$ una familia de vectores en V.

1. Si $\mathbf{0} \in \mathcal{S}$ entonces $\mathcal{S}$ es una familia ligada.

2. Si en $\mathcal{S}$ hay dos vectores repetidos entonces $\mathcal{S}$ es una familia ligada.

3. Si $\mathcal{S}$ es una familia libre entonces, para todo i, $\mathcal{S} - \{u_i\}$ es una familia libre.

4. Si $\mathcal{S}$ es una familia ligada y w es un vector cualquiera de V entonces $\mathcal{S} \cup \{w\}$ es una familia ligada.

5. $\mathcal{S}$ es una familia ligada si y sólo si existe un vector u_i en $\mathcal{S}$ que es combinación lineal de los vectores de $\mathcal{S} - \{u_i\}$.

6. Si $\mathcal{S}$ es una familia libre y $w \notin \langle S \rangle$ entonces $\mathcal{S} \cup \{w\}$ es una familia libre.

7. u_1 y u_2 son l.d. si y sólo si existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $u_1 = \alpha u_2$

El siguiente teorema muestra que las familias libres tienen menor o igual número de elementos que cualquier sistema generador del espacio vectorial considerado.

Teorema 2.1 *Sea V un $\mathbb{K}$–espacio vectorial y $\mathcal{S} = \{u_1, \dots, u_n\}$ un sistema generador de V, es decir $V = \langle S \rangle$. Si $\mathcal{T} = \{w_1, \dots, w_m\}$ es una familia libre de vectores en V entonces $m \leq n$.*

Corolario 2.1 *A partir del teorema anterior es inmediato deducir que:*

- En $\mathbb{K}^n$, como $\mathbb{K}$-espacio vectorial, las familias libres de vectores tienen a lo sumo n elementos.

- En $M_{n \times m}(\mathbb{K})$, como $\mathbb{K}$-espacio vectorial, las familias libres de vectores tienen a lo sumo $n.m$ elementos.

- En $\mathbb{K}_n[x]$, como $\mathbb{K}$-espacio vectorial, las familias libres de vectores tienen a lo sumo $n + 1$ elementos.

- En $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$, como $\mathbb{R}$-espacio vectorial, las familias libres de vectores tienen a lo sumo 3 elementos.

- En $\{A \in M_n(\mathbb{K}) : A \text{ es simétrica}\}$, como $\mathbb{K}$-espacio vectorial, las familias libres de vectores tienen a lo sumo $\dfrac{n(n+1)}{2}$ elementos.

2.4. Bases de un espacio vectorial

Definición 2.5 *Sea V un $\mathbb{K}$–espacio vectorial y $\mathcal{S} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una familia de vectores en V. Se dice que $\mathcal{S}$ es una* **base** *de V si $\mathcal{S}$ es una familia libre y $\mathcal{S}$ es un sistema de generadores de V.*

Proposición 2.5 *Sea V un $\mathbb{K}$–espacio vectorial y $\mathcal{S} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una familia de vectores en V. La familia $\mathcal{S}$ es una base de V si y sólo si todo vector de V se escribe, de forma única, como combinación lineal de los vectores de $\mathcal{S}$.*

Proposición 2.6 *En un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V todas las bases poseen el mismo número de elementos.*

Se define, por ello, la **dimensión** de V, $\dim(V)$, como el número de elementos en una base cualquiera de V .

Base canónica de un espacio vectorial Una *base canónica*, es una que es especialmente sencilla de describir y respecto de la cuál es fácil expresar cualquier vector:

- En $\mathbb{K}^n$, como $\mathbb{K}$-espacio vectorial, la base canónica es:

$$\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\} \quad \text{donde} \quad e_i = \overbrace{(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)}^{\text{1 en lugar i)}} \quad \forall\, i \text{ . Se cumple que} \dim(\mathbb{K}^n) = n$$

- En $M_{n\times m}(\mathbb{K})$, como $\mathbb{K}$-espacio vectorial, la base canónica es:

$$\mathcal{B} = \{A_{11}, \ldots, A_{nm}\} \quad \text{donde} \quad A_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow \text{fila i} \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{columna j} \end{array} & \end{array}$$

Se cumple que $\dim(M_{n\times m}(\mathbb{K})) = n.m$

- En $\mathbb{K}_n[X]$, la base canónica es :$\{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$. Se cumple que $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$

Teorema 2.2 *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con $\dim(V) = n$.*

1. Si $V = \langle u_1, \ldots, u_m \rangle$ entonces $n \leq m$. Además todo sistema generador de V se puede reducir a una base de V.

2. Si $V = \left\langle u_1, \ldots, u_n \right\rangle$ entonces $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base de V. Es decir n vectores que formen sistema generador en un espacio vectorial de dimensión n , forman base.

3. Si $\{u_1, \ldots, u_m\}$ son linealmente independientes entonces $m \leq n$. Además toda familia linealmente independiente de V se puede ampliar hasta formar una base de V.

   Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Si $w_1, \ldots, w_m$ son vectores de V linealmente independientes entonces existen $n - m$ vectores, $v_{i_1} \ldots, v_{i_{n-m}}$, en $\mathcal{B}$ tal que la familia $\{w_1, \ldots, w_m, v_{i_1} \ldots, v_{i_{n-m}}\}$ es una base de V.

4. Si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ son linealmente independientes entonces $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base de V. Es decir n vectores linealmente independientes en un espacio vectorial de dimensión n forman base.

Código Sage 2.6: Bases en subespacios vectoriales

```
#Variables de entrada
V=VectorSpace(RR,2);
v1=V([2,-1]);
v2=V([1,0]);
S_1=V.subspace([v1]);
print(S_1);
#Retorna la base formada por el vector [1,-0.5]
S_2=V.subspace([v2]);
S_3=V.subspace([v1,v2]);
print(S_3)
 #Retorna la base formada por los vectores {[1,0],[0,1]}
```

Evaluar en SageMathCell

2.5. Coordenadas de un vector respecto a una base

Sea $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base de V. Se sabe que todo vector $v \in V$ se escribe de forma única en función de esa base como

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n$$

La n-upla $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ se llama **coordenadas** de v respecto de la base $\mathcal{B}$.

Ejemplo: Las coordenadas del vector $v = (2,4)$ con respecto a la base canónica $\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ son $(2,4)$ porque

$$v = (2,4) = \mathbf{2}e_1 + \mathbf{4}e_2 = \mathbf{2}(1,0) + \mathbf{4}(0,1)$$

Pero con respecto a la base $\{u_1 = (1,-1), u_2 = (1,1)\}$ son $(-1,3)$ porque

$$v = (2,4) = -\mathbf{1}u_1 + \mathbf{3}u_2 = -\mathbf{1}(1,-1) + \mathbf{3}(1,1)$$

Es decir las coordenadas de un vector dependen de la base.

Ejemplo: Para obtener las coordenadas del vector $v = (5,-1)$ respecto de la base $\{u_1 = (1,2); u_2 = (-3,5)\}$, planteamos la igualdad

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \Rightarrow (5,-1) = \alpha_1(1,2) + \alpha_2(-3,5) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 - 3\alpha_2 = 5 \\ 2\alpha_1 + 5\alpha_2 = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow \alpha_1 = 2; \alpha_2 = -1$$

Matriz del cambio de bases en un espacio vectorial

Sean $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $\mathfrak{B}' = \{v'_1, v'_2, \ldots, v'_n\}$ dos bases de V.
Si $\mathbf{v} \in V$, se podrá expresar en dichas bases , $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ y $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x'_i v'_i$.
Por otra parte, como $\mathfrak{B}$ es base de V , cada vector de $\mathfrak{B}'$ se podrá poner en función de los vectores de $\mathfrak{B}$ de la forma $v'_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} v_j$. Sustituyendo

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} x'_i v'_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} v_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} x'_i \right) v_j \Rightarrow \begin{cases} x_1 = & \sum_{i=1}^{n} \alpha_{1i} x'_i \\ x_2 = & \sum_{i=1}^{n} \alpha_{2i} x'_i \\ \vdots & \vdots \\ x_n = & \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ni} x'_i \end{cases}$$

Matricialmente $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathbb{B}'} \overset{Notación}{\Rightarrow} \boxed{X_{\mathfrak{B}} = PX_{\mathfrak{B}'}}$

Notar, que con esta última notación, las columnas de la matriz P son las coordenadas de los vectores de $\mathfrak{B}'$ respecto de la base $\mathfrak{B}$.
Observar que en el cambio inverso de bases de la $\mathfrak{B}$ a la $\mathfrak{B}'$, quedaría , con la notación anterior, $X_{\mathfrak{B}'} = P^{-1}X_{\mathfrak{B}}$, lo que equivaldría a escribir por columnas las coordenadas de los vectores de $\mathfrak{B}$ respecto de $\mathfrak{B}'$.

Ejemplo 2.5 *Sean* $\mathfrak{B}_1 = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ *y* $\mathfrak{B}_2 = \{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$ *, dos bases de* $\mathbb{R}^3$ *y vamos a calcular la matriz del cambio de bases de* $\mathfrak{B}_1$ *a* $\mathfrak{B}_2$*.*

Con la notación anterior , tendremos $X_{\mathfrak{B}_2} = PX_{\mathfrak{B}_1}$ por tanto basta escribir los vectores de $\mathfrak{B}_1$ como combinación lineal de $\mathfrak{B}_2$. Las coordenadas obtenidas serán las columnas de la matriz de cambio M.
$(1,1,1) = \alpha_{11}(0,1,1) + \alpha_{12}(1,0,1) + \alpha_{13}(1,1,0) \Rightarrow \{\alpha_{11} = 1/2\ ;\ \alpha_{12} = 1/2\ ;\ \alpha_{13} = 1/2$
$(1,1,0) = \alpha_{21}(0,1,1) + \alpha_{22}(1,0,1) + \alpha_{23}(1,1,0) \Rightarrow \{\alpha_{21} = 0\ ;\ \alpha_{22} = 0\ ;\ \alpha_{23} = 1$
$(1,0,0) = \alpha_{31}(0,1,1) + \alpha_{32}(1,0,1) + \alpha_{33}(1,1,0) \Rightarrow \{\alpha_{31} = -1/2\ ;\ \alpha_{32} = 1/2\ ;\ \alpha_{33} = 1/2$
Por tanto $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$
Para el cambio inverso $X_{\mathfrak{B}_1} = QX_{\mathfrak{B}_2}$ se tiene que $Q = P^{-1}$ o bien escribiendo los vectores de $\mathfrak{B}_2$ como combinación lineal de los vectores de $\mathfrak{B}_1$.

$(0,1,1) = \alpha_{11}(1,1,1) + \alpha_{12}(1,1,0) + \alpha_{13}(1,0,0) \Rightarrow \{\alpha_{11} = 1\ ;\ \alpha_{12} = 0\ ;\ \alpha_{13} = -1$
$(1,0,1) = \alpha_{21}(1,1,1) + \alpha_{22}(1,1,0) + \alpha_{23}(1,0,0) \Rightarrow \{\alpha_{21} = 1\ ;\ \alpha_{22} = -1\ ;\ \alpha_{23} = 1$
$(1,1,0) = \alpha_{31}(1,1,1) + \alpha_{32}(1,1,0) + \alpha_{33}(1,0,0) \Rightarrow \{\alpha_{31} = 0\ ;\ \alpha_{32} = 1\ ;\ \alpha_{33} = 0$

Código Sage 2.7: Calculando la matriz de cambio de base

```
#El sistema anterior es equivalente a resolver el sistema
   matricial B1=B2*P
B1=matrix(QQ,[[1,1,1],[1,1,0],[1,0,0]]);
B2=matrix(QQ,[[0,1,1],[1,0,1],[1,1,0]]);
P=B2.solve_right(B1);
print(P);
#Comprobar para vector [1,0,0] en B1 corresponde a [1/2,1/2,1/2]
    en B2
print(P*vector(QQ,[1,0,0]));
```

Evaluar en SageMathCell

Nota: B1, B2 son las matrices con los vectores que forman la base en columna. Un objeto vector en Sage no diferencia entre vector columna o fila, se adapta según la operación.

Ejemplo 2.6 *En* $\mathbb{R}^3$ *se considera la base* $\mathcal{B} = \{(1,-1,1),(0,-1,1),(0,1,0)\}$. Si queremos saber cuáles son las coordenadas del vector $v = (3,2,1)$ respecto de la base $\mathcal{B}$, puede actuar

- bien resolviendo el sistema que resulta de la igualdad

$$(3,2,1) = a(1,-1,1) + b(0,-1,1) + c(0,1,0)$$

- o bien determinando la matriz del cambio de base P que da las coordenadas de los vectores de la base canónica en función de $\mathcal{B}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

  y obtener las coordenadas (a,b,c) de $v = (3,2,1)$ respecto de la base $\mathcal{B}$ como

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = P \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\text{canonica}} \qquad \Longrightarrow \qquad a = 3,\ b = -2,\ c = 3$$

Código Sage 2.8: Coordenadas del vector v respecto Base B

```
#Variables de entrada
B=matrix(QQ,[[1,0,0],[-1,-1,1],[1,1,0]])
v=vector(QQ,[3,2,1])
show(B**-1*v)
```

Evaluar en SageMathCell

2.6. Dimensión de subespacios vectoriales. Teorema del rango. Suma directa

Sea $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base de V y sea $W = \langle S \rangle$ el subespacio generado por S, donde $\mathcal{S} = \{v_1, \ldots, v_m\}$.
Sea $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ la matriz de las coordenadas de los vectores v_i con respecto a la base $\mathcal{B}$, es decir

$$v_i = a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \cdots + a_{in}u_n \quad i = 1, \ldots, m$$

Se tiene que

$$rango(A) = \dim(W)$$

Además, si B es una matriz escalonada por filas de la matriz A, entonces los vectores correspondientes a las coordenadas de las filas no nulas de B forman una base de W.

Ejemplo: Sea U el subespacio de $\mathbb{R}^3$: $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0, 2x - y + z = 0\}$ entonces $\dim(U) = 1$.

Teorema del rango

Teorema 2.3 Sea $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Consideramos el subespacio vectorial S de $\mathbb{K}^n$ generado por los m vectores filas de la matriz A y el subespacio T de $\mathbb{K}^m$ generado por los n vectores columna de la matriz A, se tiene que,

$$rango(A) = \dim(S) = \dim(T)$$

En otras palabras, el máximo número de los vectores fila linealmente independientes coincide con el máximo número de vectores columna linealmente independientes y, ese número es el rango de la matriz. Además, si B es una matriz escalonada por filas de la matriz A, entonces los vectores correspondientes a las coordenadas de las filas no nulas de B forman una base de S, y si C es una matriz escalonada por filas de la traspuesta de la matriz A, entonces los vectores correspondientes a las coordenadas de las filas no nulas de C forman una base de T

Ejemplo: Sea $A \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$, donde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$S = \langle (-1,\ 0,\ 0,\ 1), (1,\ -2,\ 0,\ 0), (-1,\ 1,\ 1,\ 2) \rangle$ y $T = \langle (-1,\ 1,\ -1), (0,\ -2,\ 1), (0,\ 0,\ 1), (1,\ 0,\ 2) \rangle$

La forma reducida de la matriz A es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, por lo tanto una base de S es $\{(1,\ 0,\ 0,\ -1), \left(0,\ 1,\ 0,\ -\frac{1}{2}\right), \left(0,\ 0,\ 1,\ \frac{3}{2}\right)\}$

Por otro lado, la forma reducida de la traspuesta $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ de la matriz A es

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, y por lo tanto una base de T es $\{(1,\, 0,\, 0)\,, (0,\, 1,\, 0)\,, (0,\, 0,\, 1)\}$

Suma y suma directa de Subespacios vectoriales

Proposición 2.7

- Si U es un subespacio vectorial de V, entonces $\dim(U) \leq \dim(V)$.
  Además si $\dim(U) = \dim(V)$, entonces $U = V$.
- Si U_1 y U_2 son subespacios vectoriales de V, se cumple (*fórmula de Grassamn*):

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$$

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean U_1 y U_2 subespacios vectoriales de V. Se dice que la suma de U_1 y U_2 es **directa** si $U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{0}\}$.
En tal caso escribiremos $U_1 \oplus U_2$.

Teorema 2.4 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. La suma de U_1 y U_2 es directa.
2. La unión de dos bases cualesquiera de U_1 y U_2 es una base de $U_1 + U_2$.
3. Todo vector de $U_1 + U_2$ se escribe, **de forma única**, como suma de un vector en U_1 y de un vector en U_2.

En este caso, se dice que U_1 y U_2 son **subespacios suplementarios**.

Generalizamos todo lo anterior al caso de la suma de más de dos subespacios.

Definición 2.6 *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $U_1, \ldots, U_n$ subespacios vectoriales de V. Se dice que la suma de $U_1, \ldots, U_n$ es directa, y escribiremos $U_1 \oplus \ldots \oplus U_n$, si todo vector de $U_1 + \ldots + U_n$ se escribe,* **de forma única***, como suma de un vector en U_1, de un vector en U_2, $\ldots$, y de un vector en U_n.*

Ejemplo 2.7 *Se consideran los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^6$:*

$$U = \{(x, y, z, r, s, t) \in \mathbb{R}^6 : x + y + z = 0, r + s + t = 0\}$$

$$W = \{(x, y, z, r, s, t) \in \mathbb{R}^6 : x - y = 0, x - z = 0, r - s = 0, r - t = 0\}$$

Puesto que un vector $v = (x, y, z, r, s, t) \in U \cap W$ si y sólo si

$$x + y + z = 0, r + s + t = 0, x - y = 0, x - z = 0, r - s = 0, r - t = 0$$

podemos deducir que el único vector que está en $U \cap W$ es el vector nulo.
Una base de U es

$$\mathcal{B}_U = \{(1, -1, 0, 0, 0, 0), (1, 0, -1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1, -1, 0), (0, 0, 0, 1, 0, -1)\}$$

Una base de W es

$$\mathcal{B}_W = \{(1, 1, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 1, 1)\}$$

La fórmula de Grasmann nos asegura que la dimensión de $U + W$ es 6, y que dicho subespacio es por tanto todo $\mathbb{R}^6$. Como $U \cap W = \{\mathbf{0}\} \Rightarrow \mathbb{R}^\mathbf{6} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$.

Ejemplo 2.8 *En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios:*

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = 0, t = 0\}$$

$$U = \{(2a, -a + b, -a + 3b, 0) : a, b \in R\}$$

Un vector v que está tanto en U como en W, verificará $2a + (-a + b) + (-a + 3b) = 0$, y se tendrá que

$$v \in U \cap W \quad \Longleftrightarrow \quad v = a(2, -1, -1, 0)$$

esto es, $U \cap W =< (2, -1, -1, 0) >$. Para hallar una base de $U + W$ consideramos una de $U \cap W$ y la ampliamos sucesivamente a una de U y a una de W. Así una base de $U + W$ es $\mathcal{B} = \{(2, -1, -1, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 1, 3, 0)\}$.

Código Sage 2.9: Resolviendo el ejemplo anterior

```
#Variables de entrada
V=VectorSpace(QQ,6)
A=matrix(QQ,[[1,1,1,0,0,0],[0,0,0,1,1,1]])
B=matrix(QQ,[[1,-1,0,0,0,0],[1,0,-1,0,0,0],[0,0,0,1,-
   1,0],[0,0,0,1,0,-1]])
U1=V.subspace(A.transpose().kernel())
U2=V.subspace(B.transpose().kernel())
print(U1+U2)
print(U1.intersection(U2))
```

Evaluar en SageMathCell

2.7. Ejercicios propuestos sobre espacios vectoriales

1. En los distintos casos que se presentan a continuación, y sabiendo que se trabaja en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^6$, sustituir los $\cdots$ por los valores que permiten obtener las igualdades señaladas.

   a) $(-1,4,2,0,0,1)+3(1,0,0,-2,-1,1)+(-1)(0,0,0,1,0,0)=$
   $(\cdots,\cdots,\cdots,\cdots,\cdots,\cdots)$

   b) $\cdots(-1,4,2,0,0,0)+3(1,0,0,\cdots,4,4)=(0,\cdots,\cdots,15,\cdots,\cdots)$

   c) $0(\cdots,\cdots,\cdots,\cdots,\cdots,\cdots)=(0,0,0,0,0,0)$.

   d) $(x,y,z,t,r,s)+(\cdots,\cdots,\cdots,\cdots,\cdots,\cdots)=(x,y,z,t,r,s)$

2. En los distintos casos que se presentan a continuación, y sabiendo que se trabaja en el $\mathbb{Z}_5$-espacio vectorial $\mathbb{Z}_5^6$, sustituir los $\cdots$ por los valores que permiten obtener las igualdades señaladas.

   a) $(-1,4,2,0,0,1)+3(1,0,0,-2,-1,1)+(-1)(0,0,0,1,0,0)=$
   $(\cdots,\cdots,\cdots,\cdots,\cdots,\cdots)$

   b) $\cdots(-1,4,2,0,0,0)+3(1,0,0,\cdots,4,4)=(0,\cdots,\cdots,15,\cdots,\cdots)$

   c) $0(\cdots,\cdots,\cdots,\cdots,\cdots,\cdots)=(0,0,0,0,0,0)$.

   d) $(x,y,z,t,r,s)+(\cdots,\cdots,\cdots,\cdots,\cdots,\cdots)=(x,y,z,t,r,s)$

3. En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ se consideran los siguientes elementos:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

   Señalar, justificando la respuesta, cuáles de las afirmaciones siguientes son correctas.

   a) La matriz B es la opuesta de la matriz A y $A+(-B)+2C=2D$.

   b) Existen números reales α y β ambos no nulos tales que $\alpha A=\beta D$.

   c) Si $\alpha B+\beta C=D$, entonces $\beta=-\alpha=1$.

   Determina el vector $v=3A-B+\frac{1}{2}C+2D$, así como un vector w tal que $v+3w=A$.

4. Se consideran los siguientes vectores del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$:

$$v_1=(1,1,-1,0), v_2=(1,2,0,1), v_3=(1,0,1,2)$$

$$w_1=(3,1,1,4), w_2=(2,3,-4,-2), w_3=(0,-1,-1,-1)$$

   a) Escribir tres combinaciones lineales distintas de los vectores w_1,w_2,w_3 (que denotaremos por u_1, u_2 y u_3).

   b) Expresar w_1, w_2 y w_3 como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3.

c) Expresar los vectores u_1, u_2 y u_3 dados en el primer apartado como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3.

d) ¿Es verdadera o falsa la siguiente afirmación?: "Si $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ es combinación lineal de w_1, w_2 y w_3, entonces v es combinación lineal de v_1, v_2 y v_3.

5. En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se considera el conjunto

$$U = \{\alpha(1, 1, 1, 1) + \beta(1, 1, -1, -1) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Completa cada una de las frases siguientes.

a) U es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores ....

b) U es un subespacio porque si $u_1, u_2 \in U$, entonces ....

c) U es el subespacio generado por ....

d) El vector $u = (1, 1, 0, 0)$ pertenece a U porque ....

e) El vector $u = (1, 1, -1, 0)$ no pertenece a U porque ....

Responde a cada una de las cuestiones siguientes:

a) Si S es un subespacio de $\mathbb{R}^4$ tal que $(1, 1, 1, 1) \in S$ y $(1, 1, -1, -1) \in S$, ¿es cierto que $U \subset S$?

b) Si $W = \{\gamma(1, 1, 1, 1) + \delta(2, 2, 2, 2) : \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}$, ¿es cierto que $W \subset U$?

c) Si $T = \{\gamma(1, 1, 0, 0) + \delta(0, 0, 1, 1) + \epsilon(-1, -1, 3, 3) : \gamma, \delta, \epsilon \in \mathbb{R}\}$, ¿es cierto que $T = U$?

6. En el $\mathbb{Z}_2$-espacio vectorial $\mathbb{Z}_2^4$ define un subespacio U generado por tres vectores, tal que $W = \{\gamma(1, 1, 1, 1) + \delta(1, 1, 0, 0) : \gamma, \delta \in \mathbb{Z}_2\}$ sea un subespacio de U.

7. En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se consideran los vectores y subespacios siguientes:

$$v_1 = (1, 1, 1, 0), v_2 = (1, 1, 0, 1), v_3 = (1, 0, 1, 1), v_4 = (0, 1, 1, 1),$$

$$S_1 = \big\langle\{v_1\}\big\rangle, \qquad S_2 = \big\langle\{v_1, v_2\}\big\rangle, \qquad S_3 = \big\langle\{v_1, v_2, v_3\}\big\rangle, \qquad S_4 = \big\langle\{v_1, v_2, v_3, v_4\}\big\rangle.$$

a) Escribir tres vectores distintos de cada uno de los subespacios S_1, S_2, S_3, S_4.

b) Justificar la gráfica anterior.

c) Escribir dos vectores de S_2 que no estén en S_1, dos vectores de S_3 que no estén en S_2, y dos vectores de S_4 que no estén en S_3.

d) Si $\mathcal{B}_c = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^4$, se puede expresar cada e_i como combinación lineal de v_1, v_2, v_3, v_4?

e) ¿Se puede afirmar que $\mathbb{R}^4 = \big\langle\{v_1, v_2, v_3, v_4\}\big\rangle$

8. Se consideran las siguientes familias de vectores del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$:

$$C = \{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0)\} \quad \text{y} \quad S = \big\langle\{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0)\}\big\rangle$$

a) Indicar la cantidad de vectores que hay en C y en S.

b) Comprobar que C no es un subespacio de $\mathbb{R}^4$, y que S sí lo es.

c) Dar un vector de S que no pertenezca a C. ¿Hay algún vector de C que no esté en S?

d) ¿Se puede decir que C es un sistema generador de S?

9. Sea $\mathbb{R}$ el cuerpo de los números reales. En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ se consideran los siguientes conjuntos.

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x - y \geq 0\}$$

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 2,\ y \leq 0\}$$

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5x - 2y = 0\}$$

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos $\alpha U = \{\alpha u : u \in U\}$; análogamente se define αW y αT. Además llamamos $U* = \{\alpha u : u \in U\ \alpha \in \mathbb{R}\}$; de forma similar $T*$, $W*$.

a) Representa gráficamente U, W, T, $(-1) \cdot U$, $3 \cdot W$ y $5 \cdot T$.

b) Representa gráficamente $U*$, $W*$, $T*$.

c) ¿Quiénes de los conjuntos U, W y T son subespacios de $\mathbb{R}^2$?

10. Sea $\mathbb{R}$ el cuerpo de los números reales. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales?

a) $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - 8y = 0\}$.

b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq 0, y = 2\}$.

c) $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{Z}^-\ \text{ó}\ x \in \mathbb{R}^+\}$.

d) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$.

d) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \in \mathbb{Q}\}$.

Representa gráficamente los conjuntos definidos en los apartados anteriores. Ilustra también las respuestas dadas.

11. Sea $\mathbb{Q}$ el cuerpo de los números racionales. Define dos subconjuntos U y W del $\mathbb{Q}$-espacio vectorial $V = \mathbb{Q}^2$ tales que U sea subespacio de V y W no lo sea.

12. Se considera el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$. Determina en cada caso los valores de x y de y, si es posible, para que:

a) $(3, 2, x, y) \in \big\langle\{(1, 4, -5, 2), (1, 2, 3, 1)\}\big\rangle$.

b) $(x, x + 1, y, y + 1) \in \big\langle\{(1, 3, 0, 2)\}\big\rangle$.

c) $(x, x - 1, y, y + 1) \in \big\langle\{(1, 3, 0, 2)\}\big\rangle$.

13. Se considera el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$.

$$U = \big\langle\{(1, 4, -5,), (1, 2, 3)\}\big\rangle$$

$$W = \{\alpha(1, -1, 0) + \beta(1, 2, 3) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

a) Da un subespacio T de $\mathbb{R}^3$ tal que $T \neq \{\vec{0}\}$, $T \subset U$ y $T \subset W$.

b) Da un subespacio S de $\mathbb{R}^3$ tal que $U \subset S$ y $W \subset S$.

c) Siendo S el subespacio dado en el apartado anterior, ¿es cierto que $S = \mathbb{R}^3$?

14. Sean $v_1 = (0, 1, 1, 0)$ y $v_2 = (1, 0, 0, 1)$ dos vectores de $\mathbb{Z}_3^4$.

    a) Demostrar que v_1 y v_2 son linealmente independientes.

    b) Sea S el subespacio generado por v_1 y v_2, ¿es $S = \{(a, b, b, a) : a, b \in \mathbb{Z}_3\}$?

    c) Dar un vector $w \notin S$ y probar que $\{v_1, v_2, w\}$ es una parte libre de $\mathbb{Z}_3^4$

    d) Sea $T = \langle\{v_1, v_2, w\}\rangle$. Hallar un vector $u \notin T$ y probar que $\mathbb{Z}_3^4 = \big\langle\{v_1, v_2, w, u\}\big\rangle$.

15. Sea G el siguiente conjunto de vectores del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$:

$$G = \{v_1 = (1, -1, 0, 1), v_2 = (1, 1, 2, 1), v_3 = (1, 0, 1, 1), v_4 = (4, 1, 5, 4)\}$$

    a) Comprobar que G es ligada, y eliminar de G el menor número de vectores posible para llegar a una familia libre L.

    b) ¿Es cierto que $\big\langle G\big\rangle = \big\langle L\big\rangle$?

    c) ¿Cuál es el número máximo de vectores l.i. que hay en $\big\langle L\big\rangle$?

    d) Añade a L cuantos vectores sean necesarios para llegar a una familia libre F tal que $\mathbb{R}^4 = \big\langle F\big\rangle$

16. Sea $\mathbb{C}$ el cuerpo de los números complejos y $\mathbb{R}$ el de los reales. Se consideran los espacios vectoriales siguientes:

$$(\mathbb{C}^2, +, \cdot_{\mathbb{C}}) \qquad (\mathbb{C}^2, +, \cdot_{\mathbb{R}})$$

    a) Comprobar que $(1 - i)(1 + i, 2i) + (-2)(1, i + 1) = (0, 0)$

    b) En $(\mathbb{C}^2, +, \cdot_{\mathbb{C}})$, ¿Son $(1 + i, 2i)$ y $(1, i + 1)$ linealmente independientes? ¿Por qué?

    c) En $(\mathbb{C}^2, +, \cdot_{\mathbb{R}})$, ¿Son $(1 + i, 2i)$ y $(1, i + 1)$ linealmente independientes? ¿Por qué?

17. En $\mathbb{R}^2$ se consideran los conjuntos de vectores:

$$\mathcal{B} = \{(0, 1), (2, 1)\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}' = \{(2, 2), (2, -1)\}$$

    a) Probar que $\mathcal{B}$ es base de $\mathbb{R}^2$.

    b) Escribir, si es posible, cada vector de $\mathcal{B}$ en función de $\mathcal{B}'$.

    c) ¿Si v es combinación lineal de $\mathcal{B}$, v es combinación lineal de $\mathcal{B}'$?

    d) ¿Es $\mathcal{B}'$ sistema generador de $\mathbb{R}^2$? ¿Es $\mathcal{B}'$ base de $\mathbb{R}^2$?

    e) Dar una representación gráfica de $\mathcal{B}$ y de $\mathcal{B}'$ y de la forma de expresar el vector $v = (3, -4)$ en función de cada una de esas familias de vectores.

18. En $\mathbb{R}^2$ se considera el siguiente conjunto de vectores:

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ -3 \leq x \leq 1, y = 1\}$$

    a) ¿Es G es subespacio de $\mathbb{R}^2$?

    b) Demostrar que los vectores $v_1 = (-3, 1)$ y $v_2 = (1, 1)$ forman una base de $\mathbb{R}^2$.

    c) Expresar cada vector de G en función de $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$. Representar gráficamente este resultado.

    d) ¿Sería correcto decir que $\mathcal{B}$ es una base de G?

19. En $\mathbb{R}^3$ se consideran los conjuntos de vectores:

$$\mathcal{B} = \{(0,0,1),(0,2,1),(3,2,1)\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}' = \{(2,1,0),(0,2,1),(2,0,1)\}$$

   a) Probar que $\mathcal{B}$ es base de $\mathbb{R}^3$.
   b) Escribir, si es posible, cada vector de $\mathcal{B}$ en función de $\mathcal{B}'$.
   c) ¿Si v es combinación lineal de $\mathcal{B}$, v es combinación lineal de $\mathcal{B}'$?
   d) ¿Es $\mathcal{B}'$ sistema generador de $\mathbb{R}^3$? ¿Es $\mathcal{B}'$ base de $\mathbb{R}^3$?

20. ¿Cuáles son las coordenadas del vector $v = (1,2,3,4) \in \mathbb{R}^4$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{v_1.v_2, v_3, v_4\}$ siendo $v_1 = (4,3,2,1)$, $v_2 = (3,2,1,0)$, $v_3 = (2,1,0,0)$, $v_4 = (1,0,0,0)$.

21. Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $L = \{v_1, v_2, \cdots, v_{40}\}$ una parte libre de V. ¿Cuáles de las afirmaciones siguientes son verdaderas?

   a) $\dim(V) \geq 40$
   b) Si L es sistema generador, entonces $\dim(V) = 40$
   c) $\dim(V) = 40$
   d) Existe $S \subset L$ tal que S es sistema generador de V

22. Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sea $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_6\}$ un sistema generador de V. ¿Cuáles de las afirmaciones siguientes son verdaderas?

   a) $\dim(V) \leq 6$
   b) Si S parte libre, entonces $\dim(V) = 6$
   c) $\dim(V) > 6$

23. Se considera el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $V = \mathbb{R}^4$. ¿Cuáles de los siguientes subespacios de V tienen dimensión 2?

   a) $T_1 = \left\langle \{(1,1,1,0),(-1,2,3,-1)\} \right\rangle$
   b) $T_2 = \left\langle \{(1,1,0,1),(-1,2,3,0),(0,-3,-3,-1)\} \right\rangle$
   c) $T_3 = \{(x,y,z,t) \in V \ : \ 2x - y = 0,\ z + 2t = 0\}$
   d) $T_4 = \{(x,y,z,t) \in V \ : \ 2x - y + z + 2t = 0\}$

24. Sea $\mathcal{B}_c = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,1,1,1), v_2 = (1,2,1,1), v_3 = (0,0,0,1), v_4 = (1,0,0,-1)\}$.

   a) Demuestra que $\mathcal{B}$ es base de V.
   b) Sea $v = (1,2,3,4) \in \mathbb{R}^4$. Halla las coordenadas de v respecto $\mathcal{B}_c$ y respecto $\mathcal{B}$.
   c) Sea $v = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. Halla las coordenadas de v respecto $\mathcal{B}_c$ y respecto $\mathcal{B}$.
   d) Si un vector $v \in \mathbb{R}^4$ cualquiera tiene coordenadas $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ respecto $\mathcal{B}_c$ y coordenadas $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ respecto $\mathcal{B}$. Determina una matriz M tal que

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}$$

   ¿Qué nombre recibe esa matriz M?

e) Sea $\mathcal{B}' = \{v_1', v_2, v_3', v_4'\}$ con

$$v_1' = (0,0,0,1), v_2' = (0,0,1,1), v_3' = (0,1,-1,-1), v_4' = (-1,1,1,-1)$$

1) Demuestra que $\mathcal{B}'$ es una base de $V = \mathbb{R}^4$
2) Sea $v = (1,2,3,4) \in \mathbb{R}^4$. Determina las coordenadas de v respecto $\mathcal{B}'$.
3) Sea $v = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. Determina las coordenadas de v respecto $\mathcal{B}'$.
4) Si un vector $v \in \mathbb{R}^4$ cualquiera tiene coordenadas $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ respecto $\mathcal{B}$ y coordenadas $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$ respecto $\mathcal{B}'$. Determina una matriz N tal que

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix}$$

¿Qué nombre recibe esa matriz N?

25. Se considera el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $V = \mathbb{R}^4$, y sea U el siguiente subespacio de V:

$$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ 2x + y - 3z = 0\}$$

¿Cuáles de las afirmaciones dadas a a continuación son verdaderas?

a) $\big\langle\{(1,-2,0,0), (0,3,1,0)\}\big\rangle$ es base de U.
b) U tiene dimensión 3.
c) $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x + y - z = 0, \ x - 2z = 0\}$ es un subespacio de U.
d) No existe un subespacio T de $\mathbb{R}^4$ tal que $U \oplus W = \mathbb{R}^4$.
e) Construye una aplicación lineal f de V en U de rango 2.

26. Prueba que la familia $\{1+X, X+X^2, 1+X^2\}$ es un sistema generador libre de

$$\mathbb{Q}_2[X] = \{p(X) \in \mathbb{Q}[X] : \text{grado}(p(X)) \leq 2\}$$

Escribe $3 + 2X + 5X^2$ como combinación lineal de la familia anterior.

27. Tomamos en $\mathbb{R}^3$ $v_1 = (2,4,6)$, $v_2 = (-1,2,1)$, $v_3 = (-8,-8,-16)$ y $v_4 = (6,4,10)$

a) ¿Es la familia de vectores anterior libre? ¿Es base de $\mathbb{R}^3$?
b) ¿Se puede obtener una base de $\mathbb{R}^3$ eliminando alguno de los vectores v_i? ¿Es el vector $(1,0,0)$ combinación lineal de la familia (v_1, v_2, v_3, v_4)?.
c) Sea $S = \big\langle\{v_1, v_2, v_3, v_4\}\big\rangle$. Determina un subespacio T de $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathbb{R}^3 = S \oplus T$.

28. En $\mathbb{R}^4$ se consideran los siguientes subespacios

$$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y + z = 0, z + 3t = 0\}$$

$$W = \{(2a, a+4b, 0, c+b) \in \mathbb{R}^4 : a,b,c \in \mathbb{R}\}$$

Determina bases y dimensión de los mismos. ¿Es $\mathbb{R}^4 = U + W$?

29. Sea U el siguiente subespacio del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$:
$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x + 2y = 0, 3z - t = 0\}.$$
¿Cuáles de las afirmaciones siguientes son ciertas?
    a) Si $W_1 = \langle\{(1, 1, 1, 1)\}\rangle$, entonces la suma de U y W_1 es directa: $U \oplus W_1$.
    b) Si $W_2 = \langle\{(-2, 1, 1, 3)\}\rangle$, entonces W_2 está contenido en U: $W_2 \subset U$.
    c) $W_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x + 2y = 0\}$, entonces $U \cap W_3 = U$.
    d) $W_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x + y + z = 0, t = 0\}$, entonces $U \oplus W_4 = \mathbb{R}^4$.

30. Considera los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^4$
$$S = \{(5, -2, 3, 4), (1, 0, -1, 0), (7, -3, 5, 6)\}$$
$$T_1 = \{(1, 0, 0, 0), (1, -1, 1, -1), (1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4)\}$$
$$T_2 = \{(6, \frac{-5}{2}, 4, 5), (11, -3, 1, 6), (\frac{13}{2}, \frac{-5}{2}, \frac{7}{2}, 5), (-3, 1, -1, -2)\}$$
    a) Determina una base $\mathcal{B}$ del subespacio generado por S.
    b) Extiende el conjunto $\mathcal{B}$ hallado anteriormente a una base de $\mathbb{R}^4$ añadiendo, si es posible, vectores de T_1.
    c) Realiza el mismo ejercicio que en el apartado anterior pero teniendo en cuenta T_2.

31. Sea V un $\mathbb{K}$–espacio vectorial. Dí si es verdadera o falsa cada una de las afirmaciones siguientes.
    a) Si $V = U \oplus W \oplus T$, $v \notin U \oplus W$, entonces $v \in T$.
    b) Si $\dim V = 2n$, entonces es posible encontrar subespacios U y W de V, ambos de dimensión n y tales que $V = U \oplus W$.
    c) Si $\dim V = 6$, y U y W son ambos de dimensión 3, entonces $V = U \oplus W$.
    d) Si U y W son subespacios de V tales que $\dim U + \dim W > \dim V$, entonces $U \cap W \neq 0$.

32. Sea V el $\mathbb{R}$–espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 3. En V se consideran los siguientes subconjuntos:
$$W = \{p(X) \in V : p'(0) = 0\} \quad \text{y} \quad T = \{p(X) \in V : p''(1) = 0\}$$
donde $p'(X)$ y $p''(X)$ representan, respectivamente, la derivada primera y la derivada segunda del polinomio $p(X)$.
    a) Demuestra que W y T son subespacios vectoriales de V.
    b) Determina bases de W y T, así como del subespacio $W \cap T$.
    c) Determina, si existe, una base de un subespacio U tal que $U \oplus (W \cap T) = V$.

33. Sea $M_n(\mathbb{R})$ el $\mathbb{R}$–espacio vectorial de matrices $n \times n$ con coeficientes reales.
    a) Demuestra que el conjunto W formado por todas las matrices (a_{ij}) tales que $a_{ij} = 0$ para $i > j$ es un subespacio de $M_n(\mathbb{R})$.
    b) Admitiendo que $W' = \{(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}) : a_{ij} = 0 \text{ si } \ i < j\}$ es un subespacio, describe el subespacio $W \cap W'$, y determina bases y dimensión de W, W' y $W \cap W''$.