Tema 3 Aplicaciones Lineales

En el tema anterior hemos introducido el concepto de espacios vectoriales y en este, estudiaremos las aplicaciones entre ellos. En cualquier estructura matemática es natural estudiar las funciones que guardan alguna relación con la estructura. Por ejemplo, en el caso de las funciones reales de variable real una clase destacable son las funciones continuas, que tienen propiedades relacionadas con la topología de $\mathbb{R}$. Las aplicaciones de la teoría de espacios vectoriales originan funciones que están muy relacionadas con la descripción de diversas transformaciones geométricas (simetrías, proyecciones, giros, homotecias, etc.) y también quedarán unívocamente determinadas por una matriz.

3.1. Concepto de homomorfismo

Los espacios vectoriales son estructuras en las que se puede sumar y multiplicar por escalares. Las aplicaciones lineales u homomorfismos son las que preservan estas operaciones básicas, en el sentido de la siguiente definición.

Definición 3.1 *Sean V y W dos $\mathbb{K}-$espacios vectoriales. Una aplicación $f : V \to W$ se dice* aplicación lineal *u* homomorfismo *si cumple:*

i) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \forall\, v_1, v_2 \in V$

ii) $f(\lambda v) = \lambda f(v) \quad \forall\, v \in V \,, \forall\, \lambda \in \mathbb{K}$.

Las dos propiedades anteriores son equivalentes a:

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) \quad \forall\, v_1, v_2 \in V \,, \forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$$

$Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$ denota el conjunto de todas las aplicaciones lineales u homomorfismos entre los espacios vectoriales, V y W.
Una aplicación lineal $f : V \to V$ se denomina *endomorfismo* , es decir, el espacio inicial y final son el mismo. Denotamos $End_{\mathbb{K}}(V)$ al conjunto de endomorfismos de V.
Sea $f \in Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$, si $f(v) = w$, se dice que w es la *imagen* por f del vector v y también que v es *antiimagen* por f del vector w.

Ejemplo 3.1

1. *Homomorfismo identidad* $\begin{array}{rcl} f : V & \to & V \\ v & \rightsquigarrow & f(v) = v \end{array}$

2. *Homomorfismo nulo* $\begin{array}{rcl} f : V & \to & W \\ v & \rightsquigarrow & f(v) = 0_W \end{array}$

3. *Homomorfismo opuesto* $\begin{array}{rcl} (-f) : V & \to & W \\ v & \rightsquigarrow & (-f)(v) = -f(v) \end{array}$

4. $$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \rightsquigarrow & f(x,y,z)=(x+y,y-z) \end{array}$$

   Veamos que es aplicación lineal, demostrando las dos propiedades de la definición:

   i) Sean $v_1=(x_1,y_1,z_1)$ y $v_2=(x_2,y_2,z_2)\in\mathbb{R}^3$ entonces:

   $f(v_1+v_2)=f(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)=(x_1+x_2+y_1+y_2,y_1+y_2-(z_1+z_2))=$
   $=(x_1+y_1,y_1-z_1)+(x_2+y_2,y_2-z_2)=f(v_1)+f(v_2)$

   ii) Sean $v=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ y $\lambda\in\mathbb{K}$ entonces:

   $f(\lambda v)=f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=(\lambda x+\lambda y,\lambda y-\lambda z)=\lambda(x+y,y-z)=\lambda f(v)$

5. $$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \rightsquigarrow & f(x,y,z,t)=(x+y,y+z,2z+3t) \end{array}$$

6. $$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} & \rightsquigarrow & f\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=(x+y,y-z,2z+3t) \end{array}$$

   Veamos que es aplicación lineal, demostrando las dos propiedades de la definición:

   i) Sean $v_1=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & t_1 \end{pmatrix}$ y $v_2=\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & t_2 \end{pmatrix}\in\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ entonces :

   $f(v_1+v_2)=f\left[\begin{pmatrix} x_1+x_2 & y_1+y_2 \\ z_1+z_2 & t_1+t_2 \end{pmatrix}\right]=$
   $=(x_1+x_2+y_1+y_2,y_1+y_2-(z_1+z_2),2(z_1+z_2)+3(t_1+t_2)=$
   $=(x_1+y_1,y_1-z_1,2z_1+3t_1)+(x_2+y_2,y_2-z_2,2z_2+3t_2)=f(v_1)+f(v_2)$

   ii) Sean $v=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\in\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ y $\lambda\in\mathbb{K}$ entonces:

   $f(\lambda v)=f\left[\lambda\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\right]=f\left[\begin{pmatrix} \lambda x & \lambda y \\ \lambda z & \lambda t \end{pmatrix}\right]=(\lambda x+\lambda y,\lambda y-\lambda z,2\lambda z+3\lambda t)=$
   $=\lambda(x+y,y-z,2z+3t)=\lambda f(v)$

7. Si U y W son subespacios de V tales que $V=U\oplus W$ entonces la aplicación de V en U que a cada vector $v=u+w$ con $u\in U$ y $w\in W$, le asocia el vector u es una aplicación lineal, llamada proyección de V sobre U (en la dirección de W). A lo largo de este texto, dicha aplicación se denotará habitualmente por $p_{U,W}$.
   Un ejemplo de esta situación se muestra a continuación. Sea $V=\mathbb{R}^3$, $U=\big\langle\{u_1=(1,1,1),u_2=(2,-1,0)\}\big\rangle$ y $W=\big\langle\{w=(0,1,4)\}\big\rangle$.

   En este caso, cada vector $v=(x,y,z)\in V$ se escribe como combinación lineal de u_1,u_2 y w en la forma

   $$v=(x,y,z)=\underbrace{\frac{2x+4y-z}{5}u_1+\frac{3x-4y+z}{10}u_2}_{en\ U}+\frac{(-x-2y+3z)}{10}w$$

   de donde se deduce que $p_{U,W}:\mathbb{R}^3\to U$ está definida por

   $$p_{U,W}(v)=p_{U,W}(x,y,z)=\frac{2x+4y-z}{5}u_1+\frac{3x-4y+z}{10}u_2$$

$$\left(\frac{2x+4y-z}{5}+2\frac{3x-4y+z}{10},\frac{2x+4y-z}{5}-\frac{3x-4y+z}{10},\frac{2x+4y-z}{5}\right)$$
$$=\left(x,\frac{x+12y-3z}{10},\frac{2x+4y-z}{5}\right)$$

¿Quién será $p_{W,U}(v)$?.
La figura siguiente muestra el significado de la proyección desde un punto de vista gráfico. Se muestra el efecto de $p_{U,W}$ sobre el vector $v=\left(2,\frac{1}{2},\frac{8}{3}\right)$.

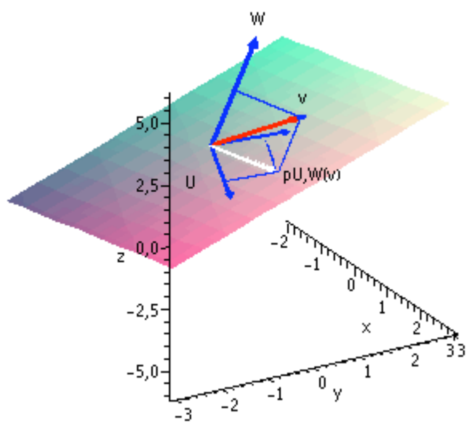

Figura 3.1: Proyección del vector v sobre U en la dirección de W

Código Sage 3.1: Aplicación proyección

```
#Variables de entrada
Q=matrix(QQ, [[1,1,1],[2,-1,0],[0,1,4]]).transpose()
v=vector([2,1/2,8/3])
#Matriz de cambio de base a espacio V
P=Q**-1
#Definicion de la aplicacion
var(x,y,z)
v1=P*vector([x,y,z])
v1[2]=0
puw=Q*v1
#Imagen del vector v
puw.subs(x=v[0],y=v[1],z=v[2])
```

Evaluar en SageMathCell

8. $$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{P}_3(x) & \to & \mathbb{R}^3 \\ p(x)=a+bx+cx^2+dx^3 & \rightsquigarrow & f(p(x))=(a+b,b+c,2c+3d) \end{array}$$

9. $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{P}_3(x) & \rightarrow & \mathbb{P}_3(x) \\ p(x) & \rightsquigarrow & f(p(x)) = p(x) + p'(x) \end{array}$

   Veamos que es aplicación lineal, demostrando las dos propiedades de la definición:

   i) Sean $v_1 = p(x)$ y $v_2 = q(x) \in \mathbb{P}_3(x)$ entonces:

   $f(v_1+v_2) = f(p(x)+q(x)) = (p(x)+q(x))+(p(x)+q(x))' = p(x)+p'(x)+q(x)+q'(x) =$
   $= f(p(x)) + f(q(x)) = f(v_1) + f(v_2)$

   ii) Sean $v = p(x) \in \mathbb{P}_3(x)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ entonces

   $f(\lambda v) = f(\lambda p(x)) = \lambda p(x) + (\lambda p(x))' = \lambda p(x) + \lambda p'(x) = \lambda(p(x) + p'(x)) = \lambda f(v)$

Ejemplo 3.2 *Calcular la imagen y antiimagen de algunos vectores. ¿Siempre existen?.*

• La imagen del vector $v = (1, 2, 3)$ por la aplicación $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \rightsquigarrow & f(x,y,z) = (x+y, y-z) \end{array}$
será $f(1, 2, 3) = (1 + 2, 2 - 3) = (3, -1)$.

La antiimagen del vector $w = (5, 6)$ será $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $f(v) = w \Rightarrow (x+y, y-z) = (5, 6) \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} x+y & = 5 \\ y-z & = 6 \end{array}\right.$ sistema compatible indeterminado, luego la antiimagen de w no es única y serán todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ de la forma $(5 - y, y, y - 6)$.

• La imagen del vector $v = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ por la aplicación

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} & \rightsquigarrow & f\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = (x+y, y-z, 2z+3t) \end{array}$$

será $f\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right] = (1 + 2, 2 - 3, 6 + 12) = (3, -1, 18)$

La antiimagen del vector $w = (-1, 2, 7)$ será $v = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ tal que

$f(v) = w \Rightarrow (x+y, y-z, 2z+3t) = (-1, 2, 7) \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} x+y & = -1 \\ y-z & = 2 \\ 2z+3t = 7 & \end{array}\right.$ sistema compatible indeterminado, luego la antiimagen de w no es única y serán todos los vectores de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ de la forma $\begin{pmatrix} x & -1-x \\ -3-x & \dfrac{13+2x}{3} \end{pmatrix}$

• La antiimagen de un vector , no siempre está definida.
Por ejemplo dado el homomorfismo $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \rightsquigarrow & f(x,y) = (x+y, x-y, x) \end{array}$
el vector $w = (0, 0, 1)$ no admite antiimagen porque si existiera $v = (x, y)$ tal que $f(v) = w \Rightarrow (x + y, x - y, x) = (0, 0, 1)$ y este sistema no tiene solución.

Propiedades 3.1 *Dada* $f : V \rightarrow W$ *una* aplicación lineal *se cumple:*

1. $f(0_V) = 0_W$ y $f(-v) = -f(v) \quad \forall\, v \in V$

2. $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \ldots + \lambda_n f(v_n)$ para $v_1, \ldots, v_n \in V$. En particular, una aplicación queda univocamente determinada conociendo la imagen de los vectores de una base cualquiera de V.
3. Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ son l.d. entonces $\{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)\}$ también lo son.
4. $f(\langle v_1, v_2, \ldots, v_n\rangle) = \langle f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)\rangle$
5. Si S es subespacio vectorial de V entonces $f(S)$ es subespacio vectorial de W. De particular interes, es cuando $S = V$, la imagen de la aplicación, ver el siguiente párrafo.
6. Si T es subespacio vectorial de W entonces $f^{-1}(T)$ es subespacio vectorial de V. De particular interes, es cuando $T = \{0\}$, el núcleo de la aplicación, ver el siguiente párrafo.

Ejemplo 3.3 *Sean* $S = \langle (1,1,0), (0,1,1)\rangle$ *y* $T = \langle (0,1,0), (1,0,0)\rangle$ Calcula las imágenes de S , T , $S+T$ y $S \bigcap T$ por la aplicación $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \rightsquigarrow & f(x,y,z) = (x+y, y+z, x-z) \end{array}$

Resolución: • $S = \langle \underbrace{(1,1,0)}_{s_1}, \underbrace{(0,1,1)}_{s_2} \rangle \Rightarrow f(S) = \langle f(1,1,0), f(0,1,1)\rangle = \langle (2,1,1), (1,2,-1)\rangle$

• $T = \langle \underbrace{(0,1,0)}_{t_1}, \underbrace{(1,0,0)}_{t_2} \rangle \Rightarrow f(T) = \langle f(0,1,0), f(1,0,0)\rangle = \langle (1,1,0), (1,0,1)\rangle$

• $S+T = \langle (1,1,0), (0,1,1), (0,1,0), (1,0,0)\rangle \overset{s_1 = t_1 + t_2}{=} \langle (0,1,1), (0,1,0), (1,0,0)\rangle \Rightarrow$
$\Rightarrow f(S+T) = \langle f(0,1,1), f(0,1,0), f(1,0,0)\rangle = \langle (1,2,-1)(1,1,0), (1,0,1)\rangle \overset{1^0+3^0=2(2)}{=}$
$= \langle (1,1,0), (1,0,1)\rangle$

• Como $\underbrace{s_1}_{\in S} = \underbrace{t_1 + t_2}_{\in T} \in S \bigcap T \Rightarrow S \bigcap T = \langle (1,1,0)\rangle \Rightarrow f(S \bigcap T) = \langle f(1,1,0)\rangle =$
$= \langle (2,1,1)\rangle$.

3.2. Núcleo e imagen de un homomorfismo. Clasificación de homomorfismos.

Sea $f \in Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$

Definición 3.2 *Se llama núcleo o Ker de f al conjunto de vectores del espacio inicial cuya imagen es el vector nulo del espacio final*

$$Ker(f) = \{v \in V / f(v) = 0_W\}$$

Definición 3.3 *Se llama imagen de f al conjunto de todos los vectores del espacio final que son imagen de algún vector del espacio inicial*

$$Im(f) = \{f(v) / v \in V\}$$

Definición 3.4 *El rango de un homomorfismo* es la dimensión del subespacio imagen de f: rango(f) =dim$Im(f)$. Además coincide con el rango de cualquier matriz asociada a f.

Propiedades 3.2 *Sea* $f \in Hom_{\mathbb{K}}(V,W)$

a) $Ker(f)$ es un subespacio vectorial de V.

b) $Im(f)$ es un subespacio vectorial de W.

c) $\mathrm{Im}(f) = \langle f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)\rangle$ siendo $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V.

d) dim $Ker(f)$+ dim $Im(f)$ =dim V.

Ejemplo 3.4 *Determina el núcleo y la imagen de los siguientes homorfismos*

a) Sea $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \rightsquigarrow & f(x,y,z) = (x+y, y-z, x+z) \end{array}$.

Más adelante, asociaremos al homomorfismo f (con respecto a las bases canónicas) la matriz $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) Sea $f \in Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ cuya matriz asociada en las bases canónicas es $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{array}{rcl} g:\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \\ (x,y,z) & \rightsquigarrow & g(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y & y-x \\ x-z & y \end{pmatrix} \end{array}$

Resolución *a)* $\mathrm{Ker}(f) = \{v \in \mathbb{R}^3 / f(v) = 0_{\mathbb{R}^3}\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / f(x,y,z) = (0,0,0)\} =$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{array}{rl} x+y & = 0 \\ y-z & = 0 \\ y+z & = 0 \end{array} \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{array}{rl} x+y & = 0 \\ y-z & = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= \{(-y,y,y) \in \mathbb{R}^3 / y \in \mathbb{R}\} = \left\langle \underbrace{(-1,1,1)}_{Base del Ker f} \right\rangle \quad \text{y por tanto dim} ker(f) = 1$$

$\mathrm{Im}(f) = \langle f(v_1), f(v_2), f(v_3)\rangle$ siendo $\{v_1, v_2, v_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$

$\mathrm{Im}(f) = \langle f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\rangle = \langle (1,0,1),(1,1,0),(0,-1,1)\rangle = \langle (1,0,1),(1,1,0)\rangle$

Observar que como dim $Ker(f)$+ dim$Im(f)$ =dim $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ dim $Im(f) = 2$

Resolución *b)* $\mathrm{Ker}(f) = \{v \in \mathbb{R}^3 / f(v) = 0_{\mathbb{R}^2}\} = \{v \in \mathbb{R}^3 / Av = 0_{\mathbb{R}^2}\} =$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{array}{rl} x+y & = 0 \\ y+z & = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= \{(-y,y,-y) \in \mathbb{R}^3 / y \in \mathbb{R}\} = \left\langle \underbrace{(-1,1,-1)}_{Base del Ker f} \right\rangle \quad \text{y por tanto dim} ker(f) = 1$$

$\mathrm{Im}(f) = \langle f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\rangle = \langle (1,0),(1,1),(0,1)\rangle = \langle (1,0),(1,1)\rangle$ Observar que como dim $Ker(f)$+ dim$Im(f)$ =dim $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ dim $Im(f) = 2 = \dim\mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.

Resolución *c)* $\mathrm{Ker}(g) = \{v \in \mathbb{R}^3 / g(v) = 0_{\mathbb{M}_2(\mathbb{R})}\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} =$

$$\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{pmatrix} x+y & y-x \\ x-z & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \{(0,0,0)\} = \mathrm{O}$$

Como dim $Ker(f)$+ dim $Im(f)$ =dim $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ dim $Im(f) = 3$

$$\mathrm{Im}(f) = \langle f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Clasificación de homomorfismos

Monomorfismo es un homomorfismo inyectivo.

Epimorfismo es un homomorfismo suprayectivo.

Isomorfismo es un homomorfismo biyectivo.

Propiedades 3.3 *Sea* $f \in Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$

a) f es monomorfismo $\Leftrightarrow$ Ker$(f) = 0_V$.

b) f es epimorfismo $\Leftrightarrow$ Im$(f) = W \Leftrightarrow$ dim $Im(f)$ =dim W.

c) f es monomorfismo $\Leftrightarrow$ transforma sistema libre en sistema libre.

d) Si $f \in End(V)$, entonces f es monomorfismo $\Leftrightarrow$ f es epimorfismo.

Ejemplo 3.5 *En los homomorfismos del ejemplo anterior se cumple*

a) No es inyectivo porque Ker$(f) \neq \{0\}$
No es suprayectivo porque dim $Im(f) \neq$ dim $\mathbb{R}^3$

b) No es inyectivo porque Ker$(f) \neq \{0\}$
Es suprayectivo porque dim $Im(f) =$ dim $\mathbb{R}^2$

c) Es inyectivo porque Ker$(g) = \{0\}$
No es suprayectivo porque dim $Im(g) \neq$ dim $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$

3.3. Operaciones con aplicaciones lineales

Suma de homomorfismos Sean $f, g \in Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$ se define la suma $f + g$ como

$$\begin{array}{rcl} f+g : V & \rightarrow & W \\ v & \rightsquigarrow & (f+g)(v) = f(v) + g(v) \end{array}$$

Producto por escalar Sean $f \in Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ se define el producto $\lambda \cdot f$ como

$$\begin{array}{rcl} \lambda \cdot f : V & \rightarrow & W \\ v & \rightsquigarrow & (\lambda f)(v) = \lambda f(v) \end{array}$$

Composición Sean $f \in Hom_{\mathbb{K}}(V, W), g \in Hom_{\mathbb{K}}(W, U)$ se define la composición $g \circ f$ como

$$\begin{array}{rcl} g \circ f : V & \rightarrow & U \\ v & \rightsquigarrow & (g \circ f)(v) = g(f(v)) \end{array}$$

Teorema 3.1 a) $(Hom_{\mathbb{K}}(V, W), +, \cdot_{\lambda})$ es un $\mathbb{K}-$ espacio vectorial.

b) $(End_{\mathbb{K}}(V), +, \circ)$ es un anillo unitario no conmutativo.

3.4. Matriz asociada a una aplicación lineal

Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal y sean $\mathcal{B}_V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $\mathcal{B}_W = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ bases de V y W respectivamente. Entonces f queda determinada por $\{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)\}$ y además cada $f(v_i)$ queda determinada por sus coordenadas en W.

$$\begin{array}{rcl} f : V \to & W & \\ v_1 \rightsquigarrow & f(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m \\ v_2 \rightsquigarrow & f(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m \\ v_3 \rightsquigarrow & f(v_3) = a_{13}w_1 + a_{23}w_2 + \cdots + a_{m3}w_m \\ \vdots \ \vdots & \vdots & \\ v_n \rightsquigarrow & f(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m \end{array}$$

Así si $v = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n$, podemos expresar $f(v)$ matricialmente

$$f(v) = AX \Rightarrow f(v) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

La matriz anterior es la matriz asociada al homomorfismo f respecto de las bases $\mathcal{B}_V$ y $\mathcal{B}_W$.

Observación: Resumiendo lo anterior, para hallar la matriz de una aplicación lineal respecto a unas bases, hay que seguir tres pasos:

Paso 1 Se calculan las imágenes de los vectores de la base del espacio inicial.

Paso 2 Estas imágenes se escriben como combinación lineal de los vectores de la base del espacio final.

Paso 3 Las coordenadas obtenidas son las columnas de la matriz asociada a la aplicación lineal.

Ejemplo 3.6 Sea $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \rightsquigarrow & f(x, y, z) = (x + y, y - z, x + z) \end{array}$

a) Calcula matriz A asociada a f respecto a las bases $\mathfrak{B}_1 = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ y $\mathfrak{B}_2 = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$.

b) Calcula matriz B asociada a f respecto a la base $\mathfrak{B}_1 = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$.

c) Calcula matriz C asociada a f respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Escribe la ecuación matricial de f.

Resolución a)

$$f(1, 1, 1) \overset{Paso1}{=} (2, 0, 2) \overset{Paso2}{=} \alpha_1(0, 1, 1) + \alpha_2(1, 0, 1) + \alpha_3(1, 1, 0) \Rightarrow \alpha_1 = 0; \alpha_2 = 2; \alpha_3 = 0$$
$$f(1, 1, 0) \overset{Paso1}{=} (2, 1, 1) \overset{Paso2}{=} \beta_1(0, 1, 1) + \beta_2(1, 0, 1) + \beta_3(1, 1, 0) \Rightarrow \beta_1 = 0; \beta_2 = 1; \beta_3 = 1$$
$$f(1, 0, 0) \overset{Paso1}{=} (1, 0, 1) \overset{Paso2}{=} \gamma_1(0, 1, 1) + \gamma_2(1, 0, 1) + \gamma_3(1, 1, 0) \Rightarrow \gamma_1 = 0; \gamma_2 = 1; \gamma_3 = 0$$

Por tanto la matriz es $A_f \overset{Paso3}{=} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Resolución b) Observar que al indicarse sólo una base , ésta debe ser tomada como base del espacio inicial y del espacio final.

$$f(1,1,1) \overset{Paso1}{=} (2,0,2) \overset{Paso2}{=} \alpha_1(1,1,1)+\alpha_2(1,1,0)+\alpha_3(1,0,0) \Rightarrow \alpha_1 = 2; \alpha_2 = -2; \alpha_3 = 2$$
$$f(1,1,0) \overset{Paso1}{=} (2,1,1) \overset{Paso2}{=} \beta_1(1,1,1)+\beta_2(1,1,0)+\beta_3(1,0,0) \Rightarrow \beta_1 = 1; \beta_2 = 0; \beta_3 = 1$$
$$f(1,0,0) \overset{Paso1}{=} (1,0,1) \overset{Paso2}{=} \gamma_1(1,1,1)+\gamma_2(1,1,0)+\gamma_3(1,0,0) \Rightarrow \gamma_1 = 1; \gamma_2 = -1; \gamma_3 = 1$$

Por tanto la matriz es $B_f \overset{Paso3}{=} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Resolución c) Observar que en la base canónica el vector siempre coincide con sus coordenadas en esa base.

$$f(1,0,0) \overset{Paso1}{\overset{Paso2}{=}} (1,0,1)$$
$$f(0,1,0) \overset{Paso1}{\overset{Paso2}{=}} (1,1,0) \qquad \overset{Paso3}{\Rightarrow} C_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$f(0,0,1) \overset{Paso1}{\overset{Paso2}{=}} (0,-1,1)$$

Código Sage 3.2: Matriz de aplicacion lineal respecto distintas bases

```
#Variables de entrada
F1=matrix(QQ,[[1,1,0],[0,1,-1],[1,0,1]])
# Nota: B1,B2 son matrices simetricas
B1=matrix(QQ,[[1,1,1],[1,1,0],[1,0,0]])
B2=matrix(QQ,[[0,1,1],[1,0,1],[1,1,0]])
# Calcular el cambio de base a B2
Af=B2.solve_right(F1*B1)
# Calcular el cambio de base a B1
Bf=B1.solve_right(F1*B1)
# Calcular respecto a la base canonica
Cf=F1
```

Evaluar en SageMathCell

Ejemplo 3.7 Sea
$$\begin{array}{rcl} g:\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{M}_2(R) \\ (x,y,z) & \rightsquigarrow & g(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y & y-x \\ x-z & y \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Probar que g es un homomorfismo.

b) Calcula matriz A asociada a g respecto a las bases $\mathfrak{B}_1 = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ y $\mathfrak{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

c) Calcula matriz B asociada a g respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{M}_2(R)$.

Resolución b)

$$g(1,1,1) \overset{Paso1}{=} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{Paso2}{=} \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 1; \alpha_2 = -1; \alpha_3 = 0; \alpha_4 = 2$$

$$g(1,1,0) \overset{Paso1}{=} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{Paso2}{=} \beta_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta_1 = 1; \beta_2 = 0; \beta_3 = -1; \beta_4 = 2$$

$$g(1,0,0) \overset{Paso1}{=} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{Paso2}{=} \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma_1 = 0; \gamma_2 = 1; \gamma_3 = -2; \gamma_4 = 2$$

Por tanto la matriz es $A_g \overset{Paso3}{=} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Resolución c) Observar que en la base canónica el vector siempre coincide con sus coordenadas en esa base.

$$g(1,0,0) \overset{Paso1}{\overset{Paso2}{=}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g(0,1,0) \overset{Paso1}{\overset{Paso2}{=}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \overset{Paso3}{\Rightarrow} B_g = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g(0,0,1) \overset{Paso1}{\overset{Paso2}{=}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Observación 3.1 *Veremos más adelante que existe una relación sencilla entre las matrices asociadas a un homomorfismo en distintas bases.* Para un mismo homomorfismo existirán "muchas" matrices asociadas. Todas estas matrices son *equivalentes* entre sí y en particular tendrán el mismo rango.

Relación entre operaciones con homomorfismos y su matriz asociada

Propiedad 3.1 *Si A_f y A_g son las matrices asociadas a las aplicaciones lineales f y g respectivamente, respecto a unas bases $\mathcal{B}_V$ y $\mathcal{B}_W$, se cumple que la matriz asociada a la suma $f+g$, respecto a dichas bases, es $A_f + A_g$. Lo denotamos $A_{f+g} = A_f + A_g$.*

Propiedad 3.2 *Si A_f es la matriz asociada a f, respecto a unas bases $\mathcal{B}_V$ y $\mathcal{B}_W$, se cumple que la matriz asociada a la la aplicación λf , respecto a dichas bases, es λA_f. Lo denotamos $A_{\lambda f} = \lambda A_f$.*

Propiedad 3.3 *Si A_f y A_g son las matrices asociadas a las aplicaciones lineales f y g respectivamente, respecto a unas bases $\mathcal{B}_V$, $\mathcal{B}_W$ y $\mathcal{B}_U$, se cumple que la matriz asociada a la composición $g \circ f$, respecto a las bases $\mathcal{B}_V$ y $\mathcal{B}_U$, es $A_g \cdot A_f$. Lo denotamos $A_{g \circ f} = A_g \cdot A_f$.*

Ejemplo 3.8 Sean $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \rightsquigarrow & f(x,y,z) = (x+y, y-z, x+z) \end{array}$ y

$$\begin{array}{rcl} g:\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{M}_2(R) \\ (x,y,z) & \rightsquigarrow & g(x,y,z)=\begin{pmatrix} x+y & y-x \\ x-z & y \end{pmatrix} \end{array}$$

y consideremos las bases $\mathfrak{B}_1=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$
y $\mathfrak{B}_2=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
Vamos a calcular la matriz asociada a la composición gof respecto de $\mathfrak{B}_1$ y $\mathfrak{B}_2$.

Resolución: Esquemáticamente tenemos
$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\ f\ } & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\ g\ } & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \mathfrak{B}_1 & & \mathfrak{B}_1 & & \mathfrak{B}_2 \\ \uparrow & \text{———————} & gof & \text{———————} & \uparrow \end{array}$$

Por lo visto en el ejemplo 4 de la página 8, la matriz asociada a f es $B_f=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y

por lo visto en el ejemplo 5 de la página 9, la matriz asociada a g es $A_g=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

entonces la matriz de la composición gof será
$$A_{gof}=A_gB_f=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$
Recordar que la composición de funciones no es conmutativa, así que es imprescindible mantener el "orden"de la composición y por ende el "orden"en el producto de las matrices.

3.4.1. Formas de definir una aplicación lineal

Para definir una aplicación , de forma única, hay básicamente tres formas equivalentes de hacerlo:

Dando las ecuaciones que definen f

Dando la matriz asociada a f respecto a una base

Dando las imágenes por f de una base del espacio inicial

Ejemplo 3.9 *Dado el homomorfismo* $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \rightsquigarrow & f(x,y,z)=(x+y,y+z) \end{array}$ calculamos la matriz de f respecto de las bases canónicas.

Resolución:
$$\begin{array}{l} f(1,0,0)\overset{Paso1}{\overset{Paso2}{=}}(1,0) \\ f(0,1,0)\overset{Paso1}{\overset{Paso2}{=}}(1,1) \\ f(0,0,1)\overset{Paso1}{\overset{Paso2}{=}}(0,1) \end{array}\quad\overset{Paso3}{\Rightarrow} A_f=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.10 *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ un homomorfismo cuya matriz en la base canónica es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, escribe las ecuaciones que definen a f

Resolución: $f(x) = Ax = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ x+y \\ 2x+3y \end{pmatrix}$

Generalmente escribiremos $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \rightsquigarrow & f(x,y) = (x+2y, x+y, 2x+3y) \end{array}$

Ejemplo 3.11 *Sea* $f \in End(\mathbb{R}^3)$ tal que $f(1,1,1) = (2,2,1)$, $f(1,1,0) = (1,2,1)$ y $f(1,0,0) = (1,0,1)$. Razona si f está bien determinada con los datos dados, escribe la matriz asociada a f en la base canónica y las ecuaciones que definen a f.

Resolución: Los vectores $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$ al ser tres vectores, en un espacio de dimensión tres , linealmente independientes. Por tanto f está bien definida.
Para calcular la matriz de f en la base canónica , calculamos previamente las coordenadas de los vectores canónicos en la base dada

$(1,0,0) = \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,1,0) + \alpha_3(1,0,0) \Rightarrow \alpha_1 = 0; \alpha_2 = 0; \alpha_3 = 1$
$(0,1,0) = \beta_1(1,1,1) + \beta_2(1,1,0) + \beta_3(1,0,0) \Rightarrow \beta_1 = 0; \beta_2 = 1; \beta_3 = -1$
$(0,0,1) = \gamma_1(1,1,1) + \gamma_2(1,1,0) + \gamma_3(1,0,0) \Rightarrow \gamma_1 = 1; \gamma_2 = -1; \gamma_3 = 0$
Entonces

$f(1,0,0) = \alpha_1 f(1,1,1) + \alpha_2 f(1,1,0) + \alpha_3 f(1,0,0) = \alpha_1(2,2,1) + \alpha_2(1,2,1) + \alpha_3(1,0,1) =$
$= (1,0,1)$
$f(0,1,0) = \beta_1 f(1,1,1) + \beta_2 f(1,1,0) + \beta_3 f(1,0,0) = \beta_1(2,2,1) + \beta_2(1,2,1) + \beta_3(1,0,1) =$
$= (0,2,0)$
$f(0,0,1) = \gamma_1 f(1,1,1) + \gamma_2 f(1,1,0) + \gamma_3 f(1,0,0) = \gamma_1(2,2,1) + \gamma_2(1,2,1) + \gamma_3(1,0,1) =$
$= (1,0,0)$

Luego la matriz en la base canónica es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y las ecuaciones de f

$$f(x) = Ax = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ x+y \\ z \end{pmatrix}$$

Generalmente escribiremos $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \rightsquigarrow & f(x,y,z) = (x+z, x+y, z) \end{array}$

3.5. Matrices de un homomorfismo asociadas a un cambio de bases

Sea $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)$ y sea A la matriz asociada a f respecto a unas bases $\mathfrak{B}_V = \{a_i\}_{1 \le i \le m}$ y $\mathfrak{B}_W = \{b_j\}_{1 \le j \le n}$ de V y W respectivamente.

Consideremos dos nuevas bases $\overline{\mathfrak{B}}_V = \{\bar{a}_i\}_{1\leq i\leq m}$ y $\overline{\mathfrak{B}}_W = \{\bar{b}_j\}_{1\leq j\leq n}$ de V y W respectivamente y sea B la matriz asociada a f respecto a estas bases.

Vamos a ver qué relación existe entre las matrices A y B.

$$\begin{tikzcd}
\underset{\mathfrak{B}_V=\{a_i\}_{i=1}^m}{V} \arrow[r, "A_f"] & \underset{\mathfrak{B}_W=\{b_j\}_{j=1}^n}{W} \arrow[d, "Q"] \\
\underset{\overline{\mathfrak{B}}_V=\{a_i\}_{i=1}^m}{V} \arrow[u, "P"] \arrow[r, "B_f"] & \underset{\overline{\mathfrak{B}}_W=\{b_j\}_{j=1}^n}{W}
\end{tikzcd}$$

En el diagrama adjunto, P representa la matriz del cambio de bases de $\overline{\mathfrak{B}}_V$ a $\mathfrak{B}_V$ en V .
Q representa la matriz del cambio de bases de $\mathfrak{B}_W$ a $\overline{\mathfrak{B}}_W$ en W.
Así , las columnas de P son las coordenadas de los vectores de $\overline{\mathfrak{B}}_V$ respecto a la base $\mathfrak{B}_V$.
Las columnas de Q son las coordenadas de los vectores de $\mathfrak{B}_W$ respecto a la base $\overline{\mathfrak{B}}_W$.

Se puede demostrar que entonces se cumple: $B_f = QA_fP$.

Las matrices A_f y B_f son matrices *equivalentes.*

Ejemplo 3.12 *Sea* $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \rightsquigarrow & f(x,y) = (x+y, x-y, y) \end{array}$
Consideramos en $\mathbb{R}^2$ *las bases* $\mathfrak{B}_2 = \{(1,1),(1,0)\}$ *y* $\mathfrak{B}_2' = \{(1,2),(-1,1)\}$
En $\mathbb{R}^3$ *las bases* $\mathfrak{B}_3 = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ *y* $\mathfrak{B'}_3 = \{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$
Resolución:

$$\begin{tikzcd}
\underset{\mathfrak{B}_2=\{(1,1)\ (1,0)\}}{\mathbb{R}^2} \arrow[r, "A_f"] & \underset{\mathfrak{B}_3=\{(1,1,1,)\ (1,1,0)\ (1,0,0)\}}{\mathbb{R}^3} \arrow[d, "Q"] \\
\underset{\mathfrak{B'}_2=\{(1,2)\ (-1,1)\}}{\mathbb{R}^2} \arrow[u, "P"] \arrow[r, "B_f"] & \underset{\mathfrak{B'}_3=\{(0,1,1,)\ (1,0,1)\ (1,1,0)\}}{\mathbb{R}^3}
\end{tikzcd}$$

Matriz A_f de f en las bases $\mathfrak{B}_2$ y $\mathfrak{B}_3$: Se calculan las imágenes de $\mathfrak{B}_2$ y se escriben como combinación lineal de $\mathfrak{B}_3$. Las coordenadas obtenidas forman las columnas de A_f.
$f(1,1) = (2,0,1) = \alpha_1(1,1,1) + \beta_1(1,1,0) + \gamma_1(1,0,0) \Rightarrow \{\alpha_1 = 1; \beta_1 = -1; \gamma_1 = 2$
$f(1,0) = (1,1,0) = \alpha_2(1,1,1) + \beta_2(1,1,0) + \gamma_2(1,0,0) \Rightarrow \{\alpha_2 = 0; \beta_2 = 1; \gamma_2 = 0$

Matriz P del cambio de bases de $\mathfrak{B'}_2$ a $\mathfrak{B}_2$: Se escriben los vectores de $\mathfrak{B'}_2$ en combinación lineal de $\mathfrak{B}_2$. Las coordenadas obtenidas son las columnas de P.

Matriz Q del cambio de bases de $\mathfrak{B}_3$ a $\mathfrak{B'}_3$: Se escriben los vectores de $\mathfrak{B}_3$ en combinación lineal de $\mathfrak{B'}_3$. Las coordenadas obtenidas son las columnas de Q.

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Matriz B_f de f en las bases $\mathfrak{B'}_2$ y $\mathfrak{B'}_3$: se cumplirá que

$$B_f = QA_fP = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ 3 & 3/2 \\ 0 & -3/2 \end{pmatrix}$$

Observación 3.2 *Comprobamos los cálculos determinando B_f directamente.* Para ello se calculan las imágenes de los vectores de $\mathfrak{B}'_2$ y se escriben como combinación lineal de $\mathfrak{B}'_3$. Las coordenadas obtenidas son las columnas de B_f.

$$f(1,2) = (3,-1,2) = \alpha_1(0,1,1) + \beta_1(1,0,1) + \gamma_1(1,1,0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -1 \\ \beta_1 = 3 \\ \gamma_1 = 0 \end{cases}$$

$$f(-1,1) = (0,-2,1) = \alpha_2(0,1,1) + \beta_2(1,0,1) + \gamma_2(1,1,0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = -1/2 \\ \beta_2 = 3/2 \\ \gamma_2 = -3/2 \end{cases}$$

Ejemplo 3.13 *Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$ y $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$* un homomorfismo cuya matriz en las bases $\mathcal{B} = \{e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2, e_1\}$ y canónica de $\mathbb{R}^3$ es $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Hallar la matriz A asociada a f en las bases canónicas.

Resolución: Consideremos el esquema siguiente:

$$\begin{array}{ccc} \underset{\textit{Base canónica}}{\mathbb{R}^3} & \xrightarrow{A} & \underset{\textit{Base canónica}}{\mathbb{R}^3} \\ \Big\downarrow P & & Q \Big\uparrow \\ \underset{\mathfrak{B}=\{(1,1,1)\ (1,1,0)\ (1,0,0)\}}{\mathbb{R}^3} & \xrightarrow{B} & \underset{\textit{Base canónica}}{\mathbb{R}^3} \end{array}$$

Se cumplirá que $A = QBP$

• *Cálculo de P*: Se escriben los vectores de la base "de salida", (base canónica), como combinación de la base "de llegada"(base $\mathcal{B}$). Las coordenadas obtenidas son las columnas de P

$(1,0,0) = \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,1,0) + \alpha_3(1,0,0) \Rightarrow \alpha_1 = 0; \alpha_2 = 0; \alpha_3 = 1$
$(0,1,0) = \beta_1(1,1,1) + \beta_2(1,1,0) + \beta_3(1,0,0) \Rightarrow \beta_1 = 0; \beta_2 = 1; \beta_3 = -1$
$(0,0,1) = \gamma_1(1,1,1) + \gamma_2(1,1,0) + \gamma_3(1,0,0) \Rightarrow \gamma_1 = 1; \gamma_2 = -1; \gamma_3 = 0$

Por tanto la matriz es $P = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

• *Cálculo de Q*: Se escriben los vectores de la base "de salida", (base canónica), como combinación de la base "de llegada"(base canónica). Las coordenadas obtenidas son las columnas de Q

Evidentemente $Q = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución : $A = QBP = BP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

3.6. Algunos homomorfismos particulares

Las propiedades de ciertos homomorfismos reflejan una situación geométrica concreta, si bien hay que ampliar el concepto de espacio vectorial , como se verá más adelante, al de *Espacio Afín* y *Espacio Euclídeo*, lo que conlleva introducir el concepto de *Sistema de Referencia* y el concepto de *Distancia*.

1.- Formas Lineales

Definición Una *forma lineal* es un homomorfismo de un K-espacio vectorial V al cuerpo K , es decir $f : V \to K$.

Si f es una forma lineal no nula, es trivial que dim(Im(f))=1, y por tanto Im(f) es una recta vectorial.

Definición Un subespacio vectorial $U \subseteq V$ es un hiperplano de V si $\dim(U) = \dim(V) - 1$

Observar que entonces $V = U \oplus L$ siendo L una recta vectorial y que además el núcleo de una forma lineal es siempre un hiperplano.

Ejemplo: El homomorfismo $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \rightsquigarrow & f(x,y,z) = x+2y+5z \end{array}$ es una forma lineal cuya matriz asociada en las bases canónicas es $M_f = (1\,2\,5)$. Evidentemente la $\dim \mathrm{Im}(f) = 1$ y $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$.

2.- Homotecias

Definición Una *homotecia* de razón λ es un endomorfismo definido como $\begin{array}{rcl} f:V & \to & V \\ v & \rightsquigarrow & f(v) = \lambda v \end{array}$

Podemos pensar en una relación que "alarga" o "encoge" los vectores, es decir define vectores proporcionales.
Las homotecias se caracterizan porque trasforman las rectas vectoriales en sí mismas.

Ejemplo: El homomorfismo $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \rightsquigarrow & f(x,y,z) = 3(x,y,z) \end{array}$ es una homotecia cuya matriz asociada en las bases canónicas es $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
Si tomamos, por ejemplo, la recta vectorial $L = \langle(1,2,3)\rangle$, se comprueba trivialmente $f(L) = L$.

3.- Proyectores o Proyecciones

Definición Sean U y W subespacios de V tales que $V = U \oplus W$. La aplicación de V en U tal que a cada vector $v = u + w$, con $u \in U$ y $w \in W$, le asocia el vector u es una aplicación lineal, llamada *proyección de V sobre U* (en la dirección de W) y lo representaremos por p_U.

$$\begin{array}{rcl} p_U : U \oplus W & \to & U \\ v = u + w & \rightsquigarrow & p_U(v) = u \end{array}$$

Análogamente se define la proyección de V sobre W.

$$\begin{array}{rcl} p_W : U \oplus W & \to & W \\ v = u + w & \rightsquigarrow & p_W(v) = w \end{array}$$

Ejemplo: Sean $U = \langle(1,1,1),(1,0,-1)\rangle$ y $W = \langle(1,0,1)\rangle$ subespacios de $\mathbb{R}^3$. Ambos son evidentemente suplementarios, es decir $\mathbb{R}^3 = U \bigoplus W$. Calculamos la matriz de la proyección sobre U asociada a la base canónica.

$\bullet(1,0,0) = \underbrace{0(1,1,1)+\frac{1}{2}(1,0,-1)}_{\in U} + \underbrace{\frac{1}{2}(1,0,1)}_{\in W} \Rightarrow p_U(1,0,0) = \underbrace{0(1,1,1)+\frac{1}{2}(1,0,-1)}_{\in U} =$
$(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2})$
$\bullet(0,1,0) = \underbrace{1(1,1,1)+0(1,0,-1)}_{\in U} + \underbrace{-1(1,0,1)}_{\in W} \Rightarrow p_U(0,1,0) = \underbrace{1(1,1,1)+0(1,0,-1)}_{\in U} =$
$(1,1,1)$
$\bullet(0,0,1) = \underbrace{0(1,1,1)+-\frac{1}{2}(1,0,-1)}_{\in U} + \underbrace{\frac{1}{2}(1,0,1)}_{\in W} \Rightarrow p_U(0,0,1) = \underbrace{0(1,1,1)+-\frac{1}{2}(1,0,-1)}_{\in U} =$
$(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$

$M_{p_U} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$

Análogamente la matriz de la proyección sobre W será

$\bullet(1,0,0) = \underbrace{0(1,1,1)+\frac{1}{2}(1,0,-1)}_{\in U} + \underbrace{\frac{1}{2}(1,0,1)}_{\in W} \Rightarrow p_W(1,0,0) = \underbrace{\frac{1}{2}(1,0,1)}_{\in W} = (\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$
$\bullet(0,1,0) = \underbrace{1(1,1,1)+0(1,0,-1)}_{\in U} + \underbrace{-1(1,0,1)}_{\in W} \Rightarrow p_W(0,1,0) = \underbrace{-1(1,0,1)}_{\in W} = (-1,0,-1)$
$\bullet(0,0,1) = \underbrace{0(1,1,1)+-\frac{1}{2}(1,0,-1)}_{\in U} + \underbrace{\frac{1}{2}(1,0,1)}_{\in W} \Rightarrow p_W(0,0,1) = \underbrace{\frac{1}{2}(1,0,1)}_{\in W} = (\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$

Entonces $\quad M_{p_U} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \quad$ y $\quad M_{p_W} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}$

Propiedades de las proyecciones

i) $p_U + p_W = I_V$**.** Observar que en ejemplo anterior $M_{p_U} + M_{p_W} = I_3$

ii) $p_U \, o \, p_W = p_W \, o \, p_U = 0$**.** Observar que en ejemplo anterior $M_{p_U}.M_{p_W} = 0$

iii) $p_U^2 = p_U$ y $p_U^2 = p_U$. Observar que en ejemplo anterior $M_{p_U}^2 = M_{p_U}$ y $M_{p_W}^2 = M_{p_W}$

4.- Simetrías

Definición Un endomorfismo $f \in$End(V) es *involutivo* si $f^2 \equiv fof = I_V$.

Observar que:

- Como $f^2 = I_V \Rightarrow f^2 - I_V = 0 \Rightarrow (I_V + f)(I_V - f) = 0$
- Un endomorfismo involutivo es inversible y además $f = f^{-1}$.
- Si M es la matriz asociada a f en las bases canónicas se tiene que $M^2 = I_d$ y por tanto $M = M^{-1}$.

Propiedad Sea $f \in$End(V) involutivo y sean $E_1 = Im(I_d + f)$ y $E_2 = Im(Id - f)$ entonces $V = E_1 \oplus E_2$

Ejemplo: Comprobemos la propiedad anterior con un ejemplo. Sea $f \in$End$(\mathbb{R}^3)$ cuya matriz asociada en las bases canónicas es $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.
Se puede comprobar que $A^2 = I_3$ y por tanto representa a un endomorfismo involutivo.
Las matrices asociadas a $I_d + f$ y a $I_d - f$ son respectivamente

$$M_{I+f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad N_{I-f} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -4 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Entonces:
$E_1 = Im(I_d + f) = \langle (1,4,3), (1,-2,-3), (-1,4,5) \rangle = \langle (1,4,3), (1,-2,-3) \rangle$

$E_2 = Im(I_d - f) = \langle (1,-4,-3), (-1,4,3), (1,-4,-3) \rangle = \langle (-1,4,3) \rangle$

Se comprueba fácilmente que $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$.

Definición: Con las notaciones anteriores, sea $f \in$ End(V) involutivo tal que $V = E_1 \oplus E_2$. Se define la *simetría vectorial* de E_1 en la dirección de E_2 (o paralela a E_2) al homomorfismo

$$\begin{array}{rcl} s : V = E_1 \oplus E_2 & \rightarrow & V \\ x = x_1 + x_2 & \rightsquigarrow & s(x) = x_1 - x_2 \end{array}$$

Ejemplo: Veamos cómo actúa la simetría asociada al endomorfismo involutivo anterior.

Tomemos un vector $x = (-1, 16, 9)$ entonces

$$x = \underbrace{1(1,4,3) + 2(1,-2,-3)}_{x_1 \in E_1} + \underbrace{4(-1,4,3)}_{x_2 \in E_2} \Rightarrow s(-1,16,9) = \underbrace{(3,0,-3)}_{x_1} - \underbrace{(-4,16,12)}_{x_2} = (7,-16,-15).$$

3.7. Ejercicios propuestos sobre aplicaciones lineales

1. Probar que las siguientes aplicaciones no son lineales

   a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (x^2, x, z - y)$;

   b) En un espacio vectorial V cualquiera fijemos un elemento $v_0 \neq 0$, y definamos $f : V \to V$ tal que $f(v) = v_0 + v$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que

   $$f(1, 0, 0) = (2, 1, 0),\ f(1, 1, 0) = (-1, 2, 3),\ f(1, 1, 1) = (0, 0, 1).$$

   ¿Hay una única aplicación lineal que verifique las condiciones dadas?. Justifique la respuesta. Si es afirmativa entonces hallar $f(3, 2, 1)$.

3. Determinar si existe algun homomorfismo $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ que satisfaga

   $$f(1) = (1, 0),\ f(1 + x) = (1, 1),\ f(1 + x + x^2) = (0, 0),\ f(3 + 2x + x^2) = (2, 1).$$

   En caso de que exista alguno hallarlos todos.

4. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Investigar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: si una aplicación

   $$T : V \to W$$

   satisface

   $$T(\lambda v_1 + v_2) = \lambda T(v_1) + T(v_2), \quad \forall\ \lambda \in \mathbb{K},\ v_1, v_2 \in V,$$

   entonces es lineal.

5. En los siguientes casos describir las aplicaciones lineales que cumplen las condiciones dadas, y determinar cuántas hay:

   a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

   $$f(1, 1, -1) = (2, 1, 0), \quad f(1, 2, 1) = (-1, 2, 3), \quad f(1, 0, -3) = (0, 0, 1);$$

   b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

   $$f(1, 1, -1) = (2, 1, 0), \quad f(1, 2, 1) = (-1, 2, 3), \quad f(1, 0, -3) = (5, 0, -3);$$

   c) $f : \mathbb{Z}_2^3 \to \mathbb{Z}_2^2$ tal que

   $$f(1, 1, 0) = (1, 0),\ f(0, 1, 1) = (0, 1),\ f(1, 0, 1) = (1, 1);$$

   d) $f : M^{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ tal que

   $$\begin{gathered} f(M_1) = (1, -1), \quad f(M_2) = (1, 1), \quad f(M_3) = (1, 1), \\ f(M_4) = (3, 1), \quad f(M_5) = (1, -3). \end{gathered}$$

   donde

   $$\begin{gathered} M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \\ M_4 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}. \end{gathered}$$

6. Se considera el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$, y se definen las siguientes aplicaciones f_i de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^3$. ¿Cuáles de ellas son lineales?

   a) $f_1(x, y, z, t) = (x, y, z) + (1, 2, 3)$
   b) $f_2(x, y, z, t) = (1, 2, 3)$
   c) $f_3(x, y, z, t) = (x, 2y, 3z) + (1, 2, 3)$
   d) $f_4(x, y, z, t) = (\operatorname{sen} x, \cos y, z + t)$
   e) $f_5(x, y, z, t) = (2x - y, 2y - z, 0)$
   f) $f_6(x, y, z, t) = (x + y, y + z, z + t)$

   Determinar el núcleo y la imagen de aquellas aplicaciones que hayan resultado ser lineales.

7. Se considera la transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que
$$f(x, y, z) = (x + 2y, y - z, x + 2z).$$

   a) Verificar que el vector $v = (3, 0, 3)$ pertenece a $\mathrm{Im}(f)$.
   b) Verificar que el vector $v = (2, -1, -1)$ pertenece a $\ker(f)$.

8. Se considera la aplicación lineal $f : M^{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M^{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que
$$f(M) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} M.$$

   a) Verificar que
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   pertenece a $\ker(f)$.
   b) Verificar que
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$
   pertenece a $\mathrm{Im}(f)$.

9. Consideremos el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos, y la aplicación $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que a cada número complejo le asigna su conjugado. Se pide averiguar si f es lineal considerando:

   a) $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial
   b) $\mathbb{C}$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial

   En los casos en que f sea lineal, hallar su núcleo y su imagen.

10. Determinar bases de los núcleos y las imágenes de las siguientes aplicaciones lineales definidas de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^4$:

    a) $f_1(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y, x + y + z)$
    b) $f_2(x, y, z) = (x - y, x + y, z, 0)$
    c) $f_3(x, y, z) = (2x, 3y, x - y, x + y + z)$

d) $f_4(x, y, z) = (0, x - y - z, y - x - z, z - x - y)$

11. Sea V el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes reales. Se considera la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to V$ tal que (para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$):

$$f(1,1,1) = 2b + aX \qquad f(0,-1,1) = aX + bX^3 \qquad f(0,0,1) = b + (a-1)X$$

a) Halla a y b para que f no sea inyectiva

b) Halla bases de $\ker(f)$ y de $\mathrm{Im}(f)$, en función de a y b.

c) Determina el subespacio $f(U)$, según a y b, siendo $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = y + z = 0\}$.

12. Dí, razonadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas ó no.

a) Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal. Si f no es inyectiva,$\mathrm{Im}(f)$ no es $\mathbb{R}^n$.

b) Existe alguna aplicación lineal f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ que no siendo inyectiva tiene como imagen todo $\mathbb{R}^2$.

c) Existe una aplicación lineal f de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ que tiene como imagen todo $\mathbb{R}^3$.

d) Si $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es aplicación lineal, entonces $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$ o $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$.

e) Si f es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, $dim(Ker(f)) = n-1$ o f es la aplicación nula.

f) Si f es un endomorfismo de V tal que $Ker(f) = Im(f)$, $dim(V)$ es un número par.

13. Construye, si es posible, una aplicación lineal con las condiciones pedidas en cada uno de los casos siguientes:

a) una aplicación lineal inyectiva de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^3$.

b) una aplicación lineal sobreyectiva de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^3$.

c) una aplicación lineal de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^5$ tal que su rango sea 5.

d) una aplicación lineal f de $\mathbb{R}^5$ en $\mathbb{R}^4$ tal que $\dim \ker(f) = 3$.

14. Da un ejemplo, en cada uno de los casos siguientes, de una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ verificando:

a) $Ker(f) \cap Im(f) \neq \{\vec{0}\}$

b) $Ker(f) \subset Im(f)$

c) $Im(f) \subset Ker(f)$

15. Sean U y W dos subespacios no nulos de $\mathbb{R}^5$ tales que $U \oplus W = \mathbb{R}^5$.

a) Determina todos los posibles valores de $\dim U$ para que pueda existir una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ tal que $Ker(f) = U$.

b) Determina todos los posibles valores de $\dim U$ para que pueda existir una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$ tal que $Im(f) = U$.

16. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ y $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dos aplicaciones lineales.

a) Demuestra que $Ker(f) \subset Ker(g \circ f)$.

b) Demuestra que si g es sobreyectiva, entonces $Im(f) \subset Im(f \circ g)$.

c) Supongamos que f y g verifican las siguientes condiciones:

   i) $\dim Ker(g \circ f) = 1$

   ii) $\dim Im(f \circ g) = 2$

   iii) g es sobreyectiva.

   Deduce que en ese caso

   · f no es inyectiva y $Ker(f) = Ker(g \circ f)$.

   · $Im(f) = Im(f \circ g)$.

17. Sea $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por $f(x, y, z, t) = (x + y + 2z, 2x - t, 0)$.

    a) Escribe la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas.

    b) Determina bases de $\ker(f)$, $\mathrm{Im}(f)$. ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobre?

18. Se considera la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que respecto las bases canónicas tiene por matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

    a) Halla bases de $\ker(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ y obtén las coordenadas del vector $(1, 0, 2)$ respecto a una base de $\mathbb{R}^3$ que contenga a la base del $\ker f$ obtenida.

    b) Sean $B = \{(-1, 0, 0), (1, 0, 2), (-1, 2, 0)\}$, y $B' = \{(-1, 1), (-1, 2)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente. Determina la matriz asociada a f respecto de estas nuevas bases.

    c) Halla la matriz de f respecto a las bases $C = \{(1, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ y $C' = \{f(1, 1, 1),\ f(0, 1, 0)\}$.

    d) Halla matrices inversibles P y Q con $P \in M_2(\mathbb{R})$ y $Q \in M_3(\mathbb{R})$ tales que

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

    donde $r = \dim(\mathrm{Im} f)$.

19. En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios siguientes:

$$U = \{(x, y, z, t)/x + y + z + t = 0\}, \quad W = \{(x, y, z, t)/x - y = 0, z - t = 0\}$$

    y sea $f : U \to W$ la aplicación lineal definida por

$$f(x, y, z, t) = (x - 3y + z, x - 3y + z, y + 2z - t, y + 2z - t).$$

    a) Determina bases de U y de W.

    b) Determina la matriz M asociada a f respecto de las bases halladas en el apartado anterior. ¿De qué tamaño es dicha matriz?

    c) Halla bases de $Ker(f)$ y de $Im(f)$.

d) Determina matrices P y Q regulares tales que

$$QMP = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

donde I_r es la matriz identidad $r \times r$ y r es el rango de f.

20. Sea
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} & \rightsquigarrow & f\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = (x-z, y-t, x+t) \end{array}$$
y sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ el homomorfismo definido por $\left\{ \begin{array}{l} g(1,0,0) = (1,0) \\ g(1,1,0) = (1,1) \\ g(1,1,1) = (2,1) \end{array} \right\}$

Se pide

a) Probar que f es una aplicación lineal.

b) Matriz A_f asociada a f respecto de las bases canónicas.

c) Matriz B asociada a f respecto de las bases
$\mathfrak{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ de V y

$\mathfrak{B}_2 = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$

d) Matrices regulares P y Q tales que $B = QAP$.

e) El núcleo e imagen de f. ¿Qué tipo de aplicación es?.

f) La imagen del vector $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ y la antiimagen del vector $(1,2,3) \in \mathbb{R}^3$.

g) La matriz A_g asociada al homomorfismo g, respecto de la bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^3$. Escribe las ecuaciones que definen el homomorfismo g. Clasifica este homomorfismo.

h) Las matrices, respecto de las bases canónicas, de las aplicaciones $3f$ y $g \circ f$.

21. Sea $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo definido por

$$f(\vec{e}_2 - \vec{e}_3) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \ ; \ f(\vec{e}_1 - \vec{e}_3) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \ ; \ f(\vec{e}_2 + \vec{e}_3) = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$$

Calcula la matriz asociada a f en dicha base, el $\text{Ker}(f)$ y la $\text{Im}(f)$.

22. Se consideran los siguientes endomorfismos de $V = \mathbb{R}^2$.

- $f(x,y) = (-2x, -2y)$
- $g(x,y) = ((cos\frac{\pi}{6})x - (sen\frac{\pi}{6})y, (sen\frac{\pi}{6})x + (cos\frac{\pi}{6})y)$
- $h(x,y) = (y,x)$

a) Determina la matriz asociada a cada una de las aplicaciones anteriores respecto de las bases canónicas en el espacio inicial y en el espacio final.

b) Sea $T = \{(x,y) \in V \quad \text{tal que} \quad 0 \leq x, 0 \leq y, x+y \leq 1\}$.

1) Demuestra que T no es un subespacio vectorial de V.

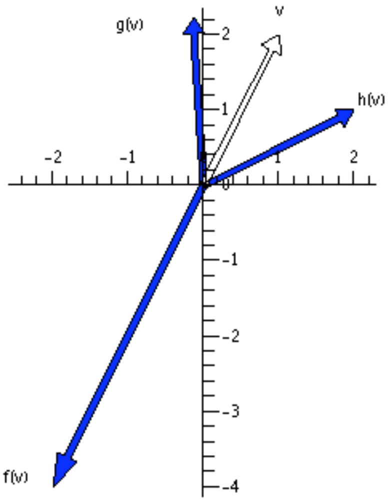

Figura 3.2: Vector $v = (1, 2)$ y transformados de v por f, g y h

2) Representa gráficamente el conjunto T, y el transformado de T por cadauna de las aplicaciones anteriores.
3) ¿Conoces el nombre de las transformaciones anteriores?.

23. Sean $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$; $\vec{v}_2 = (2, 0, 0)$; $\vec{v}_3 = (-1, 1, 1)$ y $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ verificando que $f(\vec{v}_1) = f(\vec{v}_2) = 2v_1$ y $\vec{v}_3 \in \text{Ker}(f)$. Halla la matriz de f en la base canónica.

24. Sea $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \rightsquigarrow & f(x, y, z) = (ax + y + z, 2x + ay, 2x + az) \end{array}$

 a) Estudia para qué valores de a, f es un endomorfismo inyectivo. Halla, según los valores de a, el núcleo y la imagen de f. Para $a = 1$
 b) Halla la matriz A_f, asociada a f, respecto de la base canónica.
 c) Halla la matriz B_f, asociada a f, respecto de la base $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$.
 d) Halla matrices regulares P y Q tales que $B_f = PA_fQ$.

25. Sea $f \in \text{End}(\mathbb{R}^4)$ verificando que

 I) $\ker(f) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \, / \, \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ t = 0 \end{array} \right\}$
 II) $f(1, 1, 1, 0) = (1, 1, 1, 0)$
 III) $f(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 1)$

 a) Calcula la matriz asociada f en la base canónica.
 b) Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$

$$S = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \, / \, \begin{array}{l} x + y + z - t = 0 \\ x - y + 2t = 0 \end{array} \right\} \ ; \ T = \langle (1, 1, 0, 1), (5, 3, -3, 1), (4, 2, -3, 0) \rangle$$

 Calcula $f(S) + f(T)$ y $f(S) \bigcap f(T)$.

26. Sean

$E_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 / x-y-z=0\}, E_2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 / -x-y+z=0\}, E_3 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 / -x+y-z=0\}$

subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ y sea $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ verificando:

I) $f(u) = u \quad \forall u \in E_1 \bigcap E_2$

II) $f(v) = 2v \quad \forall v \in E_1 \bigcap E_3$

III) $(0,1,1) \in \mathrm{Ker}(f)$. Se pide:

a) Matriz A de f en la base canónica.

b) ¿Son $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ subespacios suplementarios?.

27. Sean en $\mathbb{R}^4$ los vectores $v_1 = (1,1,0,0), v_2 = (0,1,0,1), v_3 = (0,0,0,1), v_4 = (0,0,1,1), v_5 = (1,0,1,0), v_6 = (1,0,0,0)$.
Sea $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ definida por $f(v_1) = v_4, f(v_2) = v_5, f(v_3) = v_6, f(v_4) = v_1$.

a) ¿Por qué está bien definida f?

b) Matriz A asociada a f en la base canónica.

c) Matriz B asociada a f en la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

d) Matrices regulares P y Q tales que $PAQ = B$.

28. Sea $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ verificando:

- el núcleo de f está generado por los vectores $(1,-1,0,0)$ y $(0,-2,1,0)$
- el núcleo del endomorfismo $(f - 2I)$ es un subespacio cuyas ecuaciones implícitas vienen definidas por: $\left\{ \begin{array}{l} -x+y+2z+t=0 \\ 2y+t=0 \\ x+y+t=0 \\ y+z+t=0 \end{array} \right.$
- la imagen del vector $(0,0,1,0)$ es el vector $(2,0,2,0)$

Determina la matriz del endomorfismo respecto a la base canónica.

29. Sea $S = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \Bigg/ \begin{array}{l} x-y+z=0 \\ 2x+3y+t=0 \\ x+4y-z+t=0 \end{array} \right\}$ y $T = \langle(-1,1,2,-1),(0,1,0,1)\rangle$ subespacios de $\mathbb{R}^4$.

a) Calcula bases de S, T , $S+T$ y $S \bigcap T$.

b) Calcula un subespacio S' suplementario de S.

c) Sea $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ dado por $f(x,y,z,t) = (y, -\frac{z+2t}{5}), -\frac{3z+t}{5}, -\frac{z-8t}{5})$. Encontrar la matriz de f respecto de la base $\mathcal{B}$, unión de las bases de S y S'.

30. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ de matriz $\begin{pmatrix} 0 & 7^2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ con respecto a las bases canónicas. Encuentra bases de $\mathbb{R}^5$ y $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz de f con respecto a estas bases sea $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.