Tema 4 Teoría del endomorfismo

El concepto de autovalor y autovector de una matriz cuadrada es una de las herramientas más potentes que el Algebra Lineal proporciona para la resolución de gran cantidad de problemas que aparecen en Ciencia y Tecnología.

A lo largo de esta sección f representará un endomorfismo de un espacio vectorial V de dimensión n cuya matriz asociada en una base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es A.
El objetivo es encontrar, cuando sea posible, otra base de V en la cual la matriz asociada a f sea lo más sencilla posible.

4.1. Valores y vectores propios

Definición 4.1 *Un vector $v \in V$ se dice* vector propio *o* autovector *de $f \in End(V)$ si existe un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que*

$$f(v) = \lambda v \quad \text{para} \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

Es decir que la imagen del vector es proporcional a él.
Al escalar λ se le llama *valor propio* o *autovalor* asociado a v.
$V(\lambda)$ denota al conjunto de vectores asociados al valor propio λ.

Proposición 4.1 *El conjunto $V(\lambda) = \{v \in V / f(v) = \lambda v\}$ es un subespacio vectorial de V, llamado subespacio de vectores propios asociados al valor propio λ.*

Ejemplo 4.1 *Dado el endomorfismo* $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \rightsquigarrow & f(x, y, z) = (3x + 2y, -x, z) \end{array}$

1. Determina cuál de estos vectores de $\mathbb{R}^3$ son vectores propios de f, indicando el valor propio asociado: $v_1(1, 2, 3); v_2(1, -1, 2); v_3(-2, 1, 0)$.

   Resolución:

   •$f(v_1) = f(1, 2, 3) = (7, -1, 3)$ no proporcional a v_1, luego v_1 no es autovector de f.

   •$f(v_2) = f(1, -1, 2) = (1, -1, 2) = v_2$, luego v_2 es autovector de f de valor propio asociado $\lambda = 1$.

   •$f(v_3) = f(-2, 1, 0) = (-4, 2, 0) = 2v_3$, luego v_3 es autovector de f de valor propio asociado $\lambda = 2$.

2. Halla la matriz A asociada a f en la base canónica, calcula el determinate de $xI_3 - A$ y sustituye en él los valores propios obtenidos antes.

   Resolución: Las columnas de A son las imágenes de los vectores de la base canónica, es decir $f(1, 0, 0)$, $f(0, 1, 0)$, $f(0, 0, 1)$.

   $$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |xI - A| = \begin{vmatrix} x-3 & -2 & 0 \\ 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^2(x-2).$$

Los valores propios anulan a este polinomio. Veremos más adelante que esto no es casualidad y que los valores propios de un endomorfismo coinciden con las raíces del polinomio $|xI_n - A|$ que llamamos *polinomio característico.*

Observación 4.1 *$V(\lambda)$ =Ker($f - \lambda I_V$) siendo I_V el endomorfismo identidad de V.*

Propiedades 4.1 *Para cualquier espacio vectorial V, se tienen las siguientes propiedades:*

a) El 0_V es vector propio de cualquier endomorfismo, asociado a cualquier valor propio.

b) Un vector propio $v \in V \setminus \{0_V\}$ tiene un único valor propio asociado.

c) Si dim$V = n$, $f \in$ End(V) tiene a lo sumo n valores propios.

d) El subespacio $V(\lambda)$ es invariante por f y dim$V(\lambda) \geq 1$.

e) Si $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow V(\lambda_1) \cap V(\lambda_2) = 0_V$.

f) Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ una familia de vectores tal que $v_i \in V(\lambda_i)$, siendo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ distintos, entonces $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es libre.

Observación 4.2 Si A es matriz asociada a f se identifican los vectores y valores propios de A y los de f.

Propiedades 4.2 *Para cualquier A matriz asociada a f:*

1. *Los valores propios de A y de A^t coinciden.*
2. *Los valores propios de una matriz triangular o diagonal son precisamente los elementos de la diagonal principal.*
3. *Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ son los valores propios de A entonces $\lambda\lambda_1, \lambda\lambda_2, \ldots, \lambda\lambda_k$ son los valores propios de λA.*
4. *Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ son los valores propios de A entonces $\lambda_1^p, \lambda_2^p, \ldots, \lambda_k^p$ son los valores propios de A^p.*
5. *Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ son los valores propios de A, inversible, entonces $\dfrac{1}{\lambda_1}, \dfrac{1}{\lambda_2}, \ldots, \dfrac{1}{\lambda_k}$ son los valores propios de A^{-1}.*

Si v es un vector propio de f , de valor propio asociado λ , se cumple

$$f(v) = \lambda v \Leftrightarrow V(\lambda) = \mathrm{Ker}(f - \lambda I_V) \neq 0 \Leftrightarrow \ \mathrm{rango}(f - \lambda I_V) < n$$

Matricialmente, si A es matriz de f entonces rango$(A - \lambda I_n) < n \Leftrightarrow |A - \lambda I_n| = 0$.

Definición 4.2 *Se llama* polinomio característico *de f al determinante* $|xI_n - A|$. Se le suele dentar por $p_A(x)$ o $p_f(x)$.
Notar que los valores propios de un endomorfismo son precisamente las raíces del polinomio característico. Evidentemente $|A - xI_n| = 0 \Leftrightarrow |xI_n - A| = 0$ que se le llama ecuación característica de f.

Cálculo de valores y vectores propios de f En la práctica seguiremos dos pasos para el cálculo de valores y vectores propios de un endomorfismo.

Paso 1 **Valores propios**

Calculamos las raíces del polinomio característico, resolviendo $|A - xI_n| = 0$

Paso 2 **Vectores propios**

Para cada valor propio λ obtenido, calculamos el subespacio asociado $V(\lambda)$, resolviendo el sistema $(A - \lambda I_n)v = 0$.

Ejemplo 4.2 *Calcula los valores y vectores propios del endomorfismo:*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \rightsquigarrow & f(x, y) = (y, -2x + 3y) \end{array}$$

La matriz asociada a f respecto de la base canónica es $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Paso 1 **Valores propios** Calculamos las raíces del polinomio característico $|xI_n - A|$

$|A - xI_2| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -2 & 3 - x \end{vmatrix} = x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2) = 0 \Rightarrow \lambda = 1, \lambda = 2$ son los valores propios.

Paso 2 **Vectores propios** Para cada valor propio λ, calculamos resolvemos $(A - \lambda I_n)v = 0$

$\bullet V(1) = \{v \in \mathbb{R}^2/(A - I_2)v = 0\} = \left\{(x, y) \Big/ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \{(x, y)/ - x + y = 0\} = \{(x, x)/x \in \mathbb{R}\} = \langle(1, 1)\rangle$.

$\bullet V(2) = \{v \in \mathbb{R}^2/(A - 2I_2)v = 0\} = \left\{(x, y) \Big/ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \{(x, y)/ - 2x + y = 0\} = \{(x, 2x)/x \in \mathbb{R}\} = \langle(1, 2)\rangle$.

Observar que los vectores propios forman base de $\mathbb{R}^2$

Ejemplo 4.3 *Calcula los valores y vectores propios del endomorfismo:*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \rightsquigarrow & f(x, y, z) = (y + z, 2x - y + z, 2x - 2y - 2z) \end{array}$$

La matriz asociada a f respecto de la base canónica es $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

Paso 1 **Valores propios** Calculamos las raíces del polinomio característico $|xI_n - A|$

$|A - xI_3| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 2 & -1 - x & 1 \\ 2 & -2 & -2 - x \end{vmatrix} = -(x - 1)(x + 2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1, \lambda = -2$ (doble), son los valores propios.

Paso 2 **Vectores propios** Para cada valor propio λ, calculamos resolvemos $(A-\lambda I_n)v = 0$

$$\bullet V(1) = \{v \in \mathbb{R}^3 / (A{-}I_3)v = 0\} = \left\{ (x,y,z) \Big/ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$\{(x,y,z)/-x+y+z=0; z=0\} = \{(x,x,0)/x \in \mathbb{R}\} = \langle (1,1,0) \rangle$.

$$\bullet V(-2) = \{v \in \mathbb{R}^3 / (A{+}2I_3)v = 0\} = \left\{ (x,y,z) \Big/ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$\{(x,y,z)/2x{+}y{+}z=0; 2x{-}2y=0\} = \{(x,x,-3x)/x \in \mathbb{R}\} = V(-2) = \langle (1,1,-3) \rangle$.

Observar que los vectores propios no forman base de $\mathbb{R}^3$

Ejemplo 4.4 *Calcula los valores y vectores propios del endomorfismo:*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t) & \rightsquigarrow & f(x,y,z,t) = (x+y+z+t, x+y-z-t, x-y+z-t, x-y-z+t) \end{array}$$

La matriz asociada a f respecto de la base canónica es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Paso 1 **Valores propios** Calculamos las raíces del polinomio característico $|xI_n - A|$

$$|A - xI_4| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-x & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-x \end{vmatrix} = (x+2)(x-2)^3 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda = -2, \lambda = 2$ (triple), son los valores propios.

Paso 2 **Vectores propios** Para cada valor propio λ, calculamos resolvemos $(A-\lambda I_n)v = 0$

$$\bullet V(-2) = \{v \in \mathbb{R}^4 / (A{+}2I_4)v = 0\} = \left\{ (x,y,z,t) \Big/ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$\{(x,y,z,t)/x+3y-z-t=0; y-z=0; z-t=0\} = \{(-y,y,y,y)/y \in \mathbb{R}\} = \langle (-1,1,1,1) \rangle$.

$$\bullet V(2) = \{v \in \mathbb{R}^4 / (A{-}2I_4)v = 0\} = \left\{ (x,y,z,t) \Big/ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$\{(x,y,z,t)/x{-}y{-}z{-}t=0\} = \{(x,y,z,x{-}y{-}z)/x,y,z \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,0,1), (0,1,0,-1), (0,0,1,-1) \rangle$.
Observar que los vectores propios no forman base de $\mathbb{R}^4$

Ejemplo 4.5 *Comprueba, haciendo los cálculos correspondientes que:*

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Valores propios:
$|A - xI_3| = -(x-1)(x-3)(x+4) \Rightarrow \lambda = -4, \lambda = 1, \lambda = 3$
Vectores propios:
$V(1) = \langle(1,0,3)\rangle$; $V(3) = \langle(3,2,-1)\rangle$; $V(-4) = \langle(-3,5,1)\rangle$

$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

Valores propios:
$|B - xI_3| = -(x-2)^2(x+4) \Rightarrow \lambda = -4, \lambda = 2$
Vectores propios:
$V(-4) = \langle(1,1,-2)\rangle$; $V(2) = \langle(1,-1,0)\rangle$

$C = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Valores propios:
$|C - xI_3| = -x(x+1)(x+2) \Rightarrow \lambda = 0, \lambda = -1, \lambda = -2$
Vectores propios:
$V(0) = \langle(2,1,0)\rangle$; $V(-1) = \langle(2,0,1)\rangle$; $V(-2) = \langle(4,-1,2)\rangle$

Código Sage 4.1: Ejemplo 4.5 A

```
#Variables de entrada
A = matrix([[1,3,0],[3,-2,-1],[0,-1,1]]);
show(A.charpoly());
show(A.fcp());
show("values", A.eigenvalues());
show("Vector",A.eigenvectors_right());
A.right_kernel()
```

Evaluar en SageMathCell

Código Sage 4.2: Ejemplo 4.5 C

```
#Variables de entrada
C = matrix([[-2,4,2],[1,-2,-2],[-1,2,1]]);
show(C.charpoly());
show(C.fcp());
show ("values", C.eigenvalues());
show("Vector",C.eigenvectors_right());
C.right_kernel()
```

Evaluar en SageMathCell

Nota 4.1 *Todos los vectores pertenecientes al kernel de la aplicación f son autovectores de la aplicación f con respecto al autovalor $\lambda = 0$.*

4.2. Diagonalización de un endomorfismo

Definición 4.3 *Dos matrices A y B son semejantes si existe una matriz regular P tal que $B = PAP^{-1}$.* Se denota $A \sim B$.

Proposición 4.2 *Dos matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico* , así

$$A \sim B \Rightarrow |xI_n - A| = |xI_n - B|$$

Definición 4.4 *Un endomorfismo f es* diagonalizable *si su matriz asociada A es semejante a una matriz diagonal D.*

Observación: Si $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es una base de V de vectores propios, entonces la matriz asociada a $f : \underset{\{v_1,v_2,...,v_n\}}{V} \to \underset{\{v_1,v_2,...,v_n\}}{V}$ respecto a esta base será:

Paso 1. Calculamos las imágenes de los vectores de la base del espacio inicial.
Paso 2. Escribimos estos vectores en combinación lineal de la base final (son la misma base):

$$\left\{\begin{array}{lllllll} f(v_1) & \overset{\text{Paso 1}}{=} & \lambda_1 v_1 & \overset{\text{Paso 2}}{=} & \lambda_1 v_1 + & 0v_2 & + \cdots + 0v_n \\ f(v_2) & \overset{\text{Paso 1}}{=} & \lambda_2 v_2 & \overset{\text{Paso 2}}{=} & 0v_1 + & \lambda_2 v_2 & + \cdots + 0v_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ f(v_n) & \overset{\text{Paso 1}}{=} & \lambda_n v_n & \overset{\text{Paso 2}}{=} & 0v_1 + & 0v_2 & + \cdots + \lambda_n v_n \end{array}\right. \Rightarrow B_f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Teorema 4.1

1. $f \in$End(V) es diagonalizable sí y sólo si existe una base de V de vectores propios de f.

2. $f \in$End(V) es diagonalizable $\Leftrightarrow$ $|xI_n - A|$ tiene n raices en $\mathbb{K}$ y la multiplicidad de cada valor propio $\lambda_i =$dim$V(\lambda_i)$.

3. $f \in$End(V) es diagonalizable $\Leftrightarrow$ dim$V(\lambda_1)+$ dim$V(\lambda_2) + \ldots +$ dim$V(\lambda_k) =$dim$V$

¿Qué es diagonalizar una matriz?

$$\begin{array}{ccc} \underset{\mathfrak{B}_V}{V} & \xrightarrow{A} & \underset{\mathfrak{B}_V}{V} \\ P\big\uparrow & & \big\downarrow P^{-1} \\ \underset{\overline{\mathfrak{B}}_V}{V} & \xrightarrow{D} & \underset{\overline{\mathfrak{B}}_V}{V} \end{array}$$

Sea $\mathfrak{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ la base canónica de V y sea $\overline{\mathfrak{B}} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de vectores propios de V . Teniendo en cuenta lo visto en el apartado de aplicaciones lineales se cumplirá que $D = P^{-1}AP$.
Además observar que P es una matriz de cambio de bases, así las columnas de P son precisamente las coordenadas de los vectores propios.

Resumiendo lo anterior, diagonalizar una matriz A, cuando sea posible, es encontrar una matriz diagonal D y una matriz regular P que verifiquen $D = P^{-1}AP$. Para ello:

1. Se calculan los valores y vectores propios.

2. Se comprueba que verifican alguna de las condiciones del teorema anterior para poder asegurar que A es diagonalizable.

3. Se determinan D y P :

- D es una matriz diagonal formada por los valores propios.
- Las columnas de P son los vectores propios, ordenados correctamente .

Ejercicio 4.2.1 *Estudia si los endomorfismos y matrices del ejemplo 4.2 y siguientes son diagonalizables. En caso afirmativo encuentra matrices tales que* $D_{iagonal} = P^{-1}AP$

- $\begin{array}{ccc} f:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \rightsquigarrow & f(x,y)=(y,-2x+3y) \end{array}$ vimos que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

con valores propios: $\lambda = 1,\ \lambda = 2$ y vectores propios: $V(1) = \langle(1,1)\rangle; V(2) = \langle(1,2)\rangle$.

Como los vectores propios forman base de $\mathbb{R}^2$ entonces f es diagonalizable con

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{tal que} D = P^{-1}AP$$

- $\begin{array}{ccc} f:\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \rightsquigarrow & f(x,y,z)=(y+z,2x-y+z,2x-2y-2z) \end{array}$

vimos que sus valores propios son: $\lambda = 1,\ \lambda = -2$ (doble) y sus vectores propios: $V(1) = \langle(1,1,0)\rangle$, $V(-2) = \langle(1,1,-3)\rangle$.

Como los vectores propios no forman base de $\mathbb{R}^3$ entonces f no es diagonalizable.

- $\begin{array}{ccc} f:\mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t) & \rightsquigarrow & f(x,y,z,t)=(x+y+z+t,x+y-z-t,x-y+z-t,x-y-z+t) \end{array}$

vimos que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ con valores propios: $\lambda = -2,\ \lambda = 2$ (triple) y vectores propios: $V(-2) = \langle(-1,1,1,1)\rangle$; $V(2) = \langle(1,0,0,1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)\rangle$.
Como los vectores propios forman base de $\mathbb{R}^4$ entonces f es diagonalizable con

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{tal que} D = P^{-1}AP$$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ vimos que sus valores propios son : $\lambda = -4, \lambda = 1, \lambda = 3$ y sus vectores propios: $V(1) = \langle(1,0,3)\rangle$; $V(3) = \langle(3,2,-1)\rangle$; $V(-4) = \langle(-3,5,1)\rangle$.

Como los vectores propios forman base de $\mathbb{R}^3$ entonces A es diagonalizable con

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ tal que } D = P^{-1}AP$$

- $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ vimos que sus valores propios son : $\lambda = -4, \lambda = 2$ y sus vectores propios: $V(-4) = \langle(1,1,-2)\rangle$; $V(2) = \langle(1,-1,0)\rangle$

Como los vectores propios no forman base de $\mathbb{R}^3$ entonces B no es diagonalizable.

$\bullet C = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ vimos que sus valores propios son : $\lambda = 0$, $\lambda = -1$, $\lambda = -2$ y sus vectores propios: $V(0) = \langle(2,1,0)\rangle$; $V(-1) = \langle(2,0,1)\rangle$; $V(-2) = \langle(4,-1,2)\rangle$.

Como los vectores propios forman base de $\mathbb{R}^3$ entonces C es diagonalizable con

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ tal que } D = P^{-1}CP$$

Potencia n-ésima de una matriz diagonalizable

Si A es diagonalizable, hemos visto que existe una matriz diagonal D y una matriz regular P tales que

$$A = PDP^{-1} \Rightarrow A^n = (PDP^{-1})^n = \underbrace{(PDP^{-1}).(PDP^{-1}).(PDP^{-1}).\dots.(PDP^{-1})}_{n \text{ veces}} =$$

$$= PD\underbrace{(P^{-1}P)}_{I_n}D\underbrace{(P^{-1}P)}_{I_n}D(P^{-1}\dots.P)DP^{-1} = P\underbrace{DD\dots D}_{n \text{ veces}}P^{-1} = PD^nP^{-1}$$

.

Ejemplo 4.6 *Calcula* A^{15} siendo $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

Paso 1 **Valores propios** Calculamos las raíces del polinomio característico $|xI_n - A|$

$|A - xI_3| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-x & -3 & 3 \\ 3 & -5-x & 3 \\ 6 & -6 & 4-x \end{vmatrix} = -(x-4)(x+2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 4, \lambda = -2$ (doble), son los valores propios.

Paso 2 **Vectores propios** Para cada valor propio λ, calculamos resolvemos $(A - \lambda I_n)v = 0$

$\bullet V(4) = \{v \in \mathbb{R}^3 / (A - 4I_3)v = 0\} = \left\{ (x,y,z) \Big/ \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$
$\{(x,y,z)/ -x-y+z = 0; x-y = 0\} = \{(y,y,2y)/y \in \mathbb{R}\} = \langle(1,1,2)\rangle$.

$\bullet V(-2) = \{v \in \mathbb{R}^3 / (A + 2I_3)v = 0\} = \left\{ (x,y,z) \Big/ \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$
$\{(x,y,z)/x - y + z = 0\} = \{(x,y,-x+y)/x,y \in \mathbb{R}\} = \langle(1,0,-1)\,,\,(0,1,1)\rangle$.

Los vectores propios forman base de $\mathbb{R}^3$ luego A es diagonalizable donde
$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ tal que $A = PDP^{-1} \Rightarrow A^{15} = PD^{15}P^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^5 & 0 & 0 \\ 0 & -2^5 & 0 \\ 0 & 0 & -2^5 \end{pmatrix} P^{-1} = 2^5 \begin{pmatrix} 2^5 & -1 & 0 \\ 2^5 & 0 & -1 \\ 2^6 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} =$$
$$= 2^4 \begin{pmatrix} 2^5-1 & -2^5-1 & 2^5+1 \\ 2^5+1 & -2^5-3 & 2^5+1 \\ 2^6+2 & -2^6-2 & 2^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 496 & -528 & 528 \\ 528 & -560 & 528 \\ 1056 & -1056 & 1024 \end{pmatrix}$$

4.3. Subespacios Invariantes

En el último apartado se ha establecido una caracterización de los endomorfismos que tienen una matriz diagonal, los denominados *diagonalizables*. En esta lección estudiaremos aquellos que aunque no lo sean, tengan una matriz más "simple", para ello generalizaremos el concepto de los subespacios de vectores propios a subespacios invariates.

Ejemplo 4.7 *Se considera la matriz cuadrada* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ *en el cuerpo de los racionales* $\mathbb{Q}$. *Se tiene que* $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ *y que,*

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Expresamos esto escribiendo que $A^2 - 2A + 3I$ *es la matriz nula o que el polinomio* $p(X) = X^2 - 2X + 3$ *anula la matriz* A *y, a menudo escribiremos* $p(A) = 0$.

El anterior ejemplo, sugiere la siguiente definición:

Definición 4.5 *Sea* A *una matriz* $n \times n$ *con coeficientes en* $\mathbb{K}$. *Se llama polinomio mínimo de* A *al único polinomio* $m_A(X) \in \mathbb{K}[X]$ *verificando las siguientes condiciones:*

1. $m_A(X)$ *es mónico.*
2. $m_A(A)$ *es la matriz nula.*
3. $m_A(X)$ *es el polinomio de menor grado verificando las dos condiciones anteriores.*

El siguiente es uno de los resultados más importantes de la teoría del endormorfismo:

Teorema 4.2 (Teorema de Cayley–Hamilton) *Sea* A *una matrix* $n \times n$ *con coeficientes en* $\mathbb{K}$. *Sean* $p_A(X)$ *y* $m_A(X)$ *su polinomio característico y mínimo, respectivamente. Entonces:*

1. *El polinomio* $p_A(X)$ *satisface la matriz, es decir,* $p_A(A)$ *es la matriz nula.*
2. *El polinomio mínimo* $m_A(X)$ *divide al polinomio característico* $p_A(X)$. *Además si* α *es autovalor de* A, *entonces* $X - \alpha$ *divide a* $m_A(X)$.
3. *La matriz* A *es diagonalizable si y sólo si su polinomio mínimo tiene todas sus raíces simples, es decir;*

$$m_A(X) = (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_r), \qquad \alpha_i \neq \alpha_j, \quad (i \neq j)$$

4. *Dos matrices semejantes tienen el mismo polinomio mínimo.*

Nota 4.2
A continuación se muestran algunos ejemplos de endomorfismos y matrices, junto con sus polinomios mínimos:

- El polinomio característico de la matriz identidad de tamaño $n \times n$ es $(X-1)^n$ y su polinomio mínimo es $(X-1)$.
- La matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
tiene por polinomio característico y polinomio mínimo X^2.
- El polinomio característico de la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
es $(X-1)^2(X-2)$ y su polinomio mínimo es $(X-1)(X-2)$.
- Si
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
entonces $p_A(X) = X^3(X-1)$ y su polinomio mínimo será alguno de los siguientes: $X(X-1), X^2(X-1), X^3(X-1)$. ¿ Cuántos intentos serán necesarios para poder concluir que $m_A(X) = X^3(X-1)$?

Definición 4.6
Sea f un endomorfismo de V, y U un subespacio vectorial de V. Se dice que U es f-invariante o invariante por f si se verifica cualquiera de las condiciones equivalentes siguientes:

1. $f(u) \in U$*, cualquiera que sea* $u \in U$.
2. $f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_r)$ *están en* U *siendo* $\{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ *un sistema generador de* U.

Ejemplo 4.8
A continuación se muestran algunos ejemplos de subespacios invariantes:

- Si f es el endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ de matriz A con respecto a la base canónica, donde
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
entonces es inmediato observar que $\langle\{e_1, e_2\}\rangle$ es un subespacio f-invariante y que $\langle\{e_3, e_4\}\rangle$ no lo es. Se tiene que $m_A(X) = p_A(X) = X^4 - X^3$, entonces también es invariante el subespacio $\langle\{(4, 2, 1, 0)\}\rangle$ puesto que es el subespacio de vectores propios de f asociados al valor propio 1.

- Claramente el subespacio vectorial de loa autovectores $V(\alpha)$ asociados al autovalor α de un endomorfismo f es un subespacio invariante.
- Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^5$ de matriz A con respecto a la base canónica,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Los subespacios $U_1 = \langle\{e_1, e_5\}\rangle$, $U_2 = \langle\{e_2, e_4\}\rangle$, $U_3 = \langle\{e_3\}\rangle$ y $U_4 = \langle\{e_1, e_5, e_3\}\rangle$ son f–invariantes.

El resultado de *mayor interés* relativo a los subespacios invariantes lo ilustramos con el siguiente ejemplo

Ejemplo 4.9 *Se considera el endomorfismo f de $\mathbb{R}^6$ que tiene asociada respecto de la base canónica la matriz siguiente:*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ -5 & -8 & 0 & -5 & 10 & 0 \\ -3 & -8 & 1 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & -3 & 6 & 0 \\ -4 & -9 & -1 & -4 & 11 & 0 \\ 0 & -5 & -6 & 0 & 11 & -3 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de f es $p_A(X) = (X-2)^3(X+3)^3$ y su polinomio mínimo es $m_A(X) = (X-2)^3(X+3)^2$.
Si consideramos los subespacios $V_1 = \ker(f - 2I_{\mathbb{R}^6})^3$ y $V_2 = \ker(f + 3I_{\mathbb{R}^6})^2$, se tiene que

$$V_1 = \langle\{v_1 = (0,1,1,0,1,0), v_2 = (1,-1,1,1,0,0), v_3 = (0,0,-1,0,0,1)\}\rangle$$

$$V_2 = \langle\{w_1 = (1,0,0,-1,0,0), w_2 = (0,0,0,0,0,1), w_3 = (0,1,1,1,1,0)\}\rangle$$

de lo que se pueden deducir los siguientes resultados:

1. *La familia de vectores $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3\}$ es libre, y por tanto es una base de $\mathbb{R}^6$, lo que permite asegurar que $\mathbb{R}^6 = V_1 + V_2$.*
2. *Puesto que $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$, $\mathbb{R}^6 = V_1 \oplus V_2$.*
3. *Si calculamos las imágenes por f de los vectores de $\mathcal{B}$, obtenemos:*

$$f(v_1) = v_1 - v_2 \qquad f(v_2) = 2v_2 - v_3 \qquad f(v_3) = v_1 + v_2 + 3v_3$$

$$f(w_1) = -3w_1 \qquad f(w_2) = -3w_2 \qquad f(w_3) = w_1 - 3w_3.$$

   Esto muestra que los subespacios V_1 y V_2 son f-invariantes, y que la matriz B de f con respecto a la base $\mathcal{B}$ es de la forma

$$B = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \; M_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \; 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.4. Ejercicios propuestos de diagonalización de homomorfismos

1. Determina una matriz $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ con valores propios 1 y 2 .

2. Sea A matriz diagonalizable, ¿cómo diagonalizaríamos la matriz $B = A^3 - 2A^2 + 3I$?.

3. Cálcula los posibles valores propios de las homotecias, proyecciones y simetrías de la lección *Homomorfismo y geometría* del capítulo anterior.

4. Sea $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ tal que $(1,-1,0),(0,0,1),(1,1,0)$ son vectores propios y $f(1,2,3) = (6,6,3)$. Halla la matriz A de f en la base canónica y sus valores propios. Razona si f es diagonalizable y en caso afirmativo determina matrices P y D tales que $A = PDP^{-1}$.

5. Diagonaliza el endomorfismo $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{P}_2(x) & \to & \mathbb{P}_2(x) \\ p(x) & \rightsquigarrow & f(p(x)) = p'(x) + p(x) \end{array}$

6. Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de V y sea $f \in \mathrm{End}(V)$ dado por
$$f(e_1) = -e_1 + 3e_2 - 3e_3; f(e_2) = 2e_2; f(e_3) = -3e_1 + 3e_2 - e_3$$
Estudia si es diagonalizable y en caso afirmativo diagonaliza f.

7. Razona que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable y diagonaliza A^2 y A^{-1}.

8. Sea $f : V \to V$ un endomorfismo cuyos autovalores son -1, 0 y 1, con autovectores asociados v_1, v_2, v_3 respectivamente. Encontrar un vector v tal que $f(v) = v_1 + v_3$. ¿Existirá un vector v tal que $f(v) = v_1$?

9. Estudiar, según los valores de a, si son diagonalizables
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2a & 0 \\ -a & 0 & a \\ 0 & -2a & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1+a & -a & a \\ 2+a & -a & a-1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

10. Dados $v_1(1,1,0,0), v_2(0,1,0,1), v_3(0,0,0,1), v_4(0,0,1,1), v_5(1,0,1,0), v_6(1,0,0,0)$ y $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ definido por: $f(v_1) = v_4$; $f(v_2) = v_5$; $f(v_3) = v_6$; $f(v_4) = v_1$.
Diagonaliza, si es posible, f y calcula $-(A)^{-21}$, siendo A la matriz de f en la base canónica.

11. Dí, razonadamente, si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes:
   a) Si $A \in M_4(\mathbb{R})$ y $P_A(X) = X(X-1)(X-2)^2$ entonces A tiene rango 2.
   b) Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^4$. Se sabe que $\dim \ker(f - 3I) > 1$ y que $\mathrm{mcd}\{M_f(X), (X-5)(X-4)^2\}$ tiene dos raices distintas. En esas condiciones f es diagonalizable.
   c) Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ y $A^2 = \mathbb{I}_n$ entonces A es diagonalizable.
   d) Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un endomorfismo cuyo polinomio mínimo es $X(X+1)$, entonces f es diagonalizable.

e) Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un endomorfismo cuyo polinomio mínimo es $X(X-1)$, entonces f es la aplicación nula, es la aplicación identidad o bien existen subespacios U y W de $\mathbb{R}^3$ tales que f coincide con la proyección sobre U en la dirección de W.

12. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ del que se sabe lo siguiente:

    a) f es diagonalizable y sólo tiene dos autovalores distintos.

    b) Si $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-2y-z=0\}$ y $V = \langle\{(1,0,1),(-1,1,1)\}\rangle$, $f(U) = V$.

    c) Un valor propio de f es -1 y uno de sus vectores propios pertenece a U.

    d) $(1,0,-1)$ es un vector propio de f, y está asociado a un autovalor simple.

    Halla la matriz A asociada a f respecto de la base canónica, en función de cuántos parámetros sea preciso.

13. Respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^4$, calcula la matriz del endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ caracterizado por verificar:

    a) $(1,1,1,1)$ es un vector propio de valor propio -4.

    b) $\ker(f) = \langle\{(1,2,3,4),(1,-4,0,1)\}\rangle$

    c) $f(3,2,1,2) = (8,4,-2,1)$.

14. Indica si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Justifica tu respuesta.

    "Se considera $\mathbb{P}_3$ el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de los polinomios de grado menor que 3 y con coeficientes en $\mathbb{R}$. Sea $f : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ la aplicación lineal $f(ax^2+bx+c) = cx+b-a$. Entonces existe una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{P}_3$ tal que la matriz de f respecto a esta base es diagonal".

15. Indica si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Justifica tu respuesta.

    "Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 2017 & 2016 \\ 2016 & 2017 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 2016 & 2017 \\ 0 & 2016 \end{pmatrix}$. Entonces A y B son matrices diagonalizables ".

16. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un endomorfismo cuya matriz asociada respecto de las bases canónicas es

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

    a) Obtén el polinomio característico y los valores propios de A.

    b) Da bases de los subespacios de vectores propios relativos a A. ¿Es f diagonalizable? ¿Quién es el polinomio mínimo de f?

    c) Dar cuatro subespacios invariantes por la aplicación f.

    d) Da bases de los subespacios de vectores propios relativos a A. ¿Puedes encontrar un subespacio invariante por f de dimensión 2?