Aspectos generales de las prácticas de laboratorio:

- Abrir un navegador (recomendado Firefox o Chrome) y en la barra de dirección escribir
  
  193.146.75.191:8080

  Entrar con vuestras credenciales: USERNAME, (por ejemplo, Leonardo.Torres_Queue) y, en PASSWORD, la contraseña.

Teoría del endomorfismo

Ilustramos las primitivas de SAGE con el siguiente ejercicio contenido en el tema Teoría del Endomorfismo.

Ejercicio

Sea $B = \{ e_1, e_2, e_3 \}$ una base de un $\mathbb{Q}$ espacio vectorial $V$, y sea $f \in \text{End}(V)$ dado por

$$
  f(e_1) = -e_1 + 3e_2 - 3e_3; 
  f(e_2) = 2e_2; 
  f(e_3) = -3e_1 + 3e_2 - e_3
$$

Estudia si es diagonalizable y en caso afirmativo diagonaliza $f$.

- Construimos la matriz $A$ por columnas de $f$ con respecto a la base $B$

  
  \[
  A = \begin{pmatrix}
  -1 & 0 & -3 \\
  3 & 2 & 3 \\
  -3 & 0 & -1
  \end{pmatrix}
  \]

- Calculamos el polinomio característico $p_A(x)$ y, también el polinomio mínimo de $A$, $m_A(X)$

  
  \[
  p_A(x) = \text{A.charpoly()}; 
  m_A(x) = \text{A.minpoly()}
  \]

- El método $A.fcp()$ devuelve la factorización del polinomio sobre los racionales, en particular los factores lineales son los valores propios o autovalores:

  
  \[
  A.fcp()
  \]

  Luego las raíces de $p_A(x)$ son 2 de multiplicidad 2 y, $-4$ de multiplicidad 1. También podemos utilizar la primitiva $A.eigenvalues()$ que devuelve directamente los valores propios:

  
  \[
  A.eigenvalues()
  \]

- La primitiva $A.eigenvectors_right()$ que devuelve los vectores propios o autovectores
Consecuentemente la matriz es diagonalizable, y por lo tanto existe una matriz $P$ invertible tal que $P^{-1}AP$ es una matriz diagonal. La matriz $P$ es la formada por las columnas de los auto vectores:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

**EJERCICIOS**

1. Estudia y analiza si la matriz $B$ es diagonalizable sobre el cuerpo de los racionales $\mathbb{Q}$, donde

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

¿Puede ser diagonalizable sobre los reales?

2. Estudia y analiza si la matriz $C$ es diagonalizable sobre el cuerpo de los racionales $\mathbb{Q}$, donde

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

¿Puede ser diagonalizable sobre los reales?

3. Se considera el endomorfismo real $f$ de matriz $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con respecto a la base canónica. Estudia si $f$ es diagonalizable y encuentra dos sub espacios distintos $f$-invariantes de $\mathbb{R}^4$ y de dimensión 2.

4. Diseña un programa en SAGE que tenga como entrada una matriz $A$ de un endomorfismo $f$ y, un $U$ subespacio generado por las columnas de una matriz $B$ y decida si $U$ es un subespacio $f$-invariante.

```python
def invariante(A, B):
    ........................................
```

5. Diseña un programa en SAGE que tenga como entrada dos matrices $A$ y $B$ del mismo tamaño y que decida si son matrices semejantes. Y en caso afirmativo, encontrar una matriz inversible $P$ tal que $B = P^{-1}AP$

```python
def semejante(A, B):
    ........................................
```