ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA
GRADO EN INGENIERÍA EN ELECTRÓNICA INDUSTRIAL Y AUTOMÁTICA
GRADO EN INGENIERÍA ELÉCTRICA
Universidad de Cantabria

Práctica 6 (SAGE)

Aspectos generales de las prácticas de laboratorio:

- Abrir un navegador (recomendado Firefox o Chrome) y en la barra de dirección escribir

  193.146.75.191:8080

  Entrar con vuestras credenciales: USERNAME, (por ejemplo, Leonardo.Torres_Quevedo) y, en PASSWORD, la contraseña.

Teoría del endomorfismo

Ilustramos las primitivas de SAGE con el siguiente ejercicio contenido en el tema *Teoría del Endomorfismo.*

Ejercicio
Sea $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base de un $\mathbb{Q}$ espacio vectorial V, y sea $f \in End(V)$ dado por

$$f(e_1) = -e_1 + 3e_2 - 3e_3; f(e_2) = 2e_2; f(e_3) = -3e_1 + 3e_2 - e_3$$

Estudia si es diagonalizable y en caso afirmativo diagonaliza f.

- Construimos la matriz A por columnas de f con respecto a la base B

```
---------------------------------------------------------------------------
A= matrix(QQ,3, [[-1,0,-3],[3,2,3],[-3,0,-1]]);A
---------------------------------------------------------------------------
```

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Calculamos el polinomio característico $p_A(x)$ y, también el polinomio mínimo de A, $m_A(X)$

```
---------------------------------------------------------------------------
p_A(x)=A.charpoly(); m_A(x)=A.minpoly()
---------------------------------------------------------------------------
```

- El método *A.fcp*() devuelve la factorización del polinomio sobre los racionales, en particular los factores lineales son los valores propios o autovalores:

```
---------------------------------------------------------------------------
A.fcp()
---------------------------------------------------------------------------
```

  Luego las raíces de $p_A(x)$ son 2 de multiplicidad 2 y, -4 de multiplicidad 1. También podemos utilizar la primitiva *A.eigenvalues*() que devuelve directamente los valores propios:

```
---------------------------------------------------------------------------
A.eigenvalues()
---------------------------------------------------------------------------
```

- La primitiva *A.eigenvectors_right*() que devuelve los vectores propios o autovectores

```
--------------------------------------------------------------------------
A.eigenvectors_right()
--------------------------------------------------------------------------
```

Consecuentemente la matrix es diagonalizable, y por lo tanto existe una matriz P inversible tal que $P^{-1}AP$ es una matriz diagonal. La matriz P es la formada por las columnas de los autovectores:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS

1. Estudia y analiza si la matriz B es diagonalizable sobre el cuerpo de los racionales $\mathbb{Q}$, donde

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

   ¿ Puede ser diagonalizable sobre los reales ?

2. Estudia y analiza si la matriz C es diagonalizable sobre el cuerpo de los racionales $\mathbb{Q}$, donde

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   ¿ Puede ser diagonalizable sobre los reales ?

3. Se considera el endomorfismo real f de matriz $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con respecto a la base canónica. Estudia si f es diagonalizable y encuentra dos subespacios distintos f-invariantes de $\mathbb{R}^4$ y de dimensión 2.

4. Diseña un programa en SAGE que tenga como entrada una matriz A de un endormorfismo f y, un U subespacio generado por las columnas de una matriz B y decida si U es un subespacio f-invariante.

```
--------------------------------------------------------------------------
def invariante(A, B):
................................
--------------------------------------------------------------------------
```

5. Diseña un programa en SAGE que tenga como entrada dos matrices A y B del mismo tamaño y que decida si son matrices semejantes. Y en caso afirmativo, encontrar una matriz inversible P tal que $B = P^{-1}AP$

```
--------------------------------------------------------------------------
def semejante(A, B):
 ...............................
 --------------------------------------------------------------------------
```