**ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA**

GRADO EN INGENIERÍA EN ELECTRÓNICA INDUSTRIAL Y AUTOMÁTICA

GRADO EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

Universidad de Cantabria

**Examen Extraordinario**

1 de septiembre del 2017

---

NOMBRE Y APELLIDOS: GRADO:

---

Marcar, en cada caso, las afirmaciones correctas (puede haber más de una).

---

1. La ecuación $3x = 1$.

   a) No tiene solución en $\mathbb{Z}_6$
   b) No tiene solución en $\mathbb{Z}_5$
   c) Tiene por solución $x = 1/3$ tanto en $\mathbb{Z}_5$ como en $\mathbb{Z}_6$
   d) Tiene solución en $\mathbb{Q}$ pero no en $\mathbb{Z}$.
   e) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

---

2. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ definida como $A = I_n - \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}(1, 1, \ldots, 1)$.

   a) $A$ es la matriz nula
   b) $A$ es una matriz simétrica
   c) A no está bien definida
   d) $|A| \geq 0$.
   e) $|A| = 1 + \frac{1}{n}$.

---

3. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ tal que el sistema lineal $Ax = b$ es compatible determinado. Entonces el sistema $A^t x = b$

   a) Tiene al menos $n$ soluciones distintas.
   b) Es incompatible.
   c) Es también compatible determinado.
   d) Es compatible, pero no se puede asegurar que sea determinado.
   e) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

---

4. ¿Cúales de las las siguiente afirmaciones sobre sistemas de ecuaciones lineales son verdaderas ?

   a) Dada $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \end{pmatrix}_{nxn}$ el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene solución única $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^n \,\forall, n > 1$.
   b) La suma de dos soluciones de un sistema lineal es también solución del sistema.

5. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ \lambda & -\lambda \end{pmatrix}$, donde $\lambda$ es un número complejo.

   *a*) $A$ es ortogonal para cualquier valor de $\lambda$
   *b*) $A$ no es ortogonal para ningún valor de $\lambda$
   *c*) $A$ es ortogonal cuando $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
   *d*) $A$ es ortogonal cuando $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{-2}}$
   *e*) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

---

6. Se considera el subespacio de $(\mathbb{R}^4, +, \cdot_{\mathbb{R}})$ siguiente:

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \, : \, x + 2y + 3z + 4t = 0\}$$

   ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son sistema generador de $U$?

   *a*) $S_1 = \{(2, -1, 0, 0), (3, 0, -1, 0), (4, 0, 0, -1)\}$
   *b*) $S_2 = \{(1, 1, -1, 0), (3, 2, -1, -1)\}$
   *c*) $S_3 = \{(2, -1, 0, 0), (3, 0, -1, 0), (4, 0, 0, -1), (1, 1, -1, 0)\}$
   *d*) $S_4 = \{(2, -1, 0, 0), (3, 0, -1, 0), (1, 1, -1, 0)\}$

---

7. ¿Cuáles de las siguientes familias de vectores de $(\mathbb{R}^4, +, \cdot_{\mathbb{R}})$ son linealmente independientes?

   *a*) $L_1 = \{(2, -1, 0, 0), (3, 0, -1, 0), (4, 0, -1, 0)\}$
   *b*) $L_2 = \{(2, -1, 0, 0), (3, 0, -1, 0), (1, 1, -1, 0)\}$
   *c*) $L_3 = \{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\}$
   *d*) $L_4 = \{(1, 1, 1, 1)\}$

---

8. Sea $V$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 6. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

   *a*) En $V$ existen sistemas generadores con 6, 7, 8 y más vectores.
   *b*) Si $L$ es una familia libre de vectores de $V$, entonces en $L$ hay a lo sumo 6 vectores.
   *c*) Si $v_1, v_2, v_3$ son vectores linealmente independientes de $V$, entonces existen vectores $v_4, v_5$ tales que $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ es una familia libre.
   *d*) Si $v_1, v_2, v_3$ son vectores linealmente independientes de $V$, entonces existen vectores $v_4, v_5$ tales que $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ es un sistema generador.
   *e*) Si $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ es una base de $V$, entonces $\{v_1 - v_2, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ también es base de $V$.

---

9. Sea $U$ el siguiente subespacio de $\mathbb{R}^5$:

$$U = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 \, : \, x + y + z = 0, \; t + u = 0\}$$

   ¿Cuáles de los subespacio $W_i$ siguientes satisfacen la condición $U \oplus W_i = \mathbb{R}^5$?

   *a*) $W_1 = \big\langle \{(1, 1, -2, 5, -5), (1, 1, 1, 0, 0)\} \big\rangle$
   *b*) $W_2 = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 \, : \, x + y + z + t + u = 0\}$
   *c*) $W_3 = \big\langle \{(1, 0, -2, 1, 0), (0, 1, 0, 3, -4)\} \big\rangle$
   *d*) $W_4 = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 \, : \, x + 2y = 0, \; z = u = 0\}$

10. Señala qué aplicaciones de las siguientes son lineales.

$$f_i : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$$

*a*) $f_1(x, y, z, t) = (e^x, e^y, t + z)$

*b*) $f_2(x, y, z, t) = (x^2, y, t + z)$

*c*) $f_3(x, y, z, t) = (x, y, t + z)$

*d*) $f_4(x, y, z, t) = (x + y + z + t, x + y + z, x + y)$

*e*) $f_5(x, y, z, t) = (x - 500y + t, x + y + z, z - t + 4)$

---

11. Sea $\mathcal{B}_c = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ la base de $\mathbb{R}^3$ definida por $v_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2)$, $v_2 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2)$ y $v_3 = e_2 + e_3$. ¿Cuáles de las siguientes frases son verdaderas?.

*a*) El vector de coordenadas $(1, 1, 1)$ en la base $\mathcal{B}$, tiene coordenadas $(1, 1, 1)$ en la base $\mathcal{B}_c$.

*b*) La matriz del endomorfismo identidad de $\mathbb{R}^3$, respecto de las bases $\mathcal{B}$ (en el espacio inicial) y $\mathcal{B}_c$ (en el espacio final) es:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*c*) Un vector $v$ de coordenadas $(\alpha, \beta, \gamma)$ respecto de la base $\mathcal{B}_c$ tiene coordenadas $(\alpha', \beta', \gamma')$ respecto de la base $\mathcal{B}$, donde

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

*d*) El vector de coordenadas $(0, 0, 0)$ respecto de la base $\mathcal{B}_c$ tiene coordenadas $(1, -1, 0)$ respecto de la base $\mathcal{B}$.

---

12. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz de $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ en las bases canónicas

*a*) La imagen del vector $(1, 2, 3, 4)$ es $(6, 5, 4)$

*b*) La antiimagen del vector $(1, 2, 3)$ es $(1, 1, 1, 1)$

*c*) La imagen del vector $(6, 5, 4)$ es $(1, 2, 3, 4)$

*d*) $Ker(f) =< \{(0, 0, 0, 2)\} >$.

*e*) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

---

13. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

*a*) Sólo $B$ es diagonalizable

*b*) Sólo $A$ es diagonalizable

*c*) Ambas tienen el mismo polinomio mínimo.

*d*) Ambas tienen el mismo polinomio característico, por tanto ambas son diagonalizables

*e*) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

---

14. Sea $f$ un endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ tal que respecto de la base canónica está representado por la matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

siendo $a, b$ números reales. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

*a*) Si $a \neq 0$, entonces $f$ es inyectiva.

*b*) Si $a = 0$ y $b \neq 0$ entonces $f$ no es diagonalizable.

*c*) Si $a \neq 0$ y $b = 0$ entonces $f$ no es diagonalizable.

*d*) Si $a = 1$ y $b = 2$ entonces $f$ es diagonalizable.

---

15. Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un endomorfismo cuyo polinomio mínimo es $X^2 - 1$.

*a*) $f$ es sobreyectiva

*b*) Existen subespacios $U$ y $W$ de $\mathbb{R}^3$ tales que $f$ coincide con la simetría sobre $U$ en la dirección de $W$

*c*) $f$ tiene un subespacio invariante de dimensión 1.

*d*) $f$ tiene un subespacio invariante de dimensión 2.

*e*) $f$ tiene un subespacio invariante de dimensión 3.

*f*) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

---

16. Sean $e_1 = (1, 1, 1, 1), e_2 = (1, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$ y $S = \langle e_1, e_2 \rangle$ subespacio del espacio euclídeo $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar habitual. La proyección ortogonal del vector $e = (1, 1, -1, 1)$ sobre $S$ es:

*a*) $e_1 - e_2$

*b*) $-e_1 + e_2$

*c*) $2e_1 - e_2$

*d*) $(-2, 0, 0, 1)$

*e*) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

---

17. Sea $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 /\ x + y - 2z - t = 0\ \}$ subespacio del espacio euclídeo $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar habitual, y $v = (1, 1, -2, -1)$.

*a*) $S = \langle v \rangle$

*b*) $v \in S^\perp$

*c*) $v \in S \bigcap S^\perp$

*d*) $S^\perp =< v >$

*e*) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

---

18. Se consideran los puntos $(-2, -1), (-1, 1), (0, 1)$ de $\mathbb{R}^2$.

*a*) La recta que mejor se ajusta a los puntos es $x + 1$.

*b*) La recta que mejor se ajusta a los puntos es $x + 2/3$.

*c*) El polinomio de interpolación de Lagrange es $x + 2/3$.

*d*) El polinomio de interpolación de Lagrange es $x^2 + 3x + 1$.

*e*) El polinomio de interpolación de Lagrange es $x^2 - x + 2$.

*f*) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

---

**SOLUCIONES**

1. a) y d)
2. b) y d)
3. c)
4. a)
5. c)
6. a) y c)
7. a) y d)
8. a), b), c) y e)
9. c) y d)
10. c) y d)
11. a), b) y c)
12. a) y d)
13. Se admiten dos posibles respuestas, puesto que no se especifica el cuerpo
    - e) considerando las matrices en el cuerpo de los reales
    - a) si consideramos las matrices en el cuerpo de los complejos
14. a) y b)
15. a), b), c), d), y e)
16. e)
17. b) y d)
18. f)