ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA

GRADO EN INGENIERÍA EN ELECTRÓNICA INDUSTRIAL Y AUTOMÁTICA

GRADO EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

Universidad de Cantabria

Examen Final

13 de Junio del 2015

---

1. *(2 puntos)*

Consideremos $S = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle/\; \begin{array}{l} x-y+z=0 \\ 2x+3y+t=0 \\ x+4y-z+t=0 \end{array} \right\}$ y $T = \langle(-1,1,2,-1),(0,1,0,1)\rangle$ subespacios de $\mathbb{R}^4$.

a) Calcula bases de S, T, $S+T$ y $S\bigcap T$.

b) Calcula un subespacio S' suplementario de S.

c) Se considera $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ dado por $f(x,y,z,t) = (y, -\dfrac{z+2t}{5}, -\dfrac{3z+t}{5}, -\dfrac{z-8t}{5})$. Encontrar la matriz de f respecto a la base $\mathcal{B}$, union de las bases de S y de S'.

d) ¿ Es S un subespacio invariante por f ? Razona tu respuesta.

---

2. *(1 punto)*

Indica si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Justifica tu respuesta.

"Se considera $\mathbb{P}_3$ el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de los polinomios de grado menor que 3 y con coeficientes en $\mathbb{R}$. Sea $f : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ la aplicación lineal $f(ax^2+bx+c) = cx+b-a$. Entonces existe una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{P}_3$ tal que la matriz de f respecto a esta base es diagonal "

---

3. *(1,5 puntos)*

La matriz *Peña del Fraile* de n filas por m columnas $F_{n\times m}$ fue introducida en clase de laboratorio. El siguiente código de SAGE proporciona la matriz $F_{n\times m} = matriz\_pfraile(n,m)$:

```
-----------------------------------------------------------------
def matriz_pfraile(n,m):
    A=matrix(QQ,[[i*j+1 for j in range(m)] for i in range(n)])
    return A
-----------------------------------------------------------------
```

$$F_{1\times1} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{F}_{2\times2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad F_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad F_{4\times4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{pmatrix}, \quad \ldots\ldots$$

Se pide calcular el determinante de la matriz cuadrada $F_{n\times n}$, cualquiera que sea n.

---

4. *(1 punto)*

Encuentra el mejor ajuste cuadrático para los puntos $(1,2),(0,1),(-1,0),(2,-2)$.

---

5. *(1 punto)*

Indica si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Justifica tu respuesta.

"Sea f una aplicación lineal de $\mathbb{R}^5$ en $\mathbb{R}^3$, entonces existe un vector v no nulo de $\mathbb{R}^5$ tal que $f(v) = 0$, es decir, $\dim Ker(f) \geq 1$."

---

6. *(1 punto)*

Sea $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y - z = 0\}$

- Calcula el complemento ortogonal de W con el producto escalar habitual.
- Calcula la proyección ortogonal del vector $u = (1, 1, 1)$ sobre W.

---

7. *(1,5 puntos)*

Indica si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Justifica tu respuesta.

"Si A y B son dos matrices cuadradas 3×3, reales y equivalentes, entonces A y B son semejantes ".

---

8. *(1 punto)*

Indica si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Justifica tu respuesta.

"Se consideran las matrices reales $A = \begin{pmatrix} 2015 & 2016 \\ 2016 & 2015 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2015 & 2016 \\ 0 & 2015 \end{pmatrix}$. Entonces A y B son matrices diagonalizables."

La Peña del Fraile con forma de monolito se encuentra en un pequeño pueblo cántabro. Según la leyenda una noche el fuerte viento la arranco y la desplazo cientos de metros hasta el centro del pueblo, también se dice que un tal Rubio (el de la Colasa) la subió y la colocó casi en el mismo lugar. Casi nadie se cree esta historia, y ahora solámente los más pequeños la cuentan asombrados. Es conocido que la raiz cuadrada del determinante de la matriz por su traspuesta es el volumen del paralelepípedo fundamental formado por su vectores columna. Después de computar en el ejercicio 3 el determinante de la matriz Peña del Fraile, quizás la leyenda no sea tan rocambolesca. Y quizás, también, otro día hablemos de nuevo de esta desconocida roca y de los autovectores de su matriz.