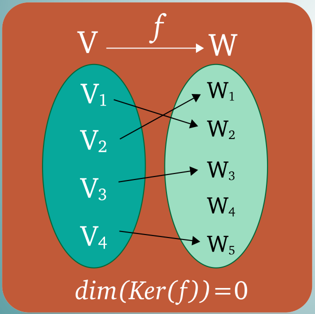
Álgebra

Tema 1. Matrices



Rodrigo García Manzanas
Neila Campos González
Ana Casanueva Vicente

Departamento de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación

Contenidos

MATRICES

DEFINICIÓN

Una matriz no es más que un conjunto de elementos (normalmente números) dispuestos en filas y columnas

$$A = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

El índice i hace referencia a las filas y el j a las columnas. Una matriz A con m filas y n columnas se denota como $A_{m\times n}$ y se dice que es de **tamaño** $m \times n$. Su **dimensión** es igual al número de elementos que contiene: $m \times n$

Ejemplos:

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

tamaño 2×3, dimensión 6

$$A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

tamaño 3×2, dimensión 6

TIPOS DE MATRICES

Atendiendo a su tamaño:

- Matriz rectangular: $m \neq n$
- Matriz fila: $m = 1$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
- Matriz columna: $n = 1$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
- Matriz **cuadrada**: $m = n$ (**orden**), $A_{2\times 2} = A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Atendiendo a sus elementos:

- Matriz real: $a_{ij} \in \mathbb{R}, \ \forall \, i, j$
- Matriz compleja: $\exists$ algún $a_{ij} \in \mathbb{C}$
- Matriz nula: $a_{ij} = 0, \ \forall \, i, j$

Tipos de matrices

Matrices cuadradas

- Matriz diagonal $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ → en rojo: **diagonal principal**
- Matriz identidad $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ → **unos** en la diagonal principal
- Matriz triangular superior $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- Matriz triangular inferior $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- Matriz estrictamente triangular (superior) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- Matriz simétrica $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 8 & 2 \\ 3 & 2 & 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \, \forall \, i \neq j$
- Matriz antisimétrica $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji} \, \forall \, i \neq j; \, a_{ii} = 0 \, \forall \, i$

En las matrices cuadradas, se llama **traza** a la suma de los elementos de la diagonal principal.

Por ejemplo, $tr \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1 + 4 = 5$

OPERACIONES BÁSICAS CON MATRICES

Sean A y B matrices del mismo tamaño

- A y B son iguales si y sólo si $a_{ij} = b_{ij}, \; \forall \, i, j$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

- $A \pm B = C \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}, \; \forall \, i, j$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

- α escalar $\in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha A = \{\alpha a_{ij}\}, \; \forall \, i, j$

$$-4 \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & -4 \\ -16 & 8 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}$$

SUMA DE MATRICES

Sean $A, B, C, O \in \mathbb{M}_{m\times n}$, siendo O la matriz nula

Propiedades:

- Asociativa

  $A + (B + C) = (A + B) + C$

- Conmutativa

  $A + B = B + A$

- Elemento neutro

  $A + O = O + A = A$

- Elemento opuesto

  $A + (-A) = O$

Producto de un escalar por una matriz

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $A, B \in \mathbb{M}_{m\times n}$

Propiedades:

- Asociativa respecto del producto por escalares
  $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
- Conmutativa
  $\alpha A = A\alpha$
- Distributiva respecto de la suma de matrices
  $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$
- Distributiva respecto de la suma de escalares
  $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$

PRODUCTO DE MATRICES

Para que dos matrices A y B se puedan multiplicar, el número de columnas de A tiene que coincidir con el de filas de B. En estas circunstancias, se define el producto AB como otra matriz C que tiene tantas filas como A y columnas como B

$$\underbrace{(m \times n)}_{\text{tamaño de } A} \cdot \underbrace{(n \times p)}_{\text{tamaño de } B} = \underbrace{(m \times p)}_{\text{tamaño de } C}$$

Los elementos de C se calculan del siguiente modo:

$$AB = C = \{c_{ij}\} \mid c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}, \ \forall i, j$$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) & 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + (-2) \cdot (-2) & 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + (-2) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$$

PRODUCTO DE MATRICES

Sean $A, B, C \in \mathbb{M}_{m \times n}$

Propiedades (I):

- Asociativa
  $A(BC) = (AB)C$
- Distributiva respecto de la suma de matrices
  $A(B + C) = AB + AC$
  $(B + C)A = BA + CA$
- El producto de matrices no siempre es conmutativo. De hecho, en general, $AB \neq BA$

  Ejemplo: Calcula AB y BA para las siguientes matrices:

  $$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

  Cuando dos matrices verifican que $AB = BA$, se dicen *conmutativas*. Si verifican que $AB = -BA$, se dicen *anticonmutativas*

PRODUCTO DE MATRICES

Sean $A, B, C \in \mathbb{M}_{m\times n}$ y O la matriz nula

Propiedades (II):

- El producto de matrices tiene divisores de O

  En general, $AB = O \nRightarrow A = O$ y/o $B = O$

  Ejemplo: Calcula AB para las siguientes matrices:

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- El producto de matrices no verifica la propiedad de simplificación

  En general, $AB = AC \nRightarrow B = C$

  Ejemplo: Calcula AB y AC para las siguientes matrices:

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

PRODUCTO DE MATRICES

Sean $A, B, C \in \mathbb{M}_{nxn}$ (matrices **cuadradas**)

Propiedades:

- El producto de dos matrices triangulares, ambas superiores (inferiores), es otra matriz triangular superior (inferior)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \\ 16 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

- El producto de dos matrices diagonales es otra matriz diagonal que se obtiene multiplicando, elemento a elemento, las dos diagonales

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \longleftarrow \text{el producto de matrices diagonales es conmutativo}$$

- Para la matriz identidad, se verifica $A_{m\times n} I_n = A_{m\times n}$, $I_m A_{m\times n} = A_{m\times n}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

- Potencia de una matriz cuadrada

$$A^k = \underbrace{AA\cdots AA}_{k \text{ veces}}$$

Por convenio: $A^0 = I$

MATRIZ TRANSPUESTA

Dada una matriz cualquiera A, se llama **transpuesta** (A^t) a la matriz que resulta de cambiar ordenadamente las filas por las columnas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

- $(A^t)^t = A$
- $(\lambda A)^t = \lambda A^t, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- $(A \pm B)^t = A^t \pm B^t$
- $(AB)^t = B^t A^t$
- A simétrica $\Leftrightarrow A = A^t$
- A antisimétrica $\Leftrightarrow -A = A^t$

Matriz transpuesta

Teoremas

1. Dada una matriz cuadrada A, $A + A^t$ es una matriz simétrica
2. Dada una matriz cuadrada A, $A - A^t$ es una matriz antisimétrica
3. Toda matriz cuadrada A se puede expresar de forma única como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica
4. Dada una matriz cualquiera A, AA^t y A^tA son matrices simétricas

Ejercicio:

1. Demuestra los cuatro teoremas anteriores
2. Expresa la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica
3. Halla una matriz simétrica a partir de $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

DETERMINANTES

A toda matriz **cuadrada** A se le puede asociar un número llamado **determinante**, que se representa como $|A|$. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{-10}$$

Cálculo del determinante:

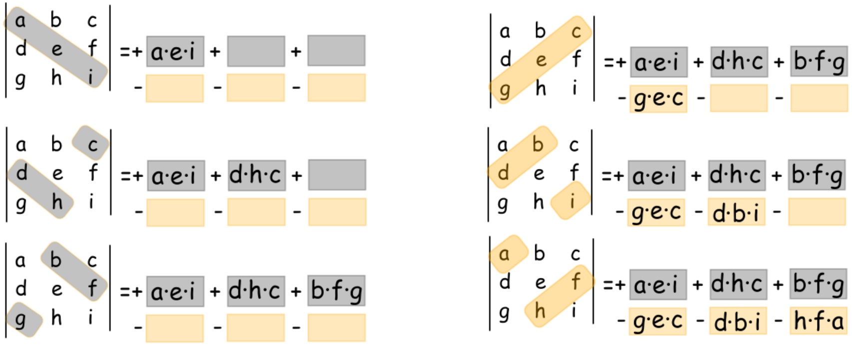
Dependiendo del tamaño y estructura de la matriz, se emplean distintos métodos:

- Método de Sarrus
- Método de los adjuntos
- Método de los pivotes

DETERMINANTES

Método de Sarrus

Suele emplearse para el cálculo de determinantes de orden **dos o tres**.



Ejercicio: Calcula los siguientes determinantes

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

DETERMINANTES

Método de los adjuntos (o cofactores)

Suele emplearse para el cálculo de determinantes de orden **superior a tres**.

DEFINICIONES

Menor: Dada una matriz cuadrada A de orden n, se llama menor (o menor complementario) del elemento a_{ij} al determinante de orden $n-1$ que resulta de suprimir la fila i y la columna j en A. Lo llamaremos m_{ij}. **Adjunto** (del elemento a_{ij}) $\rightarrow$ $\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}}$

A partir de estas definiciones se puede calcular el determinante de orden n como la **suma de los productos de los elementos de una fila o columna por sus respectivos adjuntos**.

desarrollo por fila

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - (-5)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= 0 + 2[(3)(4) - (-2)(1)] + (5)[(3)(1) - (-2)(2)] \\ &= 2(12+2) + 5(3+4) \\ &= 2(14) + 5(7) \\ &= 28 + 35 \\ &= 63 \end{aligned}$$

desarrollo por columna

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - (-5)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (1)[(0)(1) - (-2)(2)] + (5)[(3)(1) - (-2)(2)] + 4[(3)(2) - (0)(2)] \\ &= (1)(0+4) + 5(3+4) + 4(6-0) \\ &= (1)(4) + 5(7) + 4(6) \\ &= 4 + 35 + 24 \\ &= 63 \end{aligned}$$

Ejercicio: Calcula el determinante $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{-3} & \mathbf{-2} \end{vmatrix}$

Determinantes

Método de los pivotes

Teorema

Si a los elementos de una fila o columna se suman los correspondientes de otras paralelas multiplicados por un número, el valor del determinante no varía

Basándonos en esta propiedad, podemos ir operando para obtener un determinante cuyo valor sea el mismo pero en el que todos los elementos salvo uno de una fila o columna sean nulos. A partir de ahí, se puede aplicar fácilmente el método de los adjuntos.

Ejercicio: Calcula el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Sugerencia: Primera operación: $F_3 - F_1$, segunda operación: $F_5 - F_1$

DETERMINANTES

Propiedades:

- Si todos los elementos de una fila o columna son nulos, el determinante es nulo
- Si una fila o columna es combinación lineal de las demás, el determinante es nulo. Lógicamente, si hay dos filas o columnas iguales, el determinante es nulo
- Si intercambiamos dos filas o columnas, el valor del determinante cambia de signo
- Para multiplicar un número por un determinante, se multiplica dicho número por los elementos de **una** (y sólo una) fila o columna cualquiera
- El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal
- $|A^t| = |A|$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda A| = \lambda^n |A|$, donde n es el orden de la matriz A
- $|AB| = |A||B|$
- $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$, donde A^{-1} es la matriz inversa (la veremos a continuación)

MATRIZ INVERSA

Dada una matriz **cuadrada** A decimos que tiene inversa, A^{-1}, si

$$\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = I}$$

Matriz **regular** (o invertible): Aquella que tiene inversa

Matriz **singular**: No tiene inversa

Propiedades:

- Si existe, A^{-1} es única
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}, \; \forall\, \lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$
- $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA

DEFINICIÓN

Matriz adjunta: Dada una matriz cualquiera A, se llama adjunta, $Adj(A)$, a la matriz que resulta de sustituir cada elemento de A por su correspondientes adjunto

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&3&0\\4&0&5\end{pmatrix}\rightarrow \mathrm{Adj}\,(A)=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}3&0\\0&5\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0&0\\4&5\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0&3\\4&0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0&2\\0&5\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&0\\4&0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0&2\\3&0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&2\\0&0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&0\\0&3\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&0&-12\\0&-3&0\\-6&0&3\end{pmatrix}$$

A partir de la matriz adjunta se calcula la inversa como

$$\boxed{A^{-1}=\frac{(Adj(A))^t}{|A|}},$$ A tiene inversa si y sólo si $|A|\neq 0$

Ejercicio: Calcula la inversa de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix}1&-1&-3\\2&-2&1\\-1&3&-1\end{pmatrix}$$

Matrices ortogonales

Una matriz cuadrada A es **ortogonal** si

$$\boxed{AA^t = A^tA = I}$$

Propiedades:

- La inversa de una matriz ortogonal es su transpuesta $\boxed{A^t = A^{-1}}$, y es ortogonal también
- El determinante de una matriz ortogonal es 1 o -1
- El producto de matrices ortogonales es ortogonal

Ejercicio: Demuestra las tres propiedades anteriores.

Matrices elementales

Se llama **matriz elemental** a una matriz **cuadrada** que resulta de efectuar una **operación elemental** sobre una fila o columna en la matriz identidad.

Operaciones elementales

- Tipo 1: Cambiar entre sí dos filas o columnas
- Tipo 2: Multiplicar una fila o columna por un número real $\lambda \neq 0$
- Tipo 3: Sumar a una fila o columna, otra fila o columna multiplicada por un número real $\lambda \neq 0$

Ejemplos de matrices elementales:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{1,2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{3,2}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

En este curso, trabajaremos siempre con operaciones elementales **por filas**. Representaremos las matrices elementales con la letra E

MATRICES ELEMENTALES

TEOREMA

Si en una matriz A efectuamos una operación elemental **por filas** la matriz que obtenemos es EA, donde E es la matriz elemental resultante de efectuar la misma operación elemental (sobre la matriz identidad)

Ejemplo:

Partimos de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{2,1}(-2)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{2,1}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$EA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrices elementales

Operaciones elementales inversas

Son aquellas que anulan la acción de una operación elemental

Operación elemental (por filas)	**Operación elemental inversa (por filas)**
Cambiar la fila i por la j	Cambiar la fila j por la i
Multiplicar una fila por $\lambda \neq 0$	Multiplicar una fila por $\frac{1}{\lambda}$
Sumar a la fila i, la j mutiplicada por $\lambda \neq 0$	Sumar a la fila i, la j mutiplicada por $-\lambda$

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{1,3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{3,1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{2,3}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{2,3}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Matrices elementales

Teorema

Cuando aplicamos una *operación elemental* sobre I, obtenemos una matriz elemental E. Cuando aplicamos una *operación elemental inversa* sobre I, obtenemos la inversa de E, es decir, E^{-1}. Por tanto, toda matriz elemental E tiene inversa, que es también una matriz elemental

Ejercicios:

1. Dadas las matrices elementales 3×3 que se obtienen de realizar las operaciones elementales $F_{1,3}$, $F_2(2)$ y $F_{2,3}(-3)$, halla sus matrices inversas
2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$:
   - halla las matrices elementales tales que $E_2 E_1 A = I$
   - halla las matrices E_1^{-1} y E_2^{-1}
   - escribe A como producto de matrices elementales
   - escribe A^{-1} como producto de matrices elementales

MATRICES EQUIVALENTES

TEOREMA

Si partiendo de una matriz A podemos llegar a otra B mediante operaciones elementales (por filas), también podremos volver a A desde B realizando las operaciones elementales inversas en orden inverso. Se dice entonces que A y B son equivalentes (por filas)

$$E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A = B \Leftrightarrow A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1} B$$

Ejercicio:

Demuestra que las matrices A y B son equivalentes por filas

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Sugerencia: Aplícale a A las operaciones elementales $F_{1,2}$ y $F_{3,1}(-1)$

CÁLCULO DE LA INVERSA MEDIANTE OPERACIONES ELEMENTALES

TEOREMA

Las operaciones elementales que nos sirven para convertir una matriz cuadrada A en I, efectuadas sobre I, nos dan A^{-1}

Ejercicio:

Calcula, mediante operaciones elementales, la inversa de la siguiente matriz (si existe)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Procedimiento: Comienza formando la matriz $(A|I)$, en este caso $\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. A partir de ahí, aplica las operaciones elementales necesarias: por ejemplo $F_1(-1)$, $F_{3,1}(-1)$, $F_{3,2}(-1)$, $F_3(\frac{1}{2})$, $F_{1,3}(1)$, $F_{1,2}(1)$. Acabarás llegando a la matriz $(I|A^{-1})$

Formas escalonada y reducida de una matriz

Forma escalonada

Se llama forma **escalonada** por filas de una matriz A a otra matriz que se obtiene a partir de A mediante operaciones elementales y que verifica:

- Si tiene filas cuyos elementos son todos nulos, están en las filas inferiores
- El primer elemento distinto de cero de una fila (empezando por la izquierda) se llama **pivote**, y a su columna, **columna pivotal**
- Dadas dos filas sucesivas, el pivote de la segunda fila está más a la derecha que el de la primera

Ejercicio: Di si son formas escalonadas o no las siguientes

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

FORMAS ESCALONADA Y REDUCIDA DE UNA MATRIZ

En la práctica, para obtener una forma escalonada de una matriz dada se utiliza la **eliminación gaussiana**:

1. Buscamos en la primera columna un elemento distinto de cero, que llevaremos a la primera fila. Este elemento será el primer pivote. A continuación, mediante operaciones elementales, haremos ceros por debajo de él
2. Buscamos en la segunda columna un elemento distinto de cero en la segunda o demás filas inferiores. Operamos hasta tener un segundo pivote en esa fila, y hacemos ceros por debajo de él
3. Seguimos recorriendo el resto de columnas hasta no encontrar más pivotes

Ejemplo: Halla una forma escalonada de la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Sugerencia: Puedes aplicar, en este orden, las operaciones elementales $F_{2,1}(-1)$, $F_{3,1}(-2)$, $F_{4,1}(-1)$, $F_{4,2}$, $F_{4,3}(-1)$

FORMAS ESCALONADA Y REDUCIDA DE UNA MATRIZ

FORMA REDUCIDA

Se llama forma escalonada **reducida** (o simplemente reducida) por filas de la matriz A a toda matriz escalonada obtenida mediante operaciones elementales por filas sobre A en la que los pivotes son 1 y los demás elementos de la columna pivotal 0.

Ejercicio: Di si son formas escalonadas *reducidas* o no las siguientes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Nota: Dependiento del orden de actuación y las operaciones realizadas sobre la matriz original, se pueden obtener diferentes formas escalonadas (de hecho, infinitas). Sin embargo, la forma reducida es única.

RANGO

DEFINICIÓN

El **rango** de una matriz es el número de filas con algún elemento distinto de cero que hay en cualquier forma escalonada por filas, o, lo que es lo mismo, el *número de columnas pivotales*. Como veremos más adelante, esta definición equivale a decir que el rango de una matriz es el número de filas (o columnas) que son linealmente independientes. Por último, también se puede ver el rango como el orden de la mayor submatriz cuyo determinante sea distinto de cero.

Ejercicio: ¿Cuál es el rango de las siguientes matrices?

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 10 & 15 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 9 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

FACTORIZACIÓN LU

TEOREMA

Dada una matriz A, se puede encontrar mediante la aplicación de operaciones elementales del tipo 3 (*quedarían excluídas el intercambio de filas y la multiplicación de una fila por un escalar*) una factorización de la forma $\boxed{A = LU}$, donde L es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal y U es una matriz triangular superior, en la que la primera fila coincide con la primera fila de A

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * \end{pmatrix}$$

Si A es **invertible**, la factorización LU es **única** (en caso contrario, podría no serlo). Esta factorización es útil para el cálculo de determinantes e inversas (en el caso de matrices A cuadradas), así como para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (lo veremos más adelante)

Razonamiento: Hemos visto que, a partir de A, se puede llegar a una matriz **escalonada** U aplicando operaciones elementales, por lo que:

$$E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A = U \Rightarrow A = \underbrace{(E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1)^{-1}}_{L = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1}} U$$

Por tanto, en teoría el problema se reduce al cálculo de una serie de matrices elementales inversas

FACTORIZACIÓN LU

Sin embargo, en la práctica no hace falta calcular estas matrices, sino que se emplea el algoritmo de los *multiplicadores cambiados de signo*, que se ilustra a continuación. Nótese que en este algoritmo L es inicialmente la matriz identidad.

Ejemplo: Halla **la** factorización LU de la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 4 & -5 & 4 \\ -6 & -3 & -14 \end{pmatrix}$$

Proceso de construcción de la matriz U:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 4 & -5 & 4 \\ -6 & -3 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{2,1}(2)} \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -6 & -3 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{3,1}(-3)}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -15 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{3,2}(5)} \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = U$$

Proceso de construcción de la matriz L:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{2,1}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{3,1}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{3,2}(5)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} = L$$

FACTORIZACIÓN LU

Hay matrices que no se pueden factorizar mediante el método que acabamos de ver. Bastaría por ejemplo con que el elemento a_{11} de A fuese un 0. Para solventar este tipo de situaciones se cuenta con una generalización de la factorización $A = LU$, la $\boxed{PA = LU}$ (que **no es única**), en la que P es una matriz de permutaciones. A continuación se ilustra el procedimiento para obtener **una** factorización $PA = LU$ (en el que sólo se permiten operaciones elementales de los tipos 1 y 3) para un caso en el que se realiza un único intercambio de filas. Nótese que, inicialmente, tanto P como L son la matriz identidad.

Ejemplo: Halla **una** factorización $PA = LU$ de la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & -6 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Proceso de construcción de la matriz U:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & -6 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{1,3}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{2,1}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = U$$

Proceso de construcción de la matriz P:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{1,3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{2,1}(-3)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P$$

Proceso de construcción de la matriz L:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{1,3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{2,1}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L$$

FACTORIZACIÓN LU

Veamos a continuación un caso en el que se realizan dos intercambios de filas para llegar a una factorización $PA = LU$.

Ejemplo: Halla **una** factorización $PA = LU$ de la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Proceso de construcción de la matriz U:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{1,2}} \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{3,1}(3)} \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 21 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{2,3}} \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 0 & 21 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = U$$

Proceso de construcción de la matriz P:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{1,2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{3,1}(3)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{2,3}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P$$

Proceso de construcción de la matriz L:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{1,2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{3,1}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{2,3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L$$

FACTORIZACIÓN DE CHOLESKY

TEOREMA

Dada una matriz real A, **simétrica** y **definida positiva***, se puede encontrar una matriz triangular inferior L tal que $\boxed{A = LL^t}$

**Criterio de Sylvester*: Una matriz simétrica se dice definida positiva cuando todos sus menores principales (incluyendo su propio determinante) son positivos.

Ejemplo: Halla una factorización de Cholesky de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

Se trata de buscar una matriz $L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix}$ tal que

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} \\ 0 & l_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{21} \\ l_{21}l_{11} & l_{21}^2 + l_{22}^2 \end{pmatrix}$. La factorización de Cholesky **no es única**. En este caso, una de las soluciones posibles que obtendríamos igualando términos sería $\{l_{11} = 1, l_{21} = 2, l_{22} = \pm 2\}$. Se puede comprobar, por ejemplo, que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{L^t}$. Otra opción igualmente válida sería $\{l_{11} = -1, l_{21} = -2, l_{22} = \pm 2\}$

Factorización de Cholesky

En general, los elementos de la matriz triangular inferior L, l_{ij}, se pueden obtener de acuerdo a las siguientes fórmulas, donde a_{ij} son los términos de la matriz A:

$$L : \begin{cases} l_{jj} = \pm\sqrt{a_{jj} - \displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2} \\ l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}} \left(a_{ij} - \displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk} \right), i > j \end{cases}$$

Ejercicio: Halla una factorización de Cholesky de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Al igual que la factorización LU, la factorización de Cholesky resulta útil para el cálculo de determinantes, inversas y para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (lo veremos más adelante)