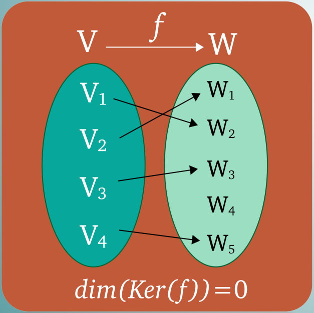
Álgebra

Tema 2. Sistemas de ecuaciones lineales



Rodrigo García Manzanas
Neila Campos González
Ana Casanueva Vicente

Departamento de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación

Contenidos

SISTEMAS DE ECUACIONES

En general, una ecuación **lineal** es cualquiera de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, donde las **incógnitas** $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ están elevadas a uno y no aparecen en funciones trascendentes ($ln(x)$, $sen(x)$, $cos(x)$, e^x...) y/o multiplicadas entre sí.

A menudo se necesita resolver varias ecuaciones lineales que han de cumplirse a la vez (**sistema lineal**). Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas tiene la forma:

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

donde $\left\{a_{i=\{1,\ldots,m\}\, j=\{1,\ldots,n\}}\right\} \in \mathbb{R}$ son los **coeficientes** y $\left\{b_{k=\{1,\ldots,m\}}\right\} \in \mathbb{R}$ los **términos independientes**. Lógicamente, todos los $\left\{a_{ij}\right\}$ no pueden ser nulos a la vez. Si todos los $\left\{b_{k=\{1,\ldots,m\}}\right\}$ son nulos, el sistema se denomina **homogéneo**.

Ejemplo: ¿Son lineales los siguientes sistemas?

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 3x + 2y - 5z & = & -4 \\ -x - 2y + 5z & = & 2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{r} x - y + 2z = 0 \\ 3x + y - 3z = 0 \\ -2x + 3y - 4z = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 3x - ln(y) & = & 1 \\ -2x + 4e^y & = & -2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{r} 2x - y + 3z = 2 \\ -3x + \frac{2}{y} - z = 1 \\ y + 2z = 4 \end{array} \right.$$

FORMA MATRICIAL DE UN SISTEMA DE ECUACIONES

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A\vec{x} = \vec{b}}$$

A: matriz de coeficientes; $\vec{x}$: vector de incógnitas; $\vec{b}$: vector de términos independientes

TEOREMA

Toda matriz representa un sistema lineal y todo sistema lineal se puede representar por su **matriz ampliada**, $A^* = \left(A \;\middle|\; \vec{b}\right)$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Soluciones de un sistema

Una solución de un sistema es un conjunto de valores para las n incógnitas que satisfacen simultáneamente las m ecuaciones

Teorema

Cualquier sistema de ecuaciones lineales tiene: **ninguna** solución, una **única** solución o **infinitas** soluciones

- Sistema **incompatible**: No tiene solución

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 3 \\ 2x+2y & = & 2 \end{array}\right.$$

- Sistema **compatible**: Tiene solución

Determinado: Solución única

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-3y & = & 1 \\ -x+2y & = & 3 \end{array}\right.$$

Indeterminado: Infinitas soluciones

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-3y+z & = & 0 \\ x-2y+3z & = & 0 \end{array}\right.$$

Nota: Todo sistema lineal homógeneo es compatible, ya que tiene, como mínimo, la **solución trivial** $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \vec{0}$

Teorema de Rouché-Fröbenius

Dado un sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas, la condición necesaria y suficiente para que sea compatible (tenga solución) es que $rg(A) = rg(A^*)$

- $rg(A) \neq rg(A^*) \Rightarrow$ Incompatible
- $rg(A) = rg(A^*) \Rightarrow$ Compatible
  - Determinado si $rg(A) = rg(A^*) = n$
  - Indeterminado si $rg(A) = rg(A^*) < n$
    - $rg(A)$: número de incógnitas principales
    - $n - rg(A)$: número de parámetros libres

Sistemas equivalentes

Dos sistemas lineales con las mismas incógnitas son **equivalentes** si tienen la misma solución

Teorema

A partir de un sistema lineal cualquiera se puede obtener otro sistema equivalente efectuando *operaciones elementales*

Operación elemental en una matriz	Operación elemental en un sistema
Intercambiar dos filas	Intercambiar dos ecuaciones
Multiplicar una fila por $\lambda \neq 0$	Multiplicar una ecuación por $\lambda \neq 0$
Sumar a una fila, otra fila mutiplicada por $\lambda \neq 0$	Sumar a una ecuación, otra ecuación mutiplicada por $\lambda \neq 0$

Nota: Para que dos sistemas sean equivalentes, no es necesario que tengan el mismo número de ecuaciones

Ejemplo: Dado el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+2y & = & 6 \\ -x+y & = & 4 \end{array}\right.$$

son sistemas equivalentes:

$$F_{1,2}\quad \left\{\begin{array}{rcl} -x+y & = & 4 \\ 2x+2y & = & 6 \end{array}\right. \qquad F_1(1/2)\quad \left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 3 \\ -x+y & = & 4 \end{array}\right. \qquad F_{2,1}(1/2)\quad \left\{\begin{array}{rcl} 2x+2y & = & 6 \\ 2y & = & 7 \end{array}\right.$$

MÉTODO DE GAUSS (O ELIMINACIÓN GAUSSIANA)

Consiste en convertir cualquier sistema lineal, mediante operaciones elementales, en otro equivalente triangular o casi triangular, para después resolverlo por sustitución hacia atrás. En otras palabras, se basa en la transformación de A^* en una forma **escalonada**

Ejemplo 1:

$$\left\{\begin{array}{rcr} x-y & = & 3 \\ 2x+y & = & 3 \end{array}\right.$$

$$A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{2,1}(-2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x-y & = & 3 \\ 3y & = & -3 \end{array}\right.$$

Solución: $(x, y) = (2, -1)$

Sistema compatible determinado

$$rg(A) = rg(A^*) = 2 = n$$

Ejemplo 2:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y & = & 3 \\ 2x+y & = & 3 \\ 2x+y & = & 4 \end{array}\right.$$

$$A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_{3,1}(-2)]{F_{2,1}(-2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{3,2}(-1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

La tercera ecuación nos dice que $0 = 1 \Rightarrow$ No tiene solución

Sistema incompatible

$$rg(A) = 2 \neq rg(A^*) = 3$$

Ejemplo 3:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y+z & = & 3 \\ 2x+y+2z & = & 3 \end{array}\right.$$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{2,1}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x-y+z & = & 3 \\ 3y & = & -3 \end{array}\right.$$

Sistema con más variables (3) que ecuaciones independientes (2),
por tanto habrá 3-2 (1) parámetro libre
Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)
$rg(A) = rg(A^*) = 2 < n = 3$

Convenio: tomar como incógnitas principales las correspondientes a las columnas pivotales (x, y) y como parámetros libres las correspondientes a las columnas no pivotales (z)

Solución (en forma paramétrica):

$$\left.\begin{array}{rclcl} z & = & \alpha & & \\ y & = & -1 & & \\ x & = & 3+y-z & = & 2-\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow (x, y, z) = (2-\alpha, -1, \alpha), \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}$$

Método de Gauss-Jordan

Consiste en convertir cualquier sistema lineal en otro equivalente cuya matriz ampliada A^* sea escalonada **reducida** por filas

Ejemplo:

$$\left\{\begin{array}{rcr} 4x+16y+64z & = & 100 \\ 2x+4y+8z & = & 6 \\ x+y+z & = & -2 \end{array}\right.$$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 16 & 64 & 100 \\ 2 & 4 & 8 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2(1/2)]{F_1(1/4)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 16 & 25 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_{3,1}(-1)]{F_{2,1}(-1)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 16 & 25 \\ 0 & -2 & -12 & -22 \\ 0 & -3 & -15 & -27 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2(1/2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 16 & 25 \\ 0 & -1 & -6 & -11 \\ 0 & -3 & -15 & -27 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{3,2}(-3)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 16 & 25 \\ 0 & -1 & -6 & -11 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3(1/3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 16 & 25 \\ 0 & -1 & -6 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{2,3}(6)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 16 & 25 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{1,3}(-16)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2(-1)]{F_{1,2}(4)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Solución: $(x, y, z) = (-3, -1, 2)$

Sistema compatible determinado

$$rg(A) = rg(A^*) = n = 3$$

MÉTODO DE CRAMER

Este método puede aplicarse para resolver sistemas **cuadrados** (mismo número de ecuaciones que de incógnitas, n), en los cuales $A_{n\times n}$ sea **invertible**. En este caso, la solución *única* (nótese que un sistema de Cramer será siempre compatible determinado) puede obtenerse como $x_i = \frac{|A_{x_i}|}{|A|}$, donde $|A_{x_i}|$ es el determinante que resulta de cambiar, en A, la columna correspondiente a la incógnita x_i por la de términos independientes

$$\left\{\begin{array}{rcr} x-2y+z & = & 0 \\ 2y-8z & = & 8 \\ -4x+5y+9z & = & -9 \end{array}\right.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 2 \qquad |A_x| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -8 \\ -9 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 58$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & -8 \\ -4 & -9 & 9 \end{vmatrix} = 32 \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \\ -4 & 5 & -9 \end{vmatrix} = 6$$

$$x = \frac{58}{2} = 29; \quad y = \frac{32}{2} = 16; \quad z = \frac{6}{2} = 3$$

Solución: $(x,y,z) = (29,16,3)$

Método de la factorización LU

Si la matriz A de un sistema lineal $A\vec{x} = \vec{b}$ es *invertible* y factorizable en la forma $A = LU$, podemos utilizar las matrices triangulares L y U para resolverlo fácilmente.

Ejemplo: Utiliza la factorización LU para resolver el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{aligned} 2x + 4y - 4z &= 12 \\ x - 4y + 3z &= -21 \\ -6x - 9y + 10z &= -24 \end{aligned}\right.$$

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 3 \\ -6 & -9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -21 \\ -24 \end{pmatrix}$$

Aplicando las operaciones elementales $F_{2,1}(-\frac{1}{2})$, $F_{3,1}(3)$ y $F_{3,2}(\frac{1}{2})$ sobre A podemos factorizarla en la forma LU, con:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -3 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 0 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

A partir de esta factorización, podemos desdoblar el sistema original en dos

$$\left.\begin{array}{r} A\vec{x}=\vec{b} \\ A=LU \end{array}\right\} \Rightarrow LU\vec{x}=\vec{b} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} L\vec{y}=\vec{b} \\ U\vec{x}=\vec{y} \end{array}\right\}$$

Estos dos nuevos sistemas son triangulares y en consecuencia se resuelven muy fácilmente:

$$L\vec{y}=\vec{b}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -3 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 \\ -21 \\ -24 \end{pmatrix}$$

$$a=12;\ b=-27;\ c=-3/2$$

$$U\vec{x}=\vec{y}\Rightarrow\begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 0 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 \\ -27 \\ -3/2 \end{pmatrix}$$

Solución: $\{z=-3, y=2, x=-4\}$

Método de la factorización de Cholesky

Si la matriz A de un sistema lineal $A\vec{x} = \vec{b}$ es *simétrica* y *definida positiva* se puede factorizar en la forma $A = LL^t$, donde los elementos de la matriz triangular inferior L pueden obtenerse de acuerdo a las siguientes fórmulas:

$$L : \begin{cases} l_{jj} = \pm\sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2} \\ l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk} \right), i > j \end{cases}$$

Una vez hallada L, desdoblaríamos el sistema original en dos

$$\left.\begin{array}{r} A\vec{x} = \vec{b} \\ A = LL^t \end{array}\right\} \Rightarrow LL^t\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} L\vec{y} = \vec{b} \\ L^t\vec{x} = \vec{y} \end{array}\right\}$$

Estos dos nuevos sistemas son triangulares, por lo que se resuelven muy fácilmente

Ejemplo: Utiliza una factorización de Cholesky para resolver el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcr} 4x+2y+z & = & 2 \\ 2x+2y & = & -3 \\ x+3z & = & 5 \end{array}\right.$$

$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, que es simétrica y definida positiva. Por tanto, podríamos buscar una matriz $L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$ tal que $A = LL^t$. Aplicando las fórmulas, podríamos tener:

$l_{11} = \sqrt{4} = 2; l_{21} = \frac{1}{2}(2) = 1; l_{22} = \sqrt{2-1^2} = 1; l_{31} = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2};$

$l_{32} = \frac{1}{1}(0-2\cdot 1) = -\frac{1}{2}; l_{33} = \sqrt{3 - \left(\frac{1}{2}^2 + \frac{1}{2}^2\right)} = \sqrt{\frac{5}{2}}$. Por tanto,

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \sqrt{\frac{5}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{5}{2}} \end{pmatrix}$$

Ya podríamos construir dos sistemas triangulares cuya resolución es casi inmediata:

$$L\vec{y} = \vec{b} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \sqrt{\frac{5}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$a = 1; \; b = -4; \; c = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$L^t\vec{x} = \vec{y} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{5}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ \sqrt{\frac{5}{2}} \end{pmatrix}$$

Solución: $\{z = 1, y = -3.5, x = 2\}$

MÉTODOS ITERATIVOS

Los métodos iterativos son especialmente adecuados para la resolución de sistemas **cuadrados** grandes y/o cuyas matrices son dispersas (tienen muchos ceros). Estos métodos consisten en definir una sucesión de vectores $\{\vec{x}_0, \vec{x}_1, ...\}$ que converjan a la solución del sistema a partir de una descomposición de la matriz del mismo, A, en dos matrices M y N tales que $A = M - N$. Tendremos por tanto:

$$A\vec{x} = \vec{b} \;\Rightarrow\; (M - N)\vec{x} = \vec{b} \;\Rightarrow\; \boxed{M\vec{x} = N\vec{x} + \vec{b}}$$

TEOREMA

Si la matriz A de un sistema lineal $A\vec{x} = \vec{b}$ es **diagonalmente dominante***, un método iterativo producirá una sucesión de vectores que converge a la solución del mismo, que será **única**. En otro caso, la convergencia no está asegurada.

*Una matriz A es diagonalmente dominante si $|a_{kk}| > \sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{kj}|$, para $k = \{1, 2, ..., n\}$

Veremos dos métodos iterativos distintos: **Jacobi** y **Gauss-Seidel**.

Método de Jacobi

El método de Jacobi consiste en definir

$$\boxed{M = D} \quad \text{y} \quad \boxed{N = -(L+U)}$$

donde:

- D es una matriz diagonal con la misma diagonal que A
- L es una matriz triangular inferior en la que $l_{ij} = a_{ij}$ si $i < j$ y $l_{ij} = 0$ en caso contrario
- U es una matriz triangular superior en la que $u_{ij} = a_{ij}$ si $i > j$ y $u_{ij} = 0$ en caso contrario

Entonces, $A = M - N = D + L + U$ y el sistema $M\vec{x} = N\vec{x} + \vec{b}$ es equivalente a resolver

$$D\vec{x} = -(L+U)\vec{x} + \vec{b}$$

La sucesión se construye por tanto como:

$$\boxed{D\vec{x}_{k+1} = -(L+U)\vec{x}_k + \vec{b}} \quad \text{para } k \geq 0$$

Para ir obteniendo las sucesivas soluciones necesitaremos un vector inicial arbitrario, $\vec{x}_0$

Ejemplo: Aplica el método iterativo de Jacobi para resolver el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcc} 2x-y & = & 9 \\ x+6y-2z & = & 15 \\ 4x-3y+8z & = & 1 \end{array}\right., \quad \text{con matriz } A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & -2 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

- Formamos las matrices $D=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $L=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ y $U=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Construimos la sucesión de soluciones de acuerdo a $D\vec{x}_{k+1}=-(L+U)\vec{x}_k+\vec{b}$, es decir:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{rcr} 2x_{k+1} & = & y_k + 9 \\ 6y_{k+1} & = & -x_k + 2z_k + 15 \\ 8z_{k+1} & = & -4x_k + 3y_k + 1 \end{array}\right\}$$

- Resolvemos iterativamente, partiendo de un vector solución inicial (arbitrario), por ejemplo $\vec{x}_0 = (0, 0, 0)$. Por tanto, para $k = 0$:

$$\left.\begin{array}{rcr} 2x_1 & = & y_0 + 9 = 9 \\ 6y_1 & = & -x_0 + 2z_0 + 15 = 15 \\ 8z_1 & = & -4x_0 + 3y_0 + 1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{x}_1 = (4.5, 2.5, 0.125)$$

Nota: Fíjate en que la idea de este método es despejar una incógnita de cada ecuación

La sucesión de soluciones quedaría así:

$$\begin{gathered} \vec{x}_0 = (0, 0, 0) \\ \vec{x}_1 = (4.5, 2.5, 0.125) \\ \vec{x}_2 = (5.75, 1.7916, -1.1875) \\ \vec{x}_3 = (5.3958, 1.1458, -2.0781) \\ \vec{x}_4 = (5.0729, 0.9079, -2.1432) \end{gathered}$$

Que converge a la solución exacta, $\vec{x} = (5, 1, -2)$

Método de Gauss-Seidel

El método de Gauss-Seidel consiste en definir

$$\boxed{M = D + L} \quad \text{y} \quad \boxed{N = -U}$$

donde:

- D es una matriz diagonal con la misma diagonal que A
- L es una matriz triangular inferior en la que $l_{ij} = a_{ij}$ si $i < j$ y $l_{ij} = 0$ en caso contrario
- U es una matriz triangular superior en la que $u_{ij} = a_{ij}$ si $i > j$ y $u_{ij} = 0$ en caso contrario

Entonces, $A = M - N = D + L - U$ y el sistema $M\vec{x} = N\vec{x} + \vec{b}$ es equivalente a resolver

$$(D + L)\vec{x} = -U\vec{x} + \vec{b}$$

La sucesión se construye por tanto como:

$$\boxed{(D + L)\vec{x}_{k+1} = -U\vec{x}_k + \vec{b}} \quad \text{con } k \geq 0$$

Para ir obteniendo las sucesivas soluciones necesitaremos un vector inicial arbitrario, $\vec{x}_0$

Ejemplo: Aplica el método iterativo de Gauss-Seidel para resolver el mismo sistema del ejemplo anterior:

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2x - y & = & 9 \\ x + 6y - 2z & = & 15 \\ 4x - 3y + 8z & = & 1 \end{array}\right. , \text{ con matriz } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & -2 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

- Formamos las matrices $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Construimos la sucesión de soluciones de acuerdo a $(D + L)\vec{x}_{k+1} = -U\vec{x}_k + \vec{b}$, es decir:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{rcr} 2x_{k+1} & = & y_k + 9 \\ x_{k+1} + 6y_{k+1} & = & 2z_k + 15 \\ 4x_{k+1} - 3y_{k+1} + 8z_{k+1} & = & 1 \end{array}\right\}$$

- Resolvemos iterativamente, partiendo de un vector solución inicial (arbitrario), por ejemplo $\vec{x}_0 = (0,0,0)$. Por tanto, para $k = 0$:

$$\left.\begin{array}{rcr} 2x_1 & = & y_0 + 9 = 9 \\ 6y_1 & = & -x_1 + 2z_0 + 15 = -x_1 + 15 \\ 8z_1 & = & -4x_1 + 3y_1 + 1 = -4x_1 + 3y_1 + 1 \end{array}\right\}$$

<u>Nota</u>: Fíjate en que la idea de este método es transformar el sistema inicial en otro triangular equivalente

La sucesión de soluciones quedaría así:

$$\begin{gathered} \vec{x}_0 = (0,0,0) \\ \vec{x}_1 = (4.5, 1.75, -1.4687) \\ \vec{x}_2 = (5.375, 1.1145, -2.1445) \\ \vec{x}_3 = (5.0572, 0.9422, -2.0502) \\ \vec{x}_4 = (4.9711, 0.9881, -1.9901) \end{gathered}$$

Que converge a la solución exacta, $\vec{x} = (5, 1, -2)$.

<u>Nota</u>: De existir convergencia, Gauss-Seidel converge más rápido que Jacobi.