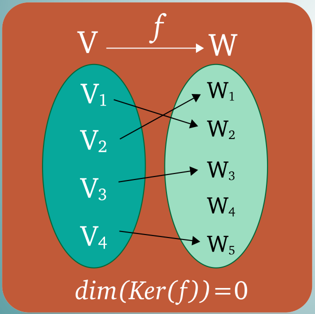
Álgebra

Tema 3. Espacios vectoriales



Rodrigo García Manzanas
Neila Campos González
Ana Casanueva Vicente

Departamento de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación

VECTORES

El concepto de **vector** en *Álgebra* es distinto al clásico que tenemos de la *Física*. En *Álgebra*, se considerará como un vector cualquier objeto tal que:

- Si a ese objeto se le suma otro del mismo tipo, se obtiene un tercero que es también del mismo tipo
- Si a ese objeto se le multiplica por un número (escalar), se obtiene otro objeto del mismo tipo

Convenio: Identificaremos con letras latinas a los vectores ($\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$...) y con letras griegas (α, β, γ...) a los escalares

Vectores

Para cualquier par de vectores $(\vec{u}, \vec{v})$ y escalares (α, β), estas dos operaciones han de cumplir ciertas **propiedades:**

- **Suma:**
  - Conmutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
  - Asociativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
  - Elemento neutro $\vec{0} \Leftrightarrow \vec{0} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
  - Elemento opuesto $-\vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} + -\vec{u} = -\vec{u} + \vec{u} = \vec{0}$
- **Producto por escalares:**
  - Asociativa: $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$
  - Distributiva respecto de la suma de escalares: $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$
  - Distributiva respecto de la suma de vectores: $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$
  - Elemento neutro $1 \Leftrightarrow 1\vec{u} = \vec{u}1 = \vec{u}$

ESPACIO VECTORIAL

ESPACIO VECTORIAL

Un **espacio vectorial** es cualquier conjunto de vectores que posea las operaciones *suma* y *producto por escalares*, cumpliendo todas las propiedades anteriores. Dicho espacio vectorial será *real* o *complejo* según sean los escalares que hacen que se cumplan esas propiedades

Ejemplos:

- $\mathbb{R}^n$, formado por todos los vectores $\vec{x}$ de n componentes $(x_1, \cdots, x_n)$ *reales*, es un espacio vectorial real. Sin embargo, no es un espacio vectorial complejo
- El conjunto de polinomios de grado ≤ 2 con coeficientes *reales*, $\mathbb{P}_2 = \{ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{R}\}$, es un espacio vectorial real. Sin embargo, no es un espacio vectorial complejo

Espacio vectorial

Ejercicios:

- Razona si son espacios vectoriales (reales o complejos) los siguientes:
  - El conjunto $\mathbb{G}_3$ de los polinomios de grado 3 (estrictamente 3)
  - El conjunto $\mathbb{M}_{2x2}$ de matrices reales cuadradas de orden 2
- Explica si $\mathbb{R}^3$, con las operaciones suma y producto por un escalar indicadas a continuación, es espacio vectorial (real):
  $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$
  $\alpha(x, y, z) = (0, \alpha y, \alpha z)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$

SUBESPACIO VECTORIAL

DEFINICIÓN

Dado un espacio vectorial U, se dice que un subconjunto S de U es un **subespacio vectorial** si contiene al vector $\vec{0}$ y al efectuar las operaciones de suma y producto por un escalar sobre vectores de S, el resultado permanece en S (se suele decir que S es *cerrado* para la suma y el producto por escalares)

- $\vec{0} \in S$
- Si $\vec{u}, \vec{v} \in S \quad \Rightarrow \quad \vec{u} + \vec{v} \in S$
- Si $\vec{u} \in S$ y α es un escalar $\quad \Rightarrow \quad \alpha\vec{u} \in S$

Nota: No haría falta comprobar el resto de propiedades (asociativa, conmutativa, etc.) porque si se cumplen en U (por ser esp. vectorial), también se cumplirán en S

SUBESPACIO VECTORIAL

Ejemplos:

- La recta $y = x$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$. Está formado por los vectores de la forma (x, x). Contiene al vector $(0, 0)$ y es cerrado para la suma y el producto por escalares:
  - $(x, x) + (x', x') = (x + x', x + x')$ también pertenece a la recta
  - $\alpha(x, x) = (\alpha x, \alpha x)$ también pertenece a la recta
- El plano XY es un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Está formado por vectores de la forma $(x, y, 0)$. Contiene al vector $(0, 0, 0)$ y es cerrado para la suma y el producto por escalares:
  - $(x, y, 0) + (x', y', 0) = (x + x', y + y', 0)$ también pertenece al plano
  - $\alpha(x, y, 0) = (\alpha x, \alpha y, 0)$ también pertenece al plano

Ejercicios:

- ¿Es un subespacio de $\mathbb{R}^2$ el conjunto de vectores de la forma $(a, 1)$?
- ¿Forma $\mathbb{P}_1$ (polinomios de grado $\leq$ 1) un subespacio de $\mathbb{P}_2$ (polinomios de grado $\leq$ 2)?
- En $\mathbb{M}_{2x2}$ (matrices reales cuadradas de orden 2), ¿es un subespacio el conjunto de las matrices simétricas?

FORMAS IMPLÍCITA Y PARAMÉTRICA

En general, podremos describir los subespacios de $\mathbb{R}^n$ de dos maneras:

- **Forma implícita:** mediante ecuaciones. Los vectores que verifican las ecuaciones son los que pertenecen al subespacio

  Nota: Cuantas más ecuaciones implícitas (independientes) haya, más pequeño será el subespacio

- **Forma paramétrica:** mediante una expresión con parámetros, que al tomar distintos valores producen todos los vectores del subespacio

  Nota: La suma del número de ecuaciones implícitas (independientes) y el número de parámetros del subespacio es igual a la **dimensión del espacio total** en el que estemos trabajando

Ejemplos:

- En $\mathbb{R}^2$ la **recta** bisectriz del primer/tercer cuadrante se escribe en implícitas como $\{y = x\}$ y en paramétricas como $\{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$
- La forma implícita del subespacio de $\mathbb{R}^3$ cuya expresión en paramétricas es $\{(\alpha, \beta, \alpha - \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, es $\{z = x - y\}$. Este subespacio es un **plano**
- En $\mathbb{R}^3$, el subespacio cero $(0, 0, 0)$ tiene como forma implícita $\{x = 0, y = 0, z = 0\}$. No tiene forma paramétrica, pues no hay nada que pueda variar, es un **punto** fijo
- $\mathbb{R}^3$ tiene como forma paramétrica $\{(\alpha, \beta, \gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$. No tiene forma implícita

Paso de la forma implícita a la paramétrica:
Basta considerar las ecuaciones implícitas como un sistema y resolverlo. Si es sistema es compatible indeterminado, su solución general (que vendrá dada en función de algún parámetro) proporcionará la expresión paramétrica

Paso de la forma paramétrica a la implícita:
Se trata de describir mediante ecuaciones cómo es el vector genérico del subespacio. Para ello, ayudará saber cuántas ecuaciones son necesarias

Ejercicios:

- Obtén la forma paramétrica del subespacio de $\mathbb{R}^3$ dado por las ecuaciones implícitas: $\{x+z=0, x+2y+z=0\}$. Geométricamente, ¿qué subespacio es este?
- Obtén las ecuaciones implícitas del subespacio de $\mathbb{R}^3$ dado por la forma paramétrica $\{(\alpha, \alpha, 3\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Geométricamente, ¿qué tipo de subespacio es este?

DEPENDENCIA LINEAL

DEFINICIÓN

Dado un conjunto de vectores $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \cdots, \vec{u_r}\}$ se llama **combinación lineal** (C.L.) a cualquier vector de la forma $\vec{u} = \alpha_1\vec{u_1} + \alpha_2\vec{u_2} + \cdots + \alpha_r\vec{u_r}$, donde $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$ son escalares llamados *coeficientes* de la C.L.

OBSERVACIÓN

La C.L. de vectores de un subespacio S está en S

Ejemplo: En $\mathbb{R}^2$, dado el subespacio $S = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, cualquier C.L. de dos elementos de S tendría la forma $\alpha(x, x) + \beta(x', x') = (\alpha x + \beta x', \alpha x + \beta x')$, que también es elemento de S.

DEPENDENCIA LINEAL

DEFINICIÓN

- Un conjunto de vectores es **linealmente dependiente** (o **ligado**) si al menos uno de ellos es C.L de los demás, o bien, el vector $\vec{0}$ es C.L. de ellos con algún coeficiente no nulo
- Un conjunto de vectores es **linealmente independiente** (o **libre**) si ninguno de ellos es C.L. de los demás, o el vector $\vec{0}$ no se puede expresar como C.L. de ellos a no ser que todos los coeficientes sean nulos

Ejercicio: Comprueba si son linealmente dependientes los siguientes conjuntos de vectores:

- $\vec{u} = (1, 1)$, $\vec{v} = (0, 3)$ y $\vec{w} = (2, 5)$ en $\mathbb{R}^2$
- $\vec{u} = (3, 1)$ y $\vec{v} = (4, 5)$ en $\mathbb{R}^2$
- $\vec{u} = (1, 0, 2), \vec{v} = (4, 3, 1)$ y $\vec{w} = (5, 3, 3)$ en $\mathbb{R}^3$

DEPENDENCIA LINEAL

OBSERVACIONES

- El conjunto formado por un solo vector $\vec{u}$ no nulo es libre
- Dos vectores $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ son linealmente dependientes cuando uno es múltiplo de otro
- Todo conjunto que contenga el $\vec{0}$ es ligado
- Si un conjunto es ligado, añadiéndole vectores sigue siendo ligado
- Si un conjunto es ligado, quitándole vectores que son C.L. de los demás llegará a ser libre
- Si un conjunto es libre, quitándole vectores sigue siendo libre
- Si un conjunto es libre, se pueden añadir más vectores libres hasta un cierto número (la **dimensión** del espacio) sin dejar de ser libre

RANGO DE UN CONJUNTO DE VECTORES

DEFINICIÓN

El **rango de un conjunto de vectores** es el rango de la matriz que forman (se suelen colocar por columnas) e indica el número de vectores linealmente independientes que hay en dicho conjunto

OBSERVACIONES

- Dado un conjunto de m vectores, si su rango es m se trata de un conjunto libre
- Si tenemos n vectores en $\mathbb{R}^n$, la matriz que forman es cuadrada, por lo que se puede calcular su determinante. Si este determinante (no) es nulo se trata de un conjunto libre (ligado)
- Si al eliminar uno de los vectores de un conjunto se conserva el rango, dicho vector depende linealmente de los demás
- Si al añadir un vector a un conjunto se conserva el rango, el nuevo vector depende linealmente de los anteriores

Ejercicio: En $\mathbb{R}^3$, determina el rango del conjunto formado por los vectores $\vec{u} = (1, 0, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 0)$, $\vec{w} = (1, 1, 0)$ y $\vec{k} = (0, 0, 1)$. ¿Hay algún vector dependiente de los demás? En ese caso, ¿cuáles son los independientes?

SISTEMA GENERADOR

DEFINICIÓN

Dados los vectores $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \cdots, \vec{u_r}\}$ el conjunto de todas las posibles combinaciones lineales de ellos se llama **subespacio generado** (o **engendrado**) por $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \cdots, \vec{u_r}\}$. Se dice que $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \cdots, \vec{u_r}\}$ constituyen un **sistema generador** (del subespacio generado), que denotaremos como $< \vec{u_1}, \vec{u_2}, \cdots, \vec{u_r} >$

Ejemplos:

- En $\mathbb{R}^2$, un vector no nulo $\vec{u}$ genera una **recta**
- En $\mathbb{R}^3$, dos vectores (l.i.) generan un **plano**. Por ejemplo, $\vec{u} = (1, 0, 0)$ y $\vec{v} = (0, 1, 0)$ generan el plano XY

SISTEMA GENERADOR

Ejercicios:

- ¿Son los vectores $(1,1)$ y $(2,2)$ un sistema generador de $\mathbb{R}^2$? En caso negativo, ¿qué subespacio generan?
- Halla un sistema generador del subespacio $\{x=y\}$ de $\mathbb{R}^3$
- ¿Forman los vectores $\vec{u}=(2,0)$, $\vec{v}=(1,3)$ y $\vec{w}=(2,1)$ un sistema generador de $\mathbb{R}^2$?
- En $\mathbb{R}^3$ ¿pertenece $\vec{u}=(1,2,3)$ al subespacio generado por $\vec{v}=(4,5,6), \vec{w}=(7,8,9)$?

BASE

DEFINICIÓN

Se llama **base** de un espacio (o subespacio) vectorial S a un sistema generador de dicho espacio (o subespacio) en el que todos los vectores son linealmente independientes

OBSERVACIONES

- Una base de S es un sistema generador lo más pequeño posible (minimal) de S
- Una base de S es un conjunto de vectores linealmente independientes lo más grande posible en S
- Un espacio (o subespacio) vectorial S tiene infinitas bases
- Dada una base concreta de S, cualquier vector de S se puede obtener, de forma única, como C.L. de los vectores de esa base

Ejemplos:

- La base canónica de $\mathbb{R}^3$ la forman los vectores $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, que son linealmente independientes y constituyen un sistema generador (cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ se puede escribir como C.L. de ellos)
- Otra base distinta de $\mathbb{R}^3$ es $\{(1,0,0),(1,1,0),(0,2,-3)\}$
- Los vectores $\{(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)\}$ no forman base de $\mathbb{R}^3$ ya que no son linealmente independientes

Ejercicios:

- En $\mathbb{R}^3$, sea el subespacio S el plano XY. ¿Forman los vectores $\{(3,2,0),(1,-1,0)\}$ base de S? ¿Y los vectores $\{(2,0,0),(0,3,0),(4,1,0)\}$?
- ¿Es $\{(1,0,2),(1,0,-1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$?

Dimensión

Definición

Todas las bases de un espacio (o subespacio) tienen el mismo número de vectores, que nos dice cuál es la **dimensión** del espacio (subespacio)

Observaciones

- La dimensión de un subespacio en $\mathbb{R}^n$ coincide con el número de parámetros libres en su forma paramétrica
- El rango de un conjunto de vectores es igual a la dimensión del subespacio que generan (por combinaciones lineales)
- Sea S un subespacio de dimensión m. Entonces:
  - si tenemos m vectores linealmente independientes en S, serán sistema generador de S (y por tanto, base)
  - si tenemos m vectores que generan S, también serán linealmente independientes (y por tanto, base)

Matriz de cambio de base

Definición

En un espacio (subespacio) vectorial S, dadas dos bases B y B', se llama **matriz de cambio de base** o matriz de paso de B a B' a la matriz que contiene en sus columnas las coordenadas que se necesitan para expresar los vectores de B como C.L. de los de B'

Ejemplo: Consideremos en $\mathbb{R}^2$ la base canónica $B = \{(1,0),(0,1)\}$ y otra base $B' = \{(2,3),(1,-1)\}$

Cambio de base de B' a B:

$$(2,3) = 2(1,0) + 3(0,1)$$
$$(1,-1) = 1(1,0) - 1(0,1)$$

La matriz de cambio de base de B' a B:

$$P_{B' \to B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Cambio de base de B a B':

$$(1,0) = 1/5(2,3) + 3/5(1,-1)$$
$$(0,1) = 1/5(2,3) - 2/5(1,-1)$$

La matriz de cambio de base de B a B'

$$P_{B \to B'} = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 3/5 & -2/5 \end{pmatrix}$$

MATRIZ DE CAMBIO DE BASE

La matriz $P_{B \to B'}$ permite hallar las coordenadas de cualquier vector $\vec{u}_B$, por ejemplo el $(1, 2)$, en la base B':

$$\begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 3/5 & -2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}$$

Podemos volver a las coordenadas en la base B usando la matriz $P_{B' \to B}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 \\ -1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

- Toda matriz de cambio de base es **cuadrada** $n \times n$, siendo n la dimensión del espacio (subspacio) al que se refieren las bases
- Toda matriz de cambio de base es invertible, es decir, tiene determinante no nulo
- $P_{B' \to B}$ y $P_{B \to B'}$ son inversas entre sí: $P_{B' \to B} = P^{-1}_{B \to B'}$ y $P_{B \to B'} = P^{-1}_{B' \to B}$

Inclusión de subespacios

Definición

Se dice que el subespacio S está contenido en el subespacio T ($S \subset T$) si todos los elementos de S están también en T. En ese caso, $dim(S) \leq dim(T)$

Ejemplos:

- En $\mathbb{R}^3$, sean $S : \{y = 0, z = 0\}$ y $T : \{y = 0\}$. $S \subset T$ pues todo vector que satisfaga las ecuaciones de S también satisface la de T
- En $\mathbb{R}^3$, sean $S = \{(\lambda, 0, 0) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ y $T = \{(\alpha, 0, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. $S \subset T$, pues todo vector de la forma $(\lambda, 0, 0)$ también lo es de la forma $(\alpha, 0, \beta)$

Nota: Cuantas más ecuaciones (independientes) haya en la forma implícita, o más paramétros haya en la forma paramétrica, más pequeño será el subespacio

INTERSECCIÓN DE SUBESPACIOS

DEFINICIÓN

La intersección de los subespacios S y T ($S \cap T$) la forman los elementos comunes a S y T

La forma más sencilla de calcular $S \cap T$ es considerar, conjuntamente, las ecuaciones implícitas de S y las de T. Resolviendo este sistema llegaremos a la forma paramétrica de $S \cap T$

Ejemplo: Sean en $\mathbb{R}^3$ los subespacios $S : \{z = 0\}$ (plano XY) y $T : \{y = 0\}$ (plano XZ). $S \cap T$ se expresa en implícitas como $\{z = 0, y = 0\}$ y en paramétricas como $\{(\alpha, 0, 0)\}$ (eje X).

TEOREMA

$S \cap T$ también es un subespacio, pues la suma y el producto por un escalar permanece dentro de S y T y, por tanto, dentro de $S \cap T$

Suma de subespacios

Definición

Dados dos subespacios S y T, el subespacio suma ($S+T$) se define como el conjunto de vectores que podamos construir sumando un vector de S y otro de T

Teorema

Uniendo un sistema generador de S y otro de T (o una base de S y una base de T), se obtiene un sistema generador (**no necesariamente una base**) del subespacio $S+T$

Nota: Al contrario que la intersección, la suma $S+T$ se calcula más fácilmente usando la forma paramétrica de S y T

Ejemplo:

Sea $S = \{(\alpha, \beta, 0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ (plano XY) $\rightarrow$ sist. gen. $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$
Sea $T = \{(\alpha, 0, \gamma) : \alpha, \gamma \in \mathbb{R}\}$ (plano XZ) $\rightarrow$ sist. gen. $\{(1,0,0),(0,0,1)\}$
Se puede ver que $\{(1,0,0),(0,1,0),(1,0,0),(0,0,1)\}$ es sistema generador de $S+T$, pero no base. Además, $S+T$ es $\mathbb{R}^3$

SUMA DE SUBESPACIOS

Ejercicio: Sean en $\mathbb{R}^3$ los subespacios $S = \{(\alpha, \alpha + \beta, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ y $T = \{(0, 0, \gamma) : \gamma \in \mathbb{R}\}$. Obtén el subespacio $S + T$.

TEOREMA

$S + T$ también es un subespacio, pues la suma y el producto por un escalar permanece dentro de $S + T$

OBSERVACIÓN

$S \cap T$ es el mayor subespacio contenido en S y T, y $S + T$ es el menor subespacio que contiene a S y T

SUMA DIRECTA

OBSERVACIÓN

Sean S y T dos subespacios. Hemos visto que uniendo un sistema generador de S y otro de T (o una base de S y otra de T) se obtiene un sistema generador de $S + T$. Sin embargo, no siempre uniendo una base de S con una base de T se obtiene una base de $S + T$

En general, se cumplirá la **fórmula de Grassmann**:

$$\boxed{dim(S + T) = dim(S) + dim(T) - dim(S \cap T)}$$

DEFINICIÓN

Se dice que la suma de S y T es **directa** ($S \bigoplus T$) si su intersección ($S \cap T$) es solamente el vector $\vec{0}$ (subespacio nulo). Por tanto:

$$dim(S \bigoplus T) = dim(S) + dim(T)$$

En estas condiciones, al unir una base de S y una base de T se obtiene una base de $S \bigoplus T$

SUBESPACIO SUPLEMENTARIO

DEFINICIÓN

Si dos subespacios S y T del espacio vectorial U están en suma directa ($S \cap T = \vec{0}$) y además su suma es igual al espacio total ($S \bigoplus T = U$), se dice que S y T son **suplementarios** (o **complementarios**)

Nota: El único suplementario del $\vec{0}$ es el espacio total, y el único suplementario del espacio total es el $\vec{0}$

Procedimiento para hallar un subespacio suplementario:
Dada una base del subespacio S, la extendemos añadiendo vectores (linealmente independientes de los anteriores) hasta formar una base del espacio total U. Para ello podemos elegir cualquier vector, por ejemplo, los de la base canónica de U. Los vectores que hemos añadido a los de la base de S forman una **base de un suplementario** de S (hay infinitos suplementarios)

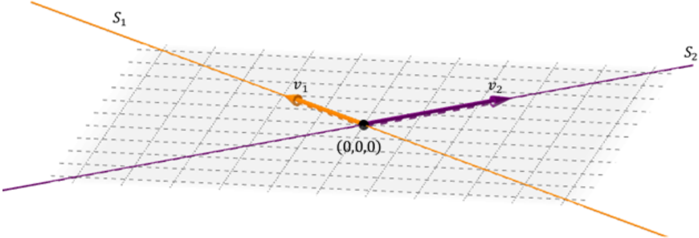
SUBESPACIO SUPLEMENTARIO

Ejemplo: En $\mathbb{R}^4$, sea S un subespacio cuya base viene dada por los vectores $\vec{u_1} = (1, 0, 2, 0)$ y $\vec{u_2} = (3, 0, 0, 0)$. Para hallar un suplementario de S, consideramos los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^4$, $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$. Podemos añadir a $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}\}$ los vectores $(0, 1, 0, 0)$ y $(0, 0, 0, 1)$, ya que los 4 forman un conjunto linealmente independiente (rango 4). Por tanto, $\{(0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ forman una base de un suplementario de S

Ejercicio: Dado el subespacio S de $\mathbb{R}^4$ definido por las ecuaciones implícitas $\{x + y = 0, t = 0\}$, obtén un subespacio complementario de S

EJEMPLOS EN $\mathbb{R}^3$

Dos rectas, $S_1 =< \vec{v}_1 >$ y $S_2 =< \vec{v}_2 >$, que se cortan en el origen

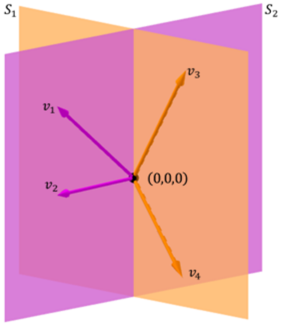


$$S_1 \cap S_2 = \{(0,0,0)\}$$
$$S_1 + S_2 =< \vec{v}_1, \vec{v}_2 >$$

$S_1 \bigoplus S_2 = S$, siendo S el plano que contiene a ambas rectas

Ejemplos en $\mathbb{R}^3$

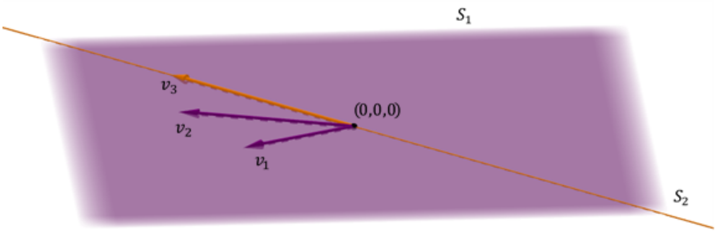
Dos planos, $S_1 =< \vec{v}_3, \vec{v}_4 >$ y $S_2 =< \vec{v}_1, \vec{v}_2 >$, que se cortan en una recta que contiene al origen



$$S_1 \cap S_2 \neq \{(0,0,0)\}$$
$$S_1 + S_2 =< \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4 >=< \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 >$$
$$S_1 + S_2 = \mathbb{R}^3, \text{ pero } \cancel{S_1 \bigoplus S_2}$$

Ejemplos en $\mathbb{R}^3$

Recta $S_2 =< \vec{v}_3 >$ que incluye el origen, contenida en un plano $S_1 =< \vec{v}_1, \vec{v}_2 >$

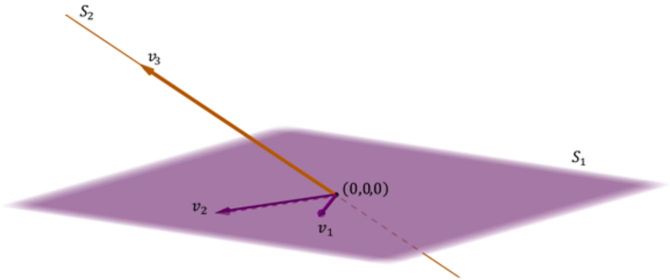


$S_1 + S_2 = S_1$, ya que $S_2 \subset S_1$

$\cancel{S_1 \oplus S_2}$, ya que $S_1 \cap S_2 = S_2$

EJEMPLOS EN $\mathbb{R}^3$

Recta $S_2 =< \vec{v}_3 >$ que corta un plano $S_1 =< \vec{v}_1, \vec{v}_2 >$ en el origen



$S_1 \cap S_2 = \{(0,0,0)\}$ y $S_1 + S_2 =< \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 >= \mathbb{R}^3$, por tanto, $S_1 \bigoplus S_2$. En otras palabras, S_1 y S_2 son subespacios **suplementarios**