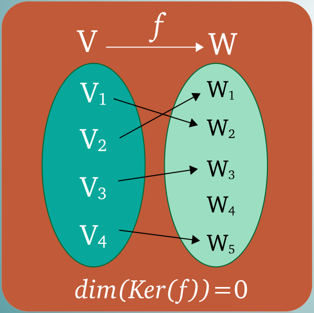
Álgebra

Tema 5. Aplicaciones lineales



Rodrigo García Manzanas
Neila Campos González
Ana Casanueva Vicente

Departamento de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación

Aplicación

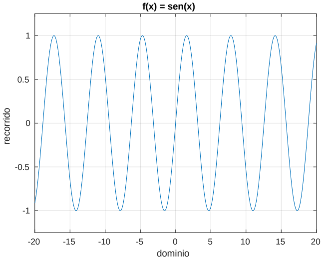
Una aplicación f entre dos conjuntos A y B es una regla que permite asignar a cada elemento de A, uno (y sólo uno) de B

$$f : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B} \qquad\qquad A \xrightarrow{f} B$$

Si f asigna al elemento $a \in A$ el elemento $b \in B$ se dice que b es la imagen de a, y se denota como $f(a) = b$

Podríamos pensar en funciones matemáticas como aplicaciones en las que el dominio sería el conjunto inicial A y el rango (o recorrido) el conjunto final B. Por ejemplo, la función $f(x) = sen(x)$ podría verse como una aplicación tal que:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow [-1, 1] \\ x &\rightsquigarrow sen(x) \end{aligned}$$



En este tema trabajaremos con aplicaciones entre (sub)espacios vectoriales reales

Aplicación lineal (homomorfismo)

Dados dos (sub)espacios vectoriales reales V y W, una aplicación $f : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ es **lineal** si y sólo si:

- $f(\vec{v_1} + \vec{v_2}) = f(\vec{v_1}) + f(\vec{v_2}), \;\; \forall \vec{v_1}, \vec{v_2} \in V$
- $f(\alpha \vec{v}) = \alpha f(\vec{v}), \;\; \forall \vec{v} \in V, \alpha \in \mathbb{R}$
- $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$

Ejercicio: Comprueba si son lineales las siguientes aplicaciones:

- $\begin{aligned} f : \mathbf{V} &\longrightarrow \mathbf{W} \\ \vec{v} &\rightsquigarrow \vec{0} \end{aligned}$
- $\begin{aligned} f : \mathbf{V} &\longrightarrow \mathbf{V} \\ \vec{v} &\rightsquigarrow \vec{v} \end{aligned}$
- $\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\rightsquigarrow (2x, z) \end{aligned}$
- $\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y) &\rightsquigarrow (x, y, x + y, 1) \end{aligned}$

NÚCLEO

Sea $f : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ una aplicación lineal. Entonces:

$$Ker(f) = \left\{\vec{v} \in V \mid f(\vec{v}) = \vec{0}_W\right\}$$

Nota: Como mínimo, $Ker(f)$ estará compuesto por $\vec{0}_V$

Ejercicio: Calcula el núcleo de las siguientes aplicaciones lineales:

- $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
  $(x, y, z) \rightsquigarrow (x + y + 2z, 3x + 3y + 6z)$
- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
  $(x, y) \rightsquigarrow (2x - 3y, -x - y)$

IMAGEN

Sea $f : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ una aplicación lineal. La imagen de f, $Im(f)$, será el (sub)espacio formado por las imágenes de todos los vectores de V. Si S es un subespacio de V, $Im(S)$ será un subespacio de W formado por las imágenes de todos los vectores de S

Propiedades:

- $dim(Im(S)) \leq dim(S)$

  Nota: Lógicamente, también se cumplirá que $dim(S) \leq dim(V)$ y que $dim(Im(S)) \leq dim(W)$

- Si $S =< \vec{v}_1, ..., \vec{v}_r > \;\Rightarrow\; Im(S) =< f(\vec{v}_1), ..., f(\vec{v}_r) >$

  Nota: Esta es la propiedad que usaremos en la práctica para calcular la imagen de una aplicación

- La imagen de un conjunto L.D. es otro conjunto L.D. La imagen de un conjunto L.I. no tiene porqué ser L.I. Por ejemplo, no está asegurado que la imagen de una base de S sea base de $Im(S)$

  Nota: Esto sólo ocurrirá para aplicaciones inyectivas

TEOREMA

Sea $f : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ una aplicación lineal. Las dimensiones del núcleo y la imagen se relacionan de acuerdo con la siguiente fórmula:

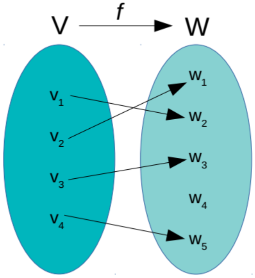
$$\boxed{dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) = dim(V)}$$

Ejercicio: Calcula la imagen de las siguientes aplicaciones lineales y comprueba que se cumple la relación de dimensiones entre núcleo e imagen:

- $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
  $(x, y, z) \rightsquigarrow (x + y + 2z, 3x + 3y + 6z)$
- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
  $(x, y) \rightsquigarrow (2x - 3y, -x - y)$

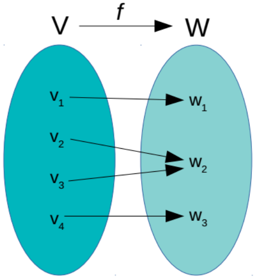
Una aplicación lineal $f : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ puede ser:

Inyectiva $\Leftrightarrow$ no hay dos elementos distintos de V (antecedentes) que tengan imágenes iguales en W



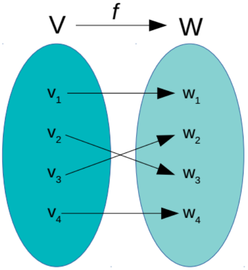
$$\boxed{dim(Ker(f)) = 0}$$

Suprayectiva (o sobreyectiva) $\Leftrightarrow$ todos los elementos de W tienen antecedente



$$\boxed{dim(Im(f)) = dim(W)}$$

Biyectiva $\Leftrightarrow$ todos y cada uno de los elementos de W tienen un único antecedente en V



inyectiva + suprayectiva

Ejercicio: Clasifica las siguientes aplicaciones lineales

- La aplicación del conjunto de la población española mayor de edad en el conjunto de los números naturales, que asigna a cada ciudadano su número de DNI
- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$
  $x \rightsquigarrow x^2$
- $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
  $(x, y, z) \rightsquigarrow (x + y + 2z, 3x + 3y + 6z)$
- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
  $(x, y) \rightsquigarrow (2x - 3y, -x - y)$
- $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

Matriz asociada a una aplicación

Toda aplicación lineal se puede identificar con una matriz, y toda matriz representa una aplicación lineal. Dada $f : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ lineal, se llama **matriz asociada a** f (en bases canónicas) a la matriz A que contiene en sus columnas las imágenes de la base canónica de V

Propiedades:

1. La matriz de $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es de tamaño $m \times n$
2. $rg(f) = rg(A) = dim(Im(f))$
3. A puede utilizarse para calcular la imagen de cualquier vector del (sub)espacio inicial. Por ejemplo, si multiplicamos A por el vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ (en columna), obtendremos el vector $f(\vec{v}) \in \mathbb{R}^m$ (también en columna). Es decir, $\boxed{A\vec{v} = f(\vec{v})}$

Ejercicio: Calcula la matriz asociada a la siguiente aplicación y utilízala para hallar el rango de f y la imagen del vector $(2, 3)$

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\rightsquigarrow (x + y, x - y, 0) \end{aligned}$$

Cálculo del núcleo y la imagen de una aplicación lineal mediante su matriz asociada

Dada $f : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ lineal, con matriz asociada A:

Núcleo:

Los vectores del núcleo son los $\vec{v} \in V \mid A\vec{v} = \vec{0_W}$. Por tanto, para calcular el $Ker(f)$ basta con plantear el siguiente sistema:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_1 \\ \vdots \\ 0_m \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

si es compatible determinado $\Rightarrow Ker(f) = \{\vec{0}\}$
si es compatible indeterminado $\Rightarrow Ker(f)$ se expresará en forma paramétrica

Imagen:

$Im(f)$ es el subespacio generado por las columnas de A. Para obtener una base de $Im(f)$ habrá que suprimir las columnas de A que sean L.D. (en caso de haberlas)

Ejercicio: Calcula una base del núcleo y otra de la imagen de la aplicación lineal definida por la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

La matriz asociada con la que hemos trabajado hasta ahora, A, es la matriz **estándar** o **en bases canónicas** (si no se afirma lo contrario, se tratará siempre de esta matriz). Sin embargo, si fijamos en los (sub)espacios inicial y final otras bases distintas de las canónicas, la matriz que identifica a la aplicación será otra

Matriz de una aplicación en bases cualesquiera

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal, B una base cualquiera de $\mathbb{R}^n$ y B' una base cualquiera de $\mathbb{R}^m$. Entonces, se define la matriz de f en bases B y B' como la matriz M que contiene en sus columnas las imágenes de los vectores de B, expresadas en coordenadas respecto de B'

Ejemplo: Sea la aplicación lineal

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\rightsquigarrow (x+y, x-y, 0) \end{aligned}$$

$B = \{(1,1),(1,-1)\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ y $B' = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Calcula M, la matriz asociada de f en las bases B y B'

Propiedades de M:

1. La matriz de $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ en bases cualesquiera, M, es de tamaño $m \times n$
2. $rg(f) = rg(M) = dim(Im(f))$. Obviamente, $rg(A) = rg(M)$
3. $M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$, siendo $(x_1, ..., x_n)$ las coordenadas de $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ en la base B y $(y_1, ..., y_m)$ las coordenadas de su imagen, $f(\vec{x})$, en la base B'

Ejemplo: Sea la aplicación lineal

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\rightsquigarrow (x + y, x - y, 0) \end{aligned}$$

halla la imagen del vector $(5, 3)$ y comprueba que se cumple la última propiedad, considerando la matriz M que ya has calculado

Por representar ambas la misma aplicación, A y M serán matrices **semejantes** ($A \sim M$). En el caso de aplicaciones en las que el (sub)espacio inicial y el final coinciden (llamadas endomorfismos) A y M serán matrices cuadradas y cumplirán lo siguiente:

- $tr(A) = tr(M)$
- $det(A) = det(M)$
- Los autovalores de A son los mismos que los de M (lo veremos en el siguiente tema)

Relación entre la matriz estándar y la matriz en bases cualesquiera

Sea $f : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ una aplicación lineal con matriz asociada A en bases canónicas. Sea B una base cualquiera de V, y B' una base cualquiera de W. Sean además:

- P: matriz de paso de B a la base canónica, en V (y por tanto, P^{-1} la matriz de paso de la base canónica a B)
- Q: matriz de paso de B' a la base canónica, en W (y por tanto, Q^{-1} la matriz de paso de la base canónica a B')

$$V \xrightarrow{\;f\;} W$$

$$\begin{tikzcd}
BC_V \arrow[r, "A"] \arrow[d, shift right, "P^{-1}"'] & BC_W \arrow[d, shift right, "Q^{-1}"'] \\
B \arrow[r, "M"] \arrow[u, shift right, "P"'] & B' \arrow[u, shift right, "Q"']
\end{tikzcd}$$

Entonces $\Rightarrow$ $M = Q^{-1}AP$ o $A = QMP^{-1}$

También es posible cambiar de base sólo en el espacio inicial, o sólo en el final.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "f"] & & W \\ BC_V \arrow[rr, "A"] \arrow[d, shift right, "P^{-1}"'] & & BC_W \\ B \arrow[u, shift right, "P"'] \arrow[urr, "M"] & & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[rr, "f"] & & W \\ BC_V \arrow[rr, "A"] \arrow[drr, "M"'] & & BC_W \arrow[d, shift right, "Q^{-1}"'] \\ & & B' \arrow[u, shift right, "Q"'] \end{tikzcd}$$

$M = AP$ o $A = MP^{-1}$ $\qquad$ $M = Q^{-1}A$ o $A = QM$

Ejemplo: Sea la aplicación lineal

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\rightsquigarrow (x + y, x - y, 0) \end{aligned}$$

para la cual ya hayamos su matriz en bases canónicas $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ en bases $B = \{(1, 1), (1, -1)\}$ y $B' = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$. Halla las matrices P y Q, y comprueba que se cumple la relación $M = Q^{-1}AP$

Algunas aplicaciones lineales que tienen una interpretación geométrica sencilla en $\mathbb{R}^2$ son las siguientes:

- Escalamiento isótropo (homotecia)

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \rightsquigarrow (1.10x, 1.10y)$$

Dilatación de un $10\,\%$ en el plano

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \rightsquigarrow (0.8x, 0.8y)$$

Contracción de un $20\,\%$ en el plano

- Escalamiento anisótropo

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \rightsquigarrow (2x, 4y)$$

Escalamiento de factor 2 en el eje OX y de factor 4 en el eje OY

- Proyecciones

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \rightsquigarrow (x, 0)$$

Proyección ortogonal sobre el eje OX

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \rightsquigarrow (0, y)$$

Proyección ortogonal sobre el eje OY

ISOMETRÍAS

Hay un tipo de transformaciones que tienen especial interés porque conservan la norma del vector sobre el que se aplican, son las llamadas **isometrías**. En $\mathbb{R}^2$, las isometrías posibles son las reflexiones respecto de un eje de simetría y los giros.

- Reflexiones (simetría axial)

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \rightsquigarrow (x, -y)$$

Simetría respecto al eje OX

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \rightsquigarrow (-x, y)$$

Simetría respecto al eje OY

- Giros (rotaciones)

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \rightsquigarrow (\tfrac{1}{\sqrt{2}}x - \tfrac{1}{\sqrt{2}}y, \tfrac{1}{\sqrt{2}}x + \tfrac{1}{\sqrt{2}}y)$$

Giro de 45° (en sentido antihorario) en el plano

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \rightsquigarrow (\tfrac{1}{\sqrt{2}}x + \tfrac{1}{\sqrt{2}}y, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}x + \tfrac{1}{\sqrt{2}}y)$$

Giro de 45° (en sentido horario) en el plano

Tanto en las reflexiones como en los giros, la matriz asociada a la aplicación que realiza la transformación es ortogonal. Por ello, a las isometrías se les suele llamar también **transformaciones ortogonales**.

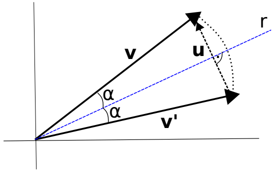
REFLEXIONES (SIMETRÍA AXIAL)

MATRIZ DE HOUSEHOLDER

Dado un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, la aplicación que lo refleja respecto al eje de simetría r (con r pasando por el origen y $\vec{v}$ no ortogonal a r), obteniendo $\vec{v}'$, tiene por matriz asociada $H = I_2 - 2\frac{\vec{u}\vec{u}^t}{|\vec{u}|^2}$, donde $\vec{u}$ es cualquier vector columna ortogonal a r. Este tipo de matriz se denomina de **Householder**

Propiedades:

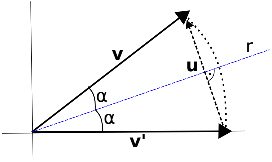
- H es simétrica ($H = H^t$)
- H es ortogonal ($H^t = H^{-1}$), con $det(H) = -1$
- H es involutiva ($H^2 = I$)



Ejercicio: En $\mathbb{R}^2$, refleja el vector $\vec{v} = (2, 1)$ con respecto al subespacio S cuya ecuación implícita es $x - y = 0$ mediante la aplicación de una matriz de Householder H. ¿Qué vector obtienes? ¿Qué ocurre al aplicarle H a cualquier vector $\vec{u} \perp S$? ¿Y al aplicársela a un vector cualquiera de S?

REFLEXIONES (SIMETRÍA AXIAL)

En $\mathbb{R}^2$, podríamos llevar el vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$ sobre el semieje $OX^{\pm}$, convirtiéndolo por tanto en el $\vec{v'} = (\pm|\vec{v}|, 0)$, mediante la aplicación de una matriz de Householder. El problema se reducirá a encontrar el eje de simetría adecuado; o lo que es lo mismo, a encontrar el vector $\vec{u}$ adecuado, que podrá ser simplemente $\vec{v} - \vec{v'}$ (o el $\vec{v'} - \vec{v}$). Siguiendo un razonamiento análogo también podríamos llevar $\vec{v}$ sobre el semieje $OY^{\pm}$, obteniendo el $\vec{v'} = (0, \pm|\vec{v}|)$



Nota: Date cuenta de la diferencia que existe entre este procedimiento y una proyección ortogonal sobre el eje OX (o el OY), en la que **no** se mantiene la norma del vector de partida.

Ejercicio: En $\mathbb{R}^2$, halla la matriz de Householder que sitúa al punto $(1, 2)$ sobre los semiejes *a)* OX^+, *b)* OX^-, *c)* OY^+ y *d)* OY^-. En todos esos casos, ¿cuáles son las coordenadas del punto resultante? Puedes utilizar MATLAB para los cálculos

GIROS (ROTACIONES)

MATRIZ DE GIVENS

Dado un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, la aplicación que lo rota un ángulo α (en radianes) con respecto al origen, convirtiéndolo en $\vec{v'}$, tiene por matriz asociada:

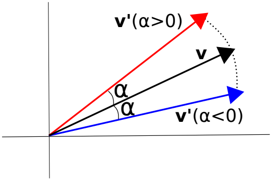
$$G = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$$

$\alpha > 0 \rightarrow$ rotación en el sentido antihorario (positiva)
$\alpha < 0 \rightarrow$ rotación en el sentido horario (negativa)

Este tipo de matriz se denomina de **Givens**

Propiedades:

- G es ortogonal ($G^t = G^{-1}$), con $det(G) = 1$
- $G_\alpha = G^t_{-\alpha}$

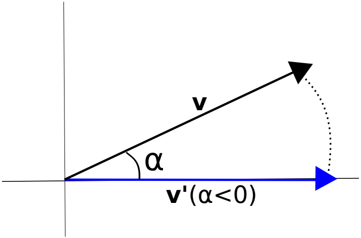


Ejercicios:

- Demuestra la expresión de G
- En $\mathbb{R}^2$, gira $\vec{v} = (2, 1)$ un ángulo de $30°$ (en sentido horario) utilizando la matriz de Givens adecuada. ¿Que vector obtienes? Utiliza MATLAB

GIROS (ROTACIONES)

En $\mathbb{R}^2$, las matrices de Givens también se pueden utilizar para llevar un vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$ sobre el semieje $OX^{\pm}$ sin más que encontrar el ángulo α adecuado para que $\vec{v'} = (\pm|\vec{v}|, 0)$. Del mismo modo, también podríamos llevar $\vec{v}$ sobre el semieje $OY^{\pm}$ sin más que encontrar el ángulo α tal que $\vec{v'} = (0, \pm|\vec{v}|)$



Ejercicio: En $\mathbb{R}^2$, halla la matriz de Givens que sitúa al punto $(1, 2)$ sobre los semiejes *a)* OX^+, *b)* OX^-, *c)* OY^+ y *d)* OY^-. En todos esos casos, ¿cuáles son las coordenadas del punto resultante? Utiliza MATLAB

FACTORIZACIÓN QR

TEOREMA

Toda matriz real $A_{m\times n}$ cuyas columnas sean linealmente independientes puede factorizarse de manera **única** como $A = QR$, donde las columnas de $Q_{m\times n}$ son una base **ortonormal** del subespacio que tiene por base las columnas de A, y $R_{n\times n}$ es una forma escalonada de A. En el caso de matrices A cuadradas, Q es **ortogonal** ($Q^{-1} = Q^t$)

En estas condiciones, los procedimientos que hemos visto para hacer ceros en un vector mediante la aplicación de matrices de Householder y de Givens pueden emplearse para obtener la factorización QR de A. Tanto las matrices H como las G son **ortogonales**, por lo que Q podrá obtenerse como el producto de las sucesivas matrices H (ó G transpuestas) que necesitemos para llegar a una forma escalonada de A, es decir, R:

$$H_j \cdots H_1 A = R$$
$$A = (H_j \cdots H_1)^{-1} R = H_1^{-1} \cdots H_j^{-1} R$$
$$A = QR, \text{ con } \boxed{Q = H_1^t \cdots H_j^t} = H_1 \cdots H_j$$

$$G_j \cdots G_1 A = R$$
$$A = (G_j \cdots G_1)^{-1} R = G_1^{-1} \cdots G_j^{-1} R$$
$$A = QR, \text{ con } \boxed{Q = G_1^t \cdots G_j^t}$$

Ejercicio: Halla la factorización QR de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ mediante matrices de Householder y de Givens. Utiliza MATLAB