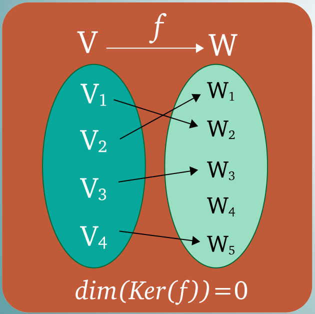
Álgebra

Tema 6. Diagonalización de endomorfismos



Rodrigo García Manzanas
Neila Campos González
Ana Casanueva Vicente

Departamento de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación

ENDOMORFISMO (I)

Un **endomorfismo** es una aplicación lineal en la que el espacio inicial y el final son el mismo, $f : V \longrightarrow V$. La matriz de un endomorfismo será por tanto cuadrada de orden n, siendo n la dimensión de V

Recuerda que $\boxed{dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) = n}$. Por tanto, un endomorfismo ha de ser *i)* inyectivo y suprayectivo a la vez (biyectivo), o *ii)* ninguna de las dos cosas

Ejercicio: Clasifica los siguientes endomorfismos:

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
  $(x, y) \rightsquigarrow (-x + y, 3y)$
- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
  $(x, y) \rightsquigarrow (2x, x)$

Endomorfismo (II)

En un endomorfismo f estaremos en la siguiente situación:

$$V \xrightarrow{\quad f \quad} V$$

$$\begin{tikzcd}
BC_V \arrow[r, "A"] \arrow[d, shift right, "P^{-1}"'] & BC_V \arrow[d, shift right, "P^{-1}"'] \\
B \arrow[r, "M"] \arrow[u, shift right, "P"'] & B \arrow[u, shift right, "P"']
\end{tikzcd}$$

Por tanto, $M = P^{-1}AP$ (o $A = PMP^{-1}$)

Por ser matrices (cuadradas) del mismo endomorfismo en bases distintas, se dice que A y M son **semejantes**. En este tipo de matrices se cumple:

- $tr(A) = tr(M)$
- $det(A) = det(M)$
- A y M tienen los mismos autovalores

En este tema se tratará de ver si, dada una matriz **cuadrada real** A, existe otra matriz *semejante* a ella que sea diagonal, D, tal que se cumpla la relación $D = P^{-1}AP$ (o $A = PDP^{-1}$). En otras palabras: dado un endomorfismo, trataremos de encontrar una base en la cual la matriz del mismo sea diagonal (P será por tanto la matriz de paso que contiene en sus columnas esa nueva base). Para ello se utilizarán los **valores y vectores propios**

VALORES Y VECTORES PROPIOS

Si un vector $\vec{v}$ no nulo cumple que $f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ (con λ escalar $\in \mathbb{R}$), se dice que $\vec{v}$ es un **vector propio** (o autovector) de f, y que λ es su **valor propio** (o autovalor) asociado. Además, todos los vectores propios $\vec{v}$ asociados a λ forman un subespacio vectorial, V_λ, al que llamaremos **subespacio propio** de λ

CÁLCULO DE VALORES Y VECTORES PROPIOS

1. Plantear el **polinomio característico** de A: $|A - \lambda I|$. Los autovalores serán las raíces de este polinomio de grado (máximo) n en λ

   Nota: Puede haber valores propios cuya multiplicidad sea mayor que 1. Por ejemplo, en el polinomio característico $(4-\lambda)^3(5+\lambda)$, el autovalor 4 tiene multiplicidad 3, y el -5 tiene multiplicidad 1. Utilizaremos la siguiente notación: $m(4) = 3$, $m(-5) = 1$

2. Para cada valor propio λ_i, resolver el sistema $(A - \lambda_i I)\vec{v} = \vec{0}$, con $\vec{v} \in V$. Las soluciones a este sistema serán los autovectores asociados a λ_i, es decir, V_{λ_i}

   Notas:

   - Date cuenta que $V_{\lambda_i} = Ker(A - \lambda_i I)$
   - $\boxed{dim(V_{\lambda_i}) = n - rg(A - \lambda_i I)}$ y $\boxed{1 \leq dim(V_{\lambda_i}) \leq m(\lambda_i)}$

Ejercicio: Dado el endomorfismo $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow (3x + 2y, y) \in \mathbb{R}^2$, calcula sus autovalores y los subespacios propios asociados a estos autovalores

Sea A la matriz de un endomorfismo. Entonces:

PROPIEDADES DE LOS AUTOVECTORES

- Los autovectores asociados a autovalores distintos son L.I.

PROPIEDADES DE LOS AUTOVALORES (I)

- Si A es diagonal o triangular, sus autovalores son directamente los elementos de la diagonal
- La suma de todos los autovalores de una matriz, contando cada uno de ellos tantas veces como indica su multiplicidad, es igual a su traza
- El producto de todos los autovalores de una matriz, contando cada uno de ellos tantas veces como indica su multiplicidad, es igual a su determinante

Propiedades de los autovalores (II)

- Los autovalores de un endomorfismo son los mismos respecto de cualquier base. Por tanto, cualquier matriz de un endomorfismo, respecto de cualquier base, tiene la misma traza y el mismo determinante
- Una matriz es singular si $\lambda = 0$ es autovalor
- Los autovalores de A son los mismos que los de A^t
- Si los autovalores de A son $\{\lambda_1, ..., \lambda_r\}$:
  - Los de A^k son $\{\lambda_1^k, ..., \lambda_r^k\}$
  - Los de αA (con α escalar $\in \mathbb{R}$) son $\{\alpha\lambda_1, ..., \alpha\lambda_r\}$
  - Los de A^{-1} (simpre que A^{-1} exista) son $\left\{\frac{1}{\lambda_1}, ..., \frac{1}{\lambda_r}\right\}$

PROCEDIMIENTO GENERAL PARA DIAGONALIZAR UN ENDOMORFISMO (I)

Comprobar si A, **real**, es diagonalizable:

1. Resolver la ecuación $|A - \lambda I| = 0$ para obtener los valores propios. Si alguno de ellos no es real, el endomorfismo no es diagonalizable
2. Para cada λ_i $(i = \{1, ..., r\})$, hallar una base del subespacio propio asociado V_{λ_i} y obtener su dimensión, comprobando que $dim(V_{\lambda_i}) = m(\lambda_i)$. Si algún autovalor no verifica lo anterior, el endomorfismo no es diagonalizable

Ejercicio: Comprueba si los siguientes endomorfismos son diagonalizables:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, cuyo polinomio característico es $-(7-\lambda)^2(\lambda+2)$

En caso de serlo, obtén una base de sus subespacios propios

Procedimiento general para diagonalizar un endomorfismo (II)

Si efectivamente A, **real**, es diagonalizable:

1. La diagonal de D estará formada por los valores propios
   Nota: Para que D sea $n \times n$ se necesitarán n elementos en la diagonal, así que habrá que repetir cada valor propio λ_i tantas veces como indique su multiplicidad
2. La base respecto a la cual el endomorfismo es diagonalizable es la formada por la unión de las bases de todos los subespacios propios (date cuenta que $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} dim(V_{\lambda_i}) = n$). P es una matriz que tiene, en columnas, los vectores de esta base (que será una base de autovectores de V)
   Nota: Ha de respetarse el mismo orden al colocar los valores propios en la diagonal de D y los correspondientes vectores propios en las columnas de P

En resumen: Si B es una base formada por vectores propios de f, la matriz de f en la base B es diagonal (D). Estaríamos en la siguiente situación:

Endomorfismo diagonalizable

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "f"] & & V \\
BC_V \arrow[d, shift right, "P^{-1}"'] \arrow[rr, "A"] & & BC_V \arrow[d, shift right, "P^{-1}"'] \\
B \text{ (vectores propios)} \arrow[u, shift right, "P"'] \arrow[rr, "D\ (diagonal)"] & & B \text{ (vectores propios)} \arrow[u, shift right, "P"']
\end{tikzcd}
$$

Como ya sabemos, se cumplirá que $A = PDP^{-1}$

Ejercicio: Comprueba si son diagonalizables los siguientes endomorfismos:

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
  $(x, y) \rightsquigarrow (3x + 2y, y)$
- $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
  $(x, y, z) \rightsquigarrow (x - 4y, -y, 2y + z)$

En caso de serlo, obtén las matrices D y P y comprueba que se cumple la relación $A = PDP^{-1}$. ¿Qué pasa con la traza y el determinante de las matrices A y D?

DIAGONALIZACIÓN ORTOGONAL DE MATRICES SIMÉTRICAS

Una matriz $A_{n\times n}$ es diagonalizable ortogonalmente si y sólo si existe P **ortogonal** tal que $P^{-1}AP = P^tAP = D$. Recuerda que para que P sea ortogonal sus columnas tienen que ser **ortonormales**.

TEOREMA

Toda matriz real simétrica es diagonalizable. Además, en este tipo de matrices, los subespacios propios asociados a distinto valor propio son ortogonales

Ejercicio: Diagonaliza (ortogonalmente) la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Comprueba que se cumple la relación $P^tAP = D$ y que V_{λ_1} y V_{λ_2} son ortogonales.